Ueber einige unendliche Reihen

Nr. 419 und 420.

(NB. Auf pag. 57 lese man Nr. 415 und 416, statt blos Nr. 415).

Hermann Kinkelin.

Ueber einige unendliche Reihen.

(Vorgetragen den 6. November 1858.)

I.

Bekanntlich convergirt die Reihe

$$1) \qquad \frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots \text{in inf.},$$

wo s eine positive Zahl bedeutet, nur dann, wenn $s>1$ ist; sonst aber ist sie divergent. Man kann sich nun die Aufgabe stellen, ihren Grenzwerth anzugeben für $s \overline{\gtrless} 1$, wenn sie blos bis zu einem gewissen Glied $\frac{1}{k^s}$, wobei k in's Unendliche wachsend gedacht ist, fortgeführt wird. Um zu diesem Ziele zu gelangen, diene die Formel für die angenäherte Berechnung bestimmter Integrale (Raabe Integralrechnung Bd. I. Nr. 233).

$$\int_a^b \varphi(x)dx = v\left\{\frac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+v)+\ldots\ldots\varphi(a+(n-1)v)+\frac{1}{2}\varphi(b)\right\}$$
$$-Y_2\{\varphi_1(b)-\varphi_1(a)\}v^2+Y_4\{\varphi_3(b)-\varphi_3(a)\}v^4$$
$$-\ldots\ldots$$
$$+(-1)^m Y_{2m}\{\varphi_{2m-1}(b)-\varphi_{2m-1}(a)\}v^{2m},$$

welche gilt, wenn der 2mte Differenzialquotient $\varphi_{2m}(x)$ der Funktion $\varphi(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ beständig mit dem gleichen Vorzeichen behaftet ist; v ist ein beliebiges positives Increment. Der Fehler, der hiebei auf der rechten Seite begangen wird, ist kleiner, als das letzte Glied der Entwicklung. $Y_2, Y_3, \cdots Y_{2m}$ sind bestimmte konstante Grössen.

Setzt man hierin $\varphi(x) = \frac{1}{x^s}$, so erhält man:

$$\int_1^k \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{2.1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{2.k^s}$$

$$+ Y_2 s\left(\frac{1}{k^{s+1}} - 1\right) - Y_4 s(s+1)(s+2)\left(\frac{1}{k^{s+3}} - 1\right)$$

$$+ Y_6 s(s+1)\cdots(s+4)\left(\frac{1}{k^{s+5}} - 1\right) - Y_8 s(s+1)\cdots$$

$$(s+6)\left(\frac{1}{k^{s+7}} - 1\right),$$

wobei der Fehler kleiner ist als das letzte Glied, und

$$Y_2 = 0{,}083\ 3333\ ,\ Y_4 = 0{,}001\ 3889\ ,\ Y_6 = 0{,}0000331\ ,$$
$$Y_8 = 0{,}0000008\ .$$

Hieraus, wenn man die Integration ausführt und k in's Unendliche wachsen lässt

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{k^s} = \frac{k^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s} + \frac{1}{2} + s Y_2$$

$$- s(s+1)(s+2) Y_4 + s(s+1)\cdots(s+4) Y_6 - s(s+1)\cdots(s+6) Y_8,$$

wenn s von 1 verschieden, und

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} = \lg k + \frac{1}{2} + Y_2 - 6 Y_4 + 120 Y_6 - 4320 Y_8,$$

wenn $s = 1$ ist. In beiden Entwicklungen sind die Fehler jeweilen kleiner als das letzte Glied auf der rechten Seite.

Setzt man der Kürze wegen

$$2)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2} - \frac{1}{1-s} + s Y_2 - s(s+1)(s+2) Y_4 + \cdots & = c_s\ , \\ \frac{1}{2} + Y_2 - 6 Y_4 + \cdots & = c\ , \end{array} \right.$$

so kommt endlich

$$3)\ A.\quad \left\{\begin{array}{l} 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots\cdots\frac{1}{k^s}=\frac{k^{1-s}}{1-s}+c_s \\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots\frac{1}{k}=\lg k+c \end{array}\right.$$

Der numerische Werth von c_s kann für ein gegebenes s aus den Gleichungen 2) bis auf 3 Dezimalstellen genau bestimmt werden, wenn $s<1$. Ist $s>1$, so convergirt die Reihe links, das Glied $\frac{k^{1-s}}{1-s}$ verschwindet, c_s ist alsdann direkt bestimmbar und soll mit S_s bezeichnet werden.

