Ueber Convergenz unendlicher Reihen

Nr. 415.

Hermann Kinkelin.

Ueber Convergenz unendlicher Reihen.

(Vorgetragen am 13. Februar 1858.)

I.

Der nachstehende Aufsatz enthält:

1) Eine elementare Ableitung und theilweise Verallgemeinerung der von **Morgan** und **Bertrand** aufgestellten Criterien für die Convergenz unendlicher einfacher Reihen.
2) Die Anwendung derselben auf die Beurtheilung einfacher bestimmter Integrale.
3) Criterien für die Convergenz mehrfacher Reihen.

II.

Jede unendliche Reihe, deren Convergenz streitig ist, lässt sich auf eine Reihe

1) $$\Sigma u_x = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \text{ in inf.}$$

zurückführen, deren Glieder sämmtlich positiv sind und in's Unendliche abnehmen. Sei ferner u_x eine continuirliche Funktion von x, in der Weise, dass wenn α eine positive Grösse < 1 bezeichnet, $u_{x+\alpha}$ nicht unendlichmal grösser als u_x und u_{x+1} ist, so convergirt oder divergirt obige Reihe simultan mit

$$\Sigma\, a_x\, u_x = a_1\, u_1 + a_2\, u_2 + \ldots \text{ in inf.},$$

wo a_1, a_2, ... sämmtlich endliche Grössen > 0 bezeichnen, oder mit

2) $$\Sigma v_x = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots \text{ in inf.},$$

wo v_x so beschaffen ist, dass man u_x daraus durch Multiplication mit einer endlichen Grösse > 0 erhält; und ebenso mit

3) $$\Sigma u_\alpha = u_\alpha + u_\beta + u_\gamma + \ldots \text{ in inf.},$$
$$\text{wo } \alpha < 1 < \beta < 2 < \gamma < 3 \ldots.$$

Dieses vorausgesetzt, sei m eine beliebige ganze Zahl, so wird gleichzeitige Convergenz oder Divergenz stattfinden mit

$$\Sigma m^x u_{m^x} = m u_m + m^2 u_{m^2} + m^3 u_{m^3} + \ldots \text{ in inf.}$$

die wegen 3) auch noch gelten wird, wenn m überhaupt eine positive Zahl > 1 ist; also auch mit

4) $$\Sigma e^x u_{e^x} = e u_e + e^2 u_{e^2} + e^3 u_{e^3} + \ldots \text{ in inf.}$$

In ähnlicher Weise wird auch gezeigt, dass diess geschieht mit der Reihe $\Sigma \{x^\alpha - (x-1)^\alpha\} u_{x^\alpha}$, oder mit

5) $$\Sigma x^{\alpha-1} u_{x^\alpha} = 1^{\alpha-1} u_{1^\alpha} + 2^{\alpha-1} u_{2^\alpha} + \ldots \text{ in inf.},$$

wo α eine beliebige positive Zahl > 1.

Mit Hülfe von 3), 4) und 5) können aus u_x alle Logarithmen und gebrochenen Exponenten von x weggeschafft werden. Diesem nach kann die Reihe 1) zur Beurtheilung ihrer Convergenz immer so reduzirt werden, dass alle ihre Glieder positiv sind, in's Unendliche abnehmen, und von allen endlich bleibenden Faktoren, worunter auch die periodisch wiederkehrenden, wie Sin. ax, Cos. ax verstanden werden, befreit sind. Alsdann folgt, dass 1) und 2) simultan convergiren und divergiren, sobald

6) $$\text{Lim. } u_x = \text{Lim. } u_x \quad , \quad x = k,$$

wobei k hier, wie im folgenden, immer eine unendlich wachsende positive Zahl vorstellen soll.

Vermöge dieses Satzes kann nun die Convergenz oder Divergenz der Reihe 1) abhängig gemacht werden von der Convergenz oder Divergenz einer Reihe 2), deren Algorithmus ein einfacherer ist.

Es sei erstens

$$\Sigma v_x = \frac{1}{a^1} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \ldots \text{ in inf.}$$

Die Summe dieser Reihe bis zu dem Gliede v_k ist $\frac{a^k - 1}{a^k(a-1)}$, und die Grenzen dieser Summe geben

$$\Sigma v_x = \frac{1}{a-1}\quad, \text{ wenn } a > 1,$$

$$\Sigma v_x = \infty\quad, \text{ wenn } a \overline{\overline{<}} 1.$$

Ist somit, wenn das Grenzzeichen Kürze halber weggelassen wird:

$$u_k = \frac{1}{a^k} \text{ oder}$$

7) $$\frac{-\,l\,.\,u_k}{k} = la, \text{ so ist,}$$

Conv.	Div.
wenn $a > 1$	$a \leqq 1$.

