Bestimmung der Elemente der erdmagnetischen Kraft in Bern

Nr. 430 — 434.

Bestimmung der Elemente der erdmagnetischen Kraft in Bern, von H. Wild und G. Sidler.

Vorgetragen den 4. November 1859.

Die magnetische Kraft der Erde ist, wie jede andere Kraft, für irgend einen Ort als vollständig besimmt zu betrachten, wenn ihre Richtung und Grösse gegeben ist. Die Richtung der erdmagnetischen Kraft pflegte man auf zwei, für jeden Ort genau bestimmbare feste Ebenen, nämlich den astronomischen Meridian und die Horizontalebene, zu beziehen und heisst Declination den Winkel, welchen eine Vertikalebene durch die Richtung der erdmagnetischen Kraft, der sogenannte magnetische Meridian, mit dem astronomischen Meridian einschliesst und Inclination den Neigungswinkel der Kraft gegen die Horizontalebene.

Diese 3 Elemente der erdmagnetischen Kraft für Bern, Declination, Inclination und Itensität, haben wir auf der Sternwarte und im physikalischen Cabinet mit Hülfe eines Lamont'schen magnetischen Theodolithen, der der Sternwarte angehört, und mittelst eines Inclinatoriums aus dem physikalischen Cabinet bestimmt. Da jede messende Beobachtung nur dann einen bleibenden Werth hat, wenn man sich zu jeder Zeit über die Genauigkeit der Untersuchungsmethode und über die Grösse der Beobachtungsfehler ein Urtheil verschaffen hann, so hielten wir es für nöthig, nicht bloss die Resultate unserer Messungen hier mitzutheilen, sondern auch von den dabei befolgten Methoden und der Leistungsfähigkeit unserer Apparate zu sprechen.

1. Declination.

Wenn man einen Magnetstab so aufhängt, dass er um eine vertikale Axe leicht drehbar ist, so kommt er stets, falls keine andere Kraft als der Erdmagnetismus auf ihn einwirkt, in einer solchen Lage zur Ruhe, in welcher seine sogenannte magnetische Axe dem magnetischen Meridian durch die Drehungsaxe parallel ist. Wir brauchen also bloss die Richtung der magnetischen Axe in einem solchen Stabe zu ermitteln, um dann sofort auch den magnetischen Meridian d. i. das eine Bestimmungselement der Declination finden zu können. Die magnetische Axe eines Magnetstabes ist nun von vorneherein nicht bekannt; vermöge ihrer obigen Eigenschaft können wir sie aber leicht finden, wenn wir 2 Beobachtungen über den Stand irgend einer markirten Linie am Magnetstabe anstellen, zwischen welchen derselbe um seine Längsaxe um 180° umgedreht worden ist. Das Mittel aus den beiden Ablesungen (etwa an einer mit der Drehungsaxe concentrischen Kreistheilung) gibt uns die Richtung der magnetischen Axe des Stabes und folglich auch unmittelbar den magnetischen Meridian.

Bei dem von uns angewendeten magnetischen Theodolithen besteht der zur Declinationsmessung bestimmte magnetische Körper aus zwei parallelen, gleichgerichteten Magnetstäben von ungefähr 9$^{cm.}$ Länge. Diese sind durch einen Querstab fest verbunden, der an beiden Enden hackenförmig gekrümmt ist, so dass damit die Magnetstäbe in den beiden geforderten Lagen an den als Drehungsaxe dienenden, ungefähr 75$^{cm.}$ langen Coconfaden angehängt werden können. Das aus Messing und Glasröhren zusammengesetzte Gehäuse, welches zur Abhaltung von Luftzug das Ganze umgibt und oben den Halter des Coconfadens trägt, ist auf der Aldihade einer Kreistheilung festgeklemmt und kann durch die Fussschrauben des Apparats vertikal gestellt werden. Der Kreis ist direct in $1/_6{}^0$ getheilt und mittelst des Nonius kann man nach 10″ ablesen. An der Aldihade ist ausserdem excentrisch ein Fernrohr angebracht, dessen Fadenkreuz durch einen kleinen Spiegel beleuchtet wird. Es ist dasselbe auf einen am Verbindungsstab der beiden Magnete befestigten und nahe senkrecht gegen deren Längsrichtung gestellten Spiegel gerichtet. Bei der Beobachtung dreht man die Aldihade mit Fernrohr, u. s. f. so lange bis der Faden in letzterm mit seinem vom Spiegel reflectirten Bilde coincidirt und liest den Nonius ab. Die Normale des Spiegels repräsentirt hiebei die oben besprochene markirte Linie. Hierauf wird das System der Magnetstäbe mit ihrem Spiegel umgelegt, durch Drehung Faden und Fadenbild wieder zur Coincidenz gebracht und der Stand abgelesen. Um hiebei gleichzeitig einen allfälligen, durch die Prismaticität der die Gehäuseöffnung vor dem Spiegel verschliessenden Glasplatte bedingten Fehler eliminiren zu können, ist die Einrichtung getroffen, dass man die den Aufhängefaden einschliessende Glasröhre vom untern Theil des Gehäuses losschrauben und das letztere sammt den Magneten umlegen kann *). Das Mittel aus beiden Ablesungen vor und nach dem Umlegen gibt uns also dem Obigen gemäss den magnetischen Meridian für den betreffenden Ort **).

---

*) Eine detaillirtere Beschreibung des magnetischen Theodolithen mit Figuren findet man in Lamont's Handbuch des Erdmagnetismus, Berlin 1849.

**) Es bedarf