II.

In allen Fällen kann c_s auf folgende Weise mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden. Es ist

$$1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\cdots\cdots\frac{1}{(2k+1)^s}=$$

$$1+\frac{1}{2^s}\left\{\frac{1}{1^s\left(1+\frac{1}{1.2}\right)^s}+\frac{1}{2^s\left(1+\frac{1}{2.2}\right)^s}+\cdots\cdots\frac{1}{k^s\left(1+\frac{1}{k.2}\right)^s}\right\}$$

Entwickelt man die Nenner nach dem binomischen Satz und ordnet die Glieder nach den Binomialcoefficienten, so ergiebt sich

$$1+\frac{1}{2^s}\left\{\sum_{r=1}^{r=k}\frac{1}{r^s}-\binom{s}{1}\frac{1}{2}S_{s+1}+\binom{s+1}{2}\frac{1}{2^2}S_{s+2}+\right.$$
$$\left.\binom{s+2}{3}\frac{1}{2^3}S_{s+3}+\cdots\right\}$$

oder, wenn die ersten Glieder in den S besonders genommen werden, und mit Zuziehung von 3)

$$1+\frac{1}{2^s}\left\{\frac{k^{1-s}}{1-s}+c_s-\binom{s}{1}\frac{1}{2}+\binom{s+1}{2}\frac{1}{2^2}-\binom{s+2}{3}\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\Sigma\right\}$$

oder endlich, wenn nun Σ vollständig geschrieben wird,

$$4)\qquad 1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\cdots\frac{1}{(2k+1)^s}=$$

$$=1+\frac{1}{2^s}\left\{\frac{k^{1-s}}{1-s}+c_s-1+\frac{2^s}{3^s}+\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{(-1)^r}{2^r}\binom{s+r-1}{r}(S_{s+r}-1)\right\}$$

worin die Σ sehr rasch convergirt. Ferner aus 3) durch Multiplication mit $\frac{1}{2^s}$:

$$5)\qquad \frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots\frac{1}{(2k)^s}=\frac{1}{2^s}\left\{\frac{k^{1-s}}{1-s}+c_s\right\}$$

Addirt man diese zu 4), so kommt, da das Glied $\frac{1}{(2k+1)^s}$ als unendlich klein weggelassen werden darf

$$1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots\frac{1}{(2k)^s}=1+\frac{1}{2^s}\left\{\frac{2k^{1-s}}{1-s}+2c_s-1+\frac{2^s}{3^s}+\Sigma\right\}$$

aber wegen 3) ist dieses auch gleich $\frac{2k^{1-s}}{2^s(1-s)}+c_s$

und sonach durch Vergleichung dieser beiden Werthe,

$$6)\qquad (2^s-2)c_s=2^s-1+\frac{2^s}{3^s}+\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{(-1)^r}{2^r}\binom{s+r-1}{r}(S_{s+r}-1)$$

Ist $s>1$, so ist für c_s einfach S_s zu setzen und dann kann diese Gleichung dazu dienen, solche S_s zu rechnen, deren unmittelbarer Ausdruck nur sehr langsam convergirt; so wenn $s<3$ ist.

Multiplicirt man aber 5) mit 2 und subtrahirt sie von der folgenden, die sich aus 3) ergiebt, wenn $2k$ für k gesetzt wird:

$$1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots\frac{1}{(2k)^s}=\frac{2k^{1-s}}{2^s(1-s)}+c_s\,,$$

so erhält man

$$1-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\cdots\frac{1}{(2k-1)^s}=c-\frac{2c_s}{2^s}$$

oder, da die Reihe links convergirt,

$$7)\ \text{B.}\qquad 1-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\frac{1}{4^s}+\cdots=(1-2^{1-s})c_s$$

Aus dieser Bestimmung ist weiter ersichtlich, dass die c_s, wenn $s < 1$, alle negativ sind, was daraus erhellt, dass die Reihe links positiv, dagegen $1-2^{1-s}$ negativ ist.