Es kann nun der Fall eintreten, dass a nicht entschieden > 1, sondern nur unendlich wenig von 1 verschieden ist, und dann bleibt die Convergenz unentschieden. Es sei für diesen Fall $a = 1 + \frac{\alpha}{k}$, wo α positiv ist, so wird

$$a^k = \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right)^k = e^\alpha;$$

damit diess unendlich werde, muss α mit k in's Unendliche wachsen, so aber doch immer

$$\left(1 + \frac{\alpha}{k}\right)^k < e^k,$$

da der Fall, wo diess $\geqq e^k$ ist, schon behandelt wurde. Es sei z. B. $\alpha = \varepsilon x^\beta$, wo $\beta < 1$ und ε beliebig endlich, so wird

$$a^k = \left(1 + \frac{\varepsilon}{k^{1-\beta}}\right)^k = b^{k^\beta} \qquad (b = e^\varepsilon);$$

hier kann nun mit Hülfe der Beziehung 5) der Exponent von k ganz gemacht, und die Convergenz der Reihe nach 7) beurtheilt werden, wobei man findet, dass

$\Sigma \dfrac{1}{b^{k^\beta}}$ convergirt oder divergirt, je nachdem resp. $b > 1$ oder $\leqq 1$ ist, so dass nun die Convergenzregel 7) allgemein so ausgesprochen werden kann:

Die Reihe Σu_x convergirt, wenn bei der Annahme

$$8) \qquad \frac{-1 . u_k}{k^\beta} = \varepsilon,$$

es einen positiven Werth von $\beta > 0$ gibt, der $\varepsilon > 0$ macht; im entgegengesetzten Fall divergirt sie.

Man könnte nun neuerdings für den unentschiedenen Fall, wenn ε nur unendlich wenig > 0 ist, $\varepsilon = 1 + \frac{\varepsilon^1}{k^{1-\gamma}}$ ($\gamma < 1$) setzen, erhielte aber kein Resultat, das nicht schon in 8) enthalten wäre. Dagegen wird die Beantwortung der Frage, ob noch Convergenz sei, wenn es keinen endlichen, wohl aber einen unendlich kleinen Werth von β gibt, der $\varepsilon > 0$ macht, zu neuen Criterien führen. Damit Convergenz sei, muss k^β jedenfalls noch unendlich wachsen. Man kann setzen:

$$k^\beta = (lk)^\gamma, \quad \text{also} \quad \alpha = \varepsilon\,(lk)^\gamma,$$

$$a^k = \left\{1 + \frac{\varepsilon\,(lk)^\gamma}{k}\right\}^k = e^{\varepsilon\,(lk)^\gamma}.$$

Die Reihe $\Sigma\, v_x$ ist dann $\Sigma \frac{1}{\varepsilon\,(lx)^\gamma}$, die wegen 4) simultan mit $\Sigma \frac{1}{\varepsilon x^\gamma - x}$ convergiren. Zur Convergenz dieser letztern Reihe wird erfordert, dass $\gamma \geqq 1$ ist, und dann ist wegen 8)

Convergenz.	Div.
für $\gamma > 1$, wenn $\varepsilon > 0$	$\varepsilon \leqq 0$,
„ $\gamma = 1$, „ $\varepsilon > 1$	$\varepsilon \leqq 1$.

Setzt man also $u_k = v_k$, und bedenkt, dass die Bedingung für $\gamma > 1$ aus der Bedingung für $\gamma = 1$ erhältlich ist, so hat man folgenden zweiten Convergenzsatz: Die Reihe Σu_x convergirt, wenn bei der Annahme

$$9) \qquad \frac{-\,l u_k}{l_k} = \varepsilon,$$

$\varepsilon > 1$ ist; im entgegengesetzten Falle divergirt sie.

Ist ε von 1 unendlich wenig verschieden, so setze man, in gleicher Weise, wie vorhin, $1 + \frac{\varepsilon\, ll_k}{l_k}$ für ε, wo abkürzend ll_k für log. (log. k) gebraucht wurde. Dann wird

$$\Sigma\, v_x = \Sigma \frac{1}{e^{lx + \varepsilon llx}},$$

die mit $\Sigma \frac{1}{e^{\varepsilon lx}}$ und mit $\Sigma \frac{1}{e^{(\varepsilon - 1)x}}$ convergirt (wegen 4), wofür die Convergenzbedingungen die gleichen sind, wie vorhin. Macht man den Uebergang von v_k zu u_k, so ist die Reihe Σu_x convergent, wenn bei der Annahme

10) $$\frac{-\mathrm{l}.(k u_k)}{\mathrm{ll}_k} = \varepsilon,$$

$\varepsilon > 1$ ist, im entgegengesetzten Fall divergirt sie.

Ist wieder ε von 1 unendlich wenig verschieden, so setze man $1 + \frac{\varepsilon \mathrm{lll}_k}{\mathrm{ll}_k}$ für ε, so wird man in gleicher Weise finden, dass die Reihe convergirt, wenn

11) $$\frac{-\mathrm{l}.(k\mathrm{l}k\, u_k)}{\mathrm{lll}k} = \varepsilon > 1,$$

und so wird fortgefahren. Bezeichnet man abkürzend

$\mathrm{ll}x$ mit $\mathrm{l}_2 x$, $\mathrm{lll}x$ mit $\mathrm{l}_3 x$ u. s. w.,

so wird also allgemein folgender Satz gelten:

Die Reihe Σu_x convergirt, wenn bei der Annahme

12) $$\frac{-\mathrm{l}(k\mathrm{l}k\mathrm{l}_2 k \ldots\ldots \mathrm{l}_\mu k . u_k)}{\mathrm{l}_{\mu+2} k} = \varepsilon,$$

$\varepsilon > 1$ ist; im entgegengesetzten Fall divergirt sie. Dieses ist der Bertrand'sche Satz. Der Morgan'sche ist daraus herstellbar, wie folgt:

Es ist $\frac{1}{u_k} = k\mathrm{l}k\mathrm{l}_2 k \ldots\ldots \mathrm{l}_\mu k(\mathrm{l}_{\mu+1} k)^\varepsilon$, also

$$\frac{u_k}{u_{k+1}} = \frac{k+1}{k} \cdot \frac{\mathrm{l}(k+1)}{\mathrm{l}k} \cdot \frac{\mathrm{l}_2(k+1)}{\mathrm{l}_2 k} \ldots\ldots \frac{\mathrm{l}_\mu(k+1)}{\mathrm{l}_\mu k}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k},$$

$$\frac{\mathrm{l}(k+1)}{\mathrm{l}k} = 1 + \frac{1}{k\mathrm{l}k},$$

$$\frac{\mathrm{l}_2(k+1)}{\mathrm{l}_2 k} = 1 + \frac{1}{k\mathrm{l}k\mathrm{l}_2 k}$$ u. s. w., also

$$\frac{u_k}{u_{k+1}} = \left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k\mathrm{l}k}\right)\left(1+\frac{1}{k\mathrm{l}k\mathrm{l}_2 k}\right)\ldots.$$

oder mit Weglassung der höhern Potenzen:

$$13)\quad \frac{u_k}{u_{k+1}} = 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\,l\,k} + \ldots \frac{1}{k\,l\,k\,l_2\,k \ldots l_\mu k} + \frac{\varepsilon}{k\,l\,k\,l_2\,k \ldots l_{\mu+1} k},$$

welchem Satz noch die mannigfachsten Formen gegeben werden können. Die Convergenzbedingung bleibt immer, dass $\varepsilon > 1$.

III.

Es sei f(x) eine vom endlichen Argument α an in's Unendliche abnehmende Funktion, so geht aus der Bedeutung eines bestimmten Integrals als Summe sogleich hervor, dass

$$14)\quad \int_\alpha^\infty f(x)\,dx \quad \text{mit} \quad \Sigma\, f(x)$$

simultan convergent und divergent ist. Für die Convergenz eines solchen einfach unendlichen Integrals gelten daher die nämlichen im vorigen Abschnitt entwickelten Criterien, indem man $u_x = f(x)$ setzt. Ist das Integral dagegen nach beiden Seiten hin unendlich, d. h. ist

$$15)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

vorgelegt, so wird man $u_x = f(x) + f(-x)$ setzen. Ist ein Integral

$$16)\quad \int_A^B f(x)\,dx$$

mit endlichen Grenzen zu untersuchen, das für einen Werth a von x einen unendlichen Werth von f(a) darbietet, so bringt man dasselbe erst auf unendliche Grenzen, und findet dann, dass in den Convergenzsätzen