Addirt man endlich 7) zu 5), so ergiebt sich, wenn das unendlich kleine Glied $\frac{1}{(2k)^s}$ weggelassen wird,

$$8)\quad 1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\cdots\frac{1}{(2k-1)^s}=\frac{k^{1-s}}{2^s(1-s)}+\frac{2^s-1}{2^s}c_s$$

III.

Fassen wir den Gegenstand von allgemeinerm Standpunkt auf, so lassen sich alle Reihen von der Form

$$\frac{1}{\lambda^s}\pm\frac{1}{(p+\lambda)^s}+\frac{1}{(2p+\lambda)^s}\pm\frac{1}{(3p+\lambda)^s}+\cdots\pm\frac{1}{(2kp+p+\lambda)^s}$$

summiren, wobei p und λ beliebige ganze positive Zahlen sind. Es erhellt nämlich aus der Kontinuität der Funktion

$$9)\ C.\quad \sigma(x,s)=\frac{k^{1-s}}{1-s}+c_s-\left\{\frac{1}{x^s}+\frac{1}{(x+1)^s}+\cdots\frac{1}{(x+k)^s}\right\}$$

oder entwickelt

$$\sigma(x,s)=\binom{s}{1}x(S_{s+1}-1)-\binom{s+1}{2}x^2(S_{s+2}-1)+$$
$$\binom{s+2}{3}x^3(S_{s+3}-1)-\cdots+1-\frac{1}{x^s}-\frac{1}{(1-x)^s}\ ,\ x<1\,,$$

die für ganze Werthe von x vermöge der Gleichung 3) folgende Form annimmt

$$10)\ D.\quad \sigma(x,s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots\frac{1}{(x-1)^s}$$

und somit endlich ist, dass $\sigma(x,s)$ für jeden Werth von x, der von o verschieden ist, immer eine endliche Grösse bleibt und von k unabhängig ist. Diese Funktion geht ferner die Relation ein

11) E. $$\sigma(x+1,s)=\frac{1}{x^s}+\sigma(x,s)$$

12) F. $\sigma(2,s)=1$, $\sigma(1,s)=0$, $\sigma(0,s)=-\infty$

Setzt man in 9) $x=\frac{\lambda}{p}$, so kommt

13) $$\frac{1}{\lambda^s}+\frac{1}{(p+\lambda)^s}+\frac{1}{(2p+\lambda)^s}+\cdots\frac{1}{(kp+\lambda)^s}=$$
$$\frac{1}{p^s}\left\{\frac{k^{1-s}}{1-s}+c_s-\sigma\left(\frac{\lambda}{p},s\right)\right\}$$

Lässt man hier k in 2k übergehen, so wird, wenn noch $\frac{1}{(2kp+p+\lambda)^s}$ addirt wird

$$\frac{1}{\lambda^s}+\frac{1}{(p+\lambda)^s}+\frac{1}{(2p+\lambda)^s}+\cdots\frac{1}{(2kp+p+\lambda)^s}=$$
$$\frac{1}{p^s}\left\{\frac{(2k)^{1-s}}{1-s}+c_s-\sigma\left(\frac{\lambda}{p},s\right)\right\};$$

Lässt man in 13) p in 2p übergehen, so ist:

14) $$\frac{1}{\lambda^s}+\frac{1}{(2p+\lambda)^s}+\frac{1}{(4p+\lambda)^s}+\cdots\frac{1}{(2kp+\lambda)^s}=$$
$$\frac{1}{(2p)^s}\left\{\frac{k^{1-s}}{1-s}+c_s-\sigma\left(\frac{\lambda}{2p},s\right)\right\}$$

Wird diese Gleichung von der vorigen subtrahirt, so erhält man

15) $$\frac{1}{(p+\lambda)^s}+\frac{1}{(3p+\lambda)^s}+\cdots\frac{1}{(2kp+p+\lambda)^s}=$$
$$\frac{1}{(2p)^s}\left\{\frac{k^{1-s}}{1-s}+(2^s-1)c_s-2^s\sigma\left(\frac{\lambda}{p},s\right)+\sigma\left(\frac{\lambda}{2p},s\right)\right\}$$

und endlich durch Subtraction von 15) von 14)

16) $$\frac{1}{\lambda^s}-\frac{1}{(p+\lambda)^s}+\frac{1}{(2p+\lambda)^s}-\cdots=$$
$$\frac{1}{(2p)^s}\left\{(2-2^s)c_s+2^s\sigma\left(\frac{\lambda}{p},s\right)-2\sigma\left(\frac{\lambda}{2p},s\right)\right\}$$

wobei zu bemerken ist, dass wegen der Convergenz dieser Reihe die Fortsetzung derselben so weit man will, geschehen kann.