$$u_x = \frac{1}{x^2} f\left(a \pm \frac{1}{x}\right)$$

zu substituiren ist, wenn a resp. die untere oder obere Grenze des Integrals 16) selbst ist; dagegen

$$u_x = \frac{1}{x^2} \left\{ f\left(a + \frac{1}{x}\right) + f\left(a - \frac{1}{x}\right) \right\},$$

wenn a innerhalb der Integrationsgrenzen liegt. Wenn die Funktion $f(x)$ für mehrere Werthe a_1, a_2, a_3, ... von x innerhalb der Integrationsgrenzen A und B, sowie für diese selbst unendlich ist, so wird

$$17)\ u_x = \frac{1}{x^2} \left\{ f\left(A + \frac{1}{x}\right) + f\left(a_1 + \frac{1}{x}\right) + f\left(a_2 + \frac{1}{x}\right) + \ldots\ldots \right.$$

$$\left. + f\left(a_1 - \frac{1}{x}\right) + f\left(a_2 - \frac{1}{x}\right) + \ldots\ldots f\left(B - \frac{1}{x}\right) \right\};$$

zu substituiren sein.

IV.

Es sei $t(x)$ eine stetige Funktion von x, die sich mit wachsendem x einem endlichen Werthe nähert, der Nullwerth inbegriffen, so ist

$$\int_{\alpha}^{k} u_x\, dx = \int_{\alpha}^{k} \frac{\partial t(x)}{\partial x}\, dx = t(k) - t(\alpha)$$

immer endlich, also auch

$$\Sigma u_x = \Sigma \frac{\partial t(x)}{\partial x}$$

immer convergent. Ist aber $t(k)$ nicht endlich, so wird auch die Summe divergiren.

Insbesondere sei

$$t(x) = \frac{-1}{(\varepsilon - 1) w^{\varepsilon - 1}},$$

wo w eine Funktion von x bezeichnet, die mit wachsendem x ebenfalls in's Unendliche wächst, so würden

$$\int_\alpha^k u_x \, dx \quad \text{und} \quad \Sigma u_x = \Sigma \frac{1}{w^\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial x}$$

immer convergiren, wenn $\varepsilon > 1$, dagegen divergiren, wenn $\varepsilon \leqq 1$; denn für $\varepsilon = 1$ ist

$$\int_\alpha^k u_x \, dx = \int_\alpha^k \frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial x} = l w_k - l w_\alpha$$

unendlich. Setzt man $w = l_\mu x$, so wird

18) $$\Sigma u_x = \Sigma \frac{1}{x\, l x\, l_2 x \ldots\ldots l_{\mu-1} x (l_\mu x)^\varepsilon},$$

	convergiren,	divergiren,
wenn	$\varepsilon > 1$	$\varepsilon \leqq 1.$

woraus die Convergenzsätze in Abschnitt II sofort hervorgehen.

Von den mehrfachen Reihen gelten die nämlichen im Eingang von Abschnitt II für die einfachen Reihen aufgestellten Reductionssätze. Mit Bezug darauf seien

19) $\Sigma\Sigma u_{x,y}$ und 20) $\Sigma\Sigma v_{x,y}$

zwei reduzirte Doppelreihen, so wird die Reihe 20) gleichzeitig mit $\int^k \int^{k'} v \, dx \, dy$ convergiren und divergiren, wobei k und k′ sich resp. auf das unendliche Wachsen von x und y beziehen. Die Reihe 19) wird alsdann gleichzeitig mit 20) convergiren, wenn

20) $$\text{Lim. } u \leqq \text{Lim. } v,$$
dagegen gleichzeitig divergiren, wenn

21) $$\text{Lim. } w > \text{Lim } v.$$

Es sei nun w eine in's Unendliche wachsende Funktion von x und y, und

22) $$v = \frac{\varepsilon}{w^{\varepsilon+1}} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{w^{\varepsilon}} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

so ist
$$\int^{k}\int^{k'} v\, dx\, dy = \frac{1}{(\varepsilon-1) w^{\varepsilon-1}},$$
wo in w, x und y resp. durch k und k' zu ersetzen sind. Der Werth dieses Integrals ist endlich, wenn $\varepsilon > 1$, d. h. die Reihe $\Sigma \Sigma v$, wo v den in 22) angegebenen Werth hat, ist

23)	convergent,	divergent,
wenn	$\varepsilon > 1$,	$\varepsilon \leqq 1$,

das erstere unter der Voraussetzung, dass keine der Partialreihen

$$\Sigma v_{x,q} \quad \text{und} \quad \Sigma v_{p,y} \quad \text{divergirt,}$$

wobei p und q beziehungsweise constante Werthe von x und y sind.