Aus der letzt hergeleiteten Gleichung ergiebt sich unter anderm für $\lambda = 1$, $p = 1$:

$$19)\quad 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots = \frac{1}{2^s}\left\{(2-2^s)c_s - 2\sigma\left(\frac{1}{2}, s\right)\right\},$$

woraus durch Vergleichung mit 7) die Bestimmung

$$20)\ \mathrm{G.}\qquad (2-2^s) = \sigma\left(\frac{1}{2}, s\right)$$

erhalten wird.

Für $p = 2$, $\lambda = 1$ ergeben sich resp. aus 14), 15) und 16) die Bestimmungen

$$21)\quad 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{9^s} + \cdots \frac{1}{(4k+1)^s} = \frac{1}{4^s}\left\{\frac{k^{1-s}}{1-s} + c_s - \sigma\left(\frac{1}{4}, s\right)\right\}$$

$$22)\quad \frac{1}{3^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \cdots \frac{1}{(4k+3)^s} =$$

$$\frac{1}{4^s}\left\{\frac{k^{1-s}}{1-s} + (2^{2s} - 2^s - 1)c_s + \sigma\left(\frac{1}{4}, s\right)\right\}$$

$$23)\quad 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \cdots =$$

$$\frac{1}{4^s}\left\{(2 + 2^s - 4^s)c_s - 2\sigma\left(\frac{1}{4}, s\right)\right\}$$

für $p = 2$, $\lambda = 3$ ist aus 14)

$$24)\quad \frac{1}{3^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \cdots \frac{1}{(4k+3)^s} =$$

$$\frac{1}{4^s}\left\{\frac{k^{1-s}}{1-s} + c_s - \sigma\left(\frac{3}{4}, s\right)\right\}$$

Diese mit 22) verglichen, giebt die Bestimmung

$$25)\ \mathrm{H.}\quad \sigma\left(\frac{1}{4}, s\right) + \sigma\left(\frac{3}{4}, s\right) = (2 + 2^s - 4^s)c_s,$$

die in 23) substituirt, noch folgende giebt

$$26)\ \mathrm{I.}\qquad 1-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}+\cdots=\frac{1}{4^s}\left\{\sigma\left(\frac{3}{4},s\right)-\sigma\left(\frac{1}{4},s\right)\right\}$$

von der in der Nummer V. eine Verallgemeinerung mitgetheilt werden soll.

Auch die Gleichung 25) kann allgemeiner ausgedrückt werden. Werden nämlich in 9) für x nach und nach die Grössen $x,\ x+\frac{1}{n},\ x+\frac{2}{n},\cdots\ x+\frac{n-1}{n}$ substituirt, und alle resultirenden Gleichungen addirt, so kommt, wobei n eine ganze positive Zahl bedeutet:

$$\sum_{r=0}^{r=n-1}\sigma\left(x+\frac{r}{n},s\right)=n\left(\frac{k^{1-s}}{1-s}+c_s\right)-\left\{\frac{1}{x^s}+\frac{1}{\left(x+\frac{1}{n}\right)^s}+\cdots\right.$$

$$\left.\frac{1}{\left(x+k+\frac{n-1}{n}\right)^s}\right\}=n\left(\frac{k^{1-s}}{1-s}+c_s\right)-n^s\left\{\frac{1}{(nx)^s}+\frac{1}{(nx+1)^s}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(nx+nk+n-1)^s}\right\}$$

Setzt man aber in 9) nx für x und nk für k, so ist leicht zu sehen, dass die vorige Bestimmnng in folgende übergeht

$$\sigma(x,s)+\sigma\left(x+\frac{1}{n},s\right)+\sigma\left(x+\frac{2}{n},s\right)+\cdots\sigma\left(x+\frac{n-1}{n},s\right)$$

$$27)\ \mathrm{K.}\qquad =n^s\sigma(nx,s)+(n-n^s)c_s$$

Diese Relation ist analog mit der bekannten für die Funktion $\lg\Gamma(x)$; in der That ist auch für ganze Werthe von s, $\sigma(x,s)$ fast identisch mit $\frac{d^s\lg\Gamma(x)}{dx^s}$

IV.

Das Vorhergehende bezog sich auf beliebige positive Werthe der Grösse s. Im Folgenden sollen noch einige Sätze entwickelt werden, die nur für solche Werthe von s Geltung haben, welche kleiner als 1 sind. Sie sind ganz geeignet, die Fruchtbarkeit der hier gebrauchten Methoden in's Licht zu setzen.

Für jede Funktion f(x) besteht nach Fourier die Gleichung $f(x) = A + 2\sum_{r=1}^{r=\infty} A_r \operatorname{Cos} 2r\pi x + 2\sum_{r=1}^{r=\infty} B_r \operatorname{Sin} 2r\pi x$ für alle Werthe von x, die zwischen 0 und 1 liegen, wobei die Konstanten A, A_r, B_r folgenderweise bestimmt sind

$$A = \int_0^1 f(x)dx,\quad A_r = \int_0^1 f(x)\operatorname{Cos} 2r\pi x dx,\quad B_r = \int_0^1 f(x)\operatorname{Sin} 2r\pi x dx$$

Wenden wir diese auf die Funktion $\sigma(x, s)$ an, so ist vorerst

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+\sigma)^r} = \frac{(r+1)^{1-s} - r^{1-s}}{1-s}$$

und daher, wenn an 9) die Integration zwischen den Gränzen 0 und 1 vollzogen wird

$$28)\qquad \int_0^1 \sigma(x, s)\, dx = c_s\,;$$

ferner bestehen, wenn $s < 1$ die Integralbestimmungen

$$29)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin} 2r\pi x}{x^s} dx = \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s} r^{1-s}} \operatorname{Cos} \frac{s\pi}{2} \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{Cos} 2r\pi x}{x^s} dx = \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s} r^{1-s}} \operatorname{Sin} \frac{s\pi}{2} \end{cases}$$

und

$$\int_0^1 \operatorname{Sin} 2r\pi x\, dx = 0, \quad \int_0^1 \operatorname{Cos} 2r\pi x\, dx = 0.$$

Multiplicirt man daher die Gleichungen 9) mit $\operatorname{Sin} 2r\pi x dx$ uud integrirt von 0 bis 1, so kommt

$$\int_0^1 \sigma(x,s) \operatorname{Sin} 2r\pi x dx = -\sum_{\lambda=0}^{\lambda=k} \int_0^1 \frac{\operatorname{Sin} 2r\pi x}{(x+\lambda)^s} dx =$$

$$-\sum_{\lambda=0}^{\lambda=k} \int_\lambda^{\lambda+1} \frac{\operatorname{Sin} 2r\pi x}{x^s} dx = -\int_0^{k+1} \frac{\operatorname{Sin} 2r\pi x}{x^s} dx,$$

oder, da ∞ für $k+1$ gesetzt werden kann:

$$\left.\begin{aligned} &30)\ \text{L.} \quad \int_0^1 \sigma(x,s) \operatorname{Sin} 2r\pi x dx = -\frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s} r^{1-s}} \operatorname{Cos} \frac{s\pi}{2} \\ &\text{und ebenso} \\ &\int_0^1 \sigma(x,s) \operatorname{Cos} 2r\pi x dx = -\frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s} r^{1-s}} \operatorname{Sin} \frac{s\pi}{2} \end{aligned}\right\}$$

Substituirt man hierin $1-s$ für s, so kommt auch

$$31) \left\{\begin{aligned} &\int_0^1 \sigma(x, 1-s) \operatorname{Sin} 2r\pi x dx = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s r^s} \operatorname{Sin} \frac{s\pi}{2} \\ &\int_0^1 \sigma(x, 1-s) \operatorname{Cos} 2r\pi x dx = -\frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s r^s} \operatorname{Cos} \frac{s\pi}{2} \end{aligned}\right.$$

Multiplicirt man die Gleichungen 30) und 31) resp. mit einander, so ergeben sich mit Hülfe von

$$\Gamma(s).\ \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\operatorname{Sin} s\pi}$$

noch folgende Relationen

$$32) \quad \int_0^1 \sigma(x,s) \operatorname{Sin} 2r\pi x\, dx . \int_0^1 \sigma(x, 1-s) \operatorname{Sin} 2r\pi x\, dx = \frac{1}{4r}$$

$$\int_0^1 \sigma(x,s)\,\mathrm{Cos}\,2r\pi x\,dx \,.\, \int_0^1 \sigma(x,1-s)\,\mathrm{Cos}\,2r\pi x\,dx = \frac{1}{4r}$$