Insbesondere sei jetzt $w = l_{\mu+1} x \,.\, l_{\mu-1} y$, so wird, reduzirt,

24) $$\frac{1}{v} = x\, l x\, l_2 x \ldots\ldots l_\mu x\, (l_{\mu+1} x)^{\varepsilon} \,. \\ y\, l y\, l_2 y \ldots\ldots l_\mu y\, (l_{\mu+1} y)^{\varepsilon},$$

also
$$\frac{-l\{x\, l x \ldots\ldots l_\mu x \,.\, y\, l y \ldots\ldots l_\mu y \,.\, v\}}{l_{\mu+2} x + l_{\mu+2} y} = \varepsilon,$$

und es ist daher die Reihe $\Sigma \Sigma v$ mit dem in 24) angegebenen Werth von v,

	convergent,	divergent,
wenn	$\varepsilon > 1$,	$\varepsilon \leqq 1$.

Man wird nach einer kurzen Betrachtung mit Hülfe von 20) und 21) finden, dass die gleiche Convergenz- und Divergenzbedingung auch bezüglich der Reihe $\Sigma\Sigma u$ gelten wird, sobald auf die unendlichen Grenzen von x und y übergegangen wird.

Ist also die Doppelreihe $\Sigma\Sigma u_{x,y}$ vorgelegt, so setze man

$$25)\qquad \frac{-\,l\{kk'lklk'\ldots\ldots l_\mu k\, l_\mu k'\,.\,u_{k,k'}\}}{l_{\mu+2}k+l_{\mu+2}k'}=\varepsilon,$$

und dann ist

	Convergenz,	Divergenz,
wenn	$\varepsilon > 1,$	$\varepsilon < 1,$

ersteres unter der Voraussetzung, dass keine der Reihen

$$\Sigma u_{x,q} \quad \text{und} \quad \Sigma u_{p,y}$$

divergirt. Man wird bei $\mu = -1$ anfangen, und nach und nach, wenn $\varepsilon = 1$ ist, die Werthe $\mu = 0, 1, 2, \ldots.$ setzen, bis einmal ε entschieden > 1 oder < 1 wird. Diesem Satz kann eine bequemere Form gegeben werden. Setzt man nämlich $k' = mk$, wo m eine beliebige positive Zahl vorstellt, so geht 25) über in

$$\frac{-\,l\{klk\ldots\ldots l_\mu k\,.\,\sqrt{u_{k,mk}}\}}{l_{\mu+2}k}=\varepsilon,$$

Vergleicht man diess mit 12), so erhält man den Satz:

Die Doppelreihe $\Sigma\Sigma u_{x,y}$ convergirt, wenn die einfachen Reihen

$$\Sigma u_{p,y} \quad , \quad \Sigma u_{x,q} \quad , \quad \Sigma\sqrt{u_{x,mx}}$$

sämmtlich convergiren; im entgegengesetzten Fall divergirt sie.

In ähnlicher Weise wird bei dreifachen Reihen verfahren. Der Convergenzsatz heisst:

Die dreifache Reihe $\Sigma\Sigma\Sigma u_{x,y,z}$ convergirt, wenn die Doppelreihen

$$\Sigma\Sigma u_{x,y,r}\ ,\quad \Sigma\Sigma u_{x,q,z}\ ,\quad \Sigma\Sigma_{p,y,z}\ ,$$

und die einfache

$$\Sigma \sqrt[3]{u_{x,\,mx,\,nx}}$$

sämmtlich convergiren; im entgegengesetzten Fall divergirt sie.

Ich halte es für unnöthig, die entsprechenden Sätze für die Convergenz von mehr als dreifachen Reihen, so wie von mehrfachen bestimmten Integralen aufzustellen, da dieselben aus den obigen Entwicklungen ohne grosse Mühe erhalten werden können.

Brändli; Erzeugung der Cardioide aus zwei ungleichen Kreisen.

1) Gegeben zwei Kreise, deren Centra F und G und deren Halbmesser $DF = a$; $DG = b$, und die einander schneiden in den Punkten D und P; durch den einen Durchschnittspunkt D unendlich viele, beiden Kreisen gemeinsame Sehnen, wie $ADB = S$, an den Peripheriepunkten A und B derselben Tangenten an jeden betreffenden Kreis, nämlich AC an den Kreis F, und BC an den Kreis G: zu suchen den Ort C des Treffpunktes der beiden Tangenten.