Nimmt man endlich in der Eingangs dieser Nr. angeführten Funktionsgleichung f (x) als σ (x, s) an und benützt die in 28) und 30) gefundenen Bestimmungen, so kommt

33) M. $\sigma(x,s) = c_s$

$$-\frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}}\mathrm{Sin}\frac{s\pi}{2}\left\{\frac{\mathrm{Cos}\,2\pi x}{1^{1-s}}+\frac{\mathrm{Cos}\,4\pi x}{2^{1-s}}+\frac{\mathrm{Cos}\,6\pi x}{3^{1-s}}+\cdots\right\}$$

$$-\frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}}\mathrm{Cos}\frac{s\pi}{2}\left\{\frac{\mathrm{Sin}\,2\pi x}{1^{1-s}}+\frac{\mathrm{Sin}\,4\pi x}{2^{1-s}}+\frac{\mathrm{Sin}\,6\pi x}{3^{1-s}}+\cdots\right\}$$

und durch Umsetzen von x in 1 — x

$\sigma(1-x,s) = c_s$

$$-\frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}}\mathrm{Sin}\frac{s\pi}{2}\left\{\frac{\mathrm{Cos}\,2\pi x}{1^{1-s}}+\frac{\mathrm{Cos}\,4\pi x}{2^{1-s}}+\frac{\mathrm{Cos}\,6\pi x}{3^{1-s}}+\cdots\right\}$$

$$+\frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}}\mathrm{Cos}\frac{s\pi}{2}\left\{\frac{\mathrm{Sin}\,2\pi x}{1^{1-s}}+\frac{\mathrm{Sin}\,4\pi x}{2^{1-s}}+\frac{\mathrm{Sin}\,6\pi x}{3^{1-s}}+\cdots\right\}$$

Diese mit 33) durch Addition und Subtraction verbunden, giebt

$$\frac{\mathrm{Cos}\,2\pi x}{1^{1-s}}+\frac{\mathrm{Cos}\,4\pi x}{2^{1-s}}+\cdots = -\frac{\sigma(x,s)+\sigma(1-x,s)-2c_s}{4\Gamma(1-s)\mathrm{Sin}\frac{s\pi}{2}}(2\pi)^{1-s}$$

34) $\Bigg\}$

$$\frac{\mathrm{Sin}\,2\pi x}{1^{1-s}}+\frac{\mathrm{Sin}\,4\pi x}{2^{1-s}}+\cdots = -\frac{\sigma(x,s)-\sigma(1-x,s)}{4\Gamma(1-s)\mathrm{Cos}\frac{s\pi}{2}}(2\pi)^{1-s}$$

In diesen Resultaten sind die Grössen x und s einzig an die Bedingung gebunden, dass sie zwischen 0 und 1 liegen, von diesen Grenzwerthen selbst aber, sowie von allen übrigen, ausgeschlossen sind.

Giebt man dem x den Werth $\frac{1}{2}$, so wird aus 33)

$$\sigma\left(\frac{1}{2},s\right)=c_s+\frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}}\operatorname{Sin}\frac{s\pi}{2}\left\{1-\frac{1}{2^{1-s}}+\frac{1}{3^{1-s}}-\frac{1}{4^{1-s}}+\ldots\right\}$$

oder mit Zuziehung von 7) und 20)

$$(2-2^s)c_s+\frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}}\operatorname{Sin}\frac{s\pi}{2}(1-2^s)c_{1-s}$$

oder

$$\frac{c_s}{c_{1-s}}=\frac{2\Gamma(1-s)\operatorname{Sin}\frac{s\pi}{2}}{(2\pi)^{1-s}}$$

oder auch

$$35)\qquad \frac{c_s}{c_{1-s}}=\frac{(2\pi)^s}{2\Gamma(s)\operatorname{Cos}\frac{s\pi}{2}},$$

oder mit Zuziehung von 7)

$$36)\ \text{N.}\qquad \frac{1-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\frac{1}{4^s}+\cdots}{1-\frac{1}{2^{1-s}}+\frac{1}{3^{1-s}}-\frac{1}{4^{1-s}}+\cdots}=\frac{2-2^s}{2^s-1}\cdot\frac{\pi^s}{2\Gamma(s)\operatorname{Cos}\frac{s\pi}{2}}$$

Eine andere ähnliche, schon von Schlömilch angegebene Relation kann aus 34) unter der Annahme, dass $x=\frac{1}{4}$, gewonnen werden. Es wird nämlich alsdann

$$1-\frac{1}{3^{1-s}}+\frac{1}{5^{1-s}}-\frac{1}{7^{1-s}}+\cdots=\frac{\sigma\left(\frac{3}{4},s\right)-\sigma\left(\frac{1}{4},s\right)}{4\Gamma(1-s)\operatorname{Cos}\frac{s\pi}{2}}(2\pi)^{1-s}$$

oder wegen 26), in der s in 1 — s umgesetzt ist

$$\frac{\sigma\left(\frac{3}{4}, 1-s\right)-\sigma\left(\frac{1}{4}, 1-s\right)}{2^{2-2s}}=$$

$$\frac{\sigma\left(\frac{3}{4}, s\right)-\sigma\left(\frac{1}{4}, s\right)(2\pi)^{1-s}}{4\Gamma(1-s)\operatorname{Cos}\frac{s\pi}{2}}$$

oder

$$37)\quad \frac{\sigma\left(\frac{3}{4}, s\right)-\sigma\left(\frac{1}{4}, s\right)}{\sigma\left(\frac{3}{4}, 1-s\right)-\sigma\left(\frac{1}{4}, 1-s\right)}=\frac{\pi^s}{2^{2-3s}\Gamma(s)\operatorname{Sin}\frac{s\pi}{2}}$$

oder wegen 26)

$$38)\ \mathrm{O.}\quad \frac{1-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}+\cdots}{1-\frac{1}{3^{1-s}}+\frac{1}{5^{1-s}}-\frac{1}{7^{1-s}}+\cdots}=\frac{\pi^s}{2^s\Gamma(s)\operatorname{Sin}\frac{s\pi}{2}}$$

Dividirt man endlich 36) durch 38), so kommt:

$$39)\ \mathrm{P.}\quad \operatorname{tg}\frac{s\pi}{2}=\frac{1}{2^{2s-1}}\frac{1-2^s}{1-2^{1-s}}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\cdots\right)}{\left(1-\frac{1}{2^{1-s}}+\frac{1}{3^{1-s}}-\cdots\right)}$$

$$\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{3^{1-s}}+\frac{1}{5^{1-s}}-\cdots\right)}{\left(1-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\cdots\right)},$$

eine merkwürdige Bestimmung für die Tangente.

V.

Die in Nr. III. angekündigte Verallgemeinerung von Gleichung 26) wird auf folgende Art erhalten. Aus Gleichung 34) ist

$$\sigma(x,s)-\sigma(1-x,s)=$$

$$-\frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)\operatorname{Sin}\frac{s\pi}{2}}\left\{\frac{\operatorname{Sin}2\pi x}{1^{1-s}}+\frac{\operatorname{Sin}4\pi x}{2^{1-s}}+\frac{\operatorname{Sin}6\pi x}{3^{1-s}}+\cdots\right\}$$

Lässt man hier x nach und nach folgende Werthe annehmen:

$$\frac{1}{2^s}, \frac{3}{2^n}, \frac{5}{2^n}, \ldots \frac{2^{n-1}-1}{2^n},$$

addirt dann alle geraden Gleichungen und subtrahirt alle ungeraden, und ordnet nach den Nummern, so kommt

$$\sigma\left(\frac{1}{2^n}, s\right) - \sigma\left(\frac{3}{2^n}, s\right) + \sigma\left(\frac{5}{2^n}, s\right) - \cdots + \sigma\left(\frac{2^n-3}{2^n}, s\right) -$$

$$\sigma\left(\frac{2^n-2}{2^n}, s\right) = -\frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)\operatorname{Sin}\frac{s\pi}{2}} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda^{1-s}} \left\{ \operatorname{Sin}\frac{\lambda\pi}{2^{n-1}} - \operatorname{Sin}\frac{3\lambda\pi}{2^{n-1}} \right.$$

$$\left. + \operatorname{Sin}\frac{5\lambda\pi}{2^{n-1}} - \cdots - \operatorname{Sin}\frac{(2^{n-1}-1)\lambda\pi}{2^{n-1}} \right\}$$

Die Summe der Reihe in der Klammer rechter Hand ist aber gleich

$$\frac{\operatorname{Sin}\lambda\pi}{2\operatorname{Cos}\frac{\lambda\pi}{2^{n-1}}};$$

Dieser Ausdruck ist Null für alle λ, ausgenommen, wenn λ von der Form $(2m+1)2^{n-1}$, für welche er die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, wenn m eine ganze positive Zahl vorstellt. Verfährt man in diesem Fall nach den bekannten Regeln der Differenzialrechnung, so findet sich dafür der Werth

$$\frac{2^{n-2}\operatorname{Cos}(2m+1)2^{n-2}\pi}{\operatorname{Sin}\frac{2m+1}{2}\pi} = (-1)^m 2^{n-2}$$

In der Summe rechter Hand verschwinden demnach alle Glieder, mit Ausnahme derjenigen, wo $\lambda = (2m+1)2^{n-2}$, oder also, wo λ gleich ist

$$1 \,.\, 2^{n-2},\ 3 \,.\, 2^{n-2},\ 5 \,.\, 2^{n-2}, \ldots\ldots,$$

und dieselbe geht über in

$$\frac{2^{n-2}}{(1.2^{n-2})^{1-s}}-\frac{2^{n-2}}{(3.2^{n-2})^{1-s}}+\frac{2^{n-2}}{(5.2^{n-2})^{1-s}}-\cdots$$

oder

$$2^{s(n-2)}\left\{1-\frac{1}{3^{1-s}}+\frac{1}{5^{1-s}}-\frac{1}{7^{1-s}}+\cdots\right\}$$

oder wegen 38)

$$\frac{2^{s(n-1)}}{\pi^s}\Gamma(s)\,\mathrm{Sin}\frac{s\pi}{2}\left\{1-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}+\cdots\right\},$$

so dass nun schliesslich

$$\sigma\left(\frac{1}{2^n},s\right)-\sigma\left(\frac{3}{2^n},s\right)+\cdots-\sigma\left(\frac{2^n-1}{2^n},s\right)=$$

40) Q. $$=-2^{ns}\left\{1-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}+\cdots\right\},$$

welches die angekündigte Relation ist.

Substituirt man in 27) $\frac{1}{2^n}$ für x und 2^n für n, so kommt wegen 12)

$$\sigma\left(\frac{1}{2^n},s\right)+\sigma\left(\frac{3}{2^n},s\right)+\cdots\cdots\sigma\left(\frac{2^n-1}{2^n},s\right)$$

$$+\sigma\left(\frac{1}{2^{n-1}},s\right)+\sigma\left(\frac{2}{2^{n-1}},s\right)+\cdots\cdots\sigma\left(\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}},s\right)$$

$$=(2^n-2^{ns})c_s$$

oder, da 27) bei der Annahme n—1 statt n,

$$\sigma\left(\frac{1}{2^{n-1}},s\right)+\sigma\left(\frac{2}{2^{n-1}},s\right)+\cdots\sigma\left(\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}},s\right)=$$

$$(2^{n-1}-2^{(n-1)s})c_s$$

gibt, so wird

41) $$\sigma\left(\frac{1}{2^n},s\right)+\sigma\left(\frac{3}{2^n},s\right)+\sigma\left(\frac{5}{2^n},s\right)+\cdots\cdot$$

$$+\sigma\left(\frac{2^n-1}{2^n},s\right)=(2^{n-1}+2^{(n-1)s}-2^{ns})c_s$$

und durch Addition dieser letztern mit 40)

$$\sigma\left(\frac{1}{2^n}, s\right) + \sigma\left(\frac{5}{2^n}, s\right) + \sigma\left(\frac{9}{2^n}, s\right) + \cdots\cdots \sigma\left(\frac{2^n-3}{2^n}, s\right) =$$

$$42) \qquad = -2^{ns-1}\left\{1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \cdots\cdots\right\} +$$

$$\frac{1}{2}(2^{n-1} + 2^{(n-1)s} - 2^{ns})\, c, .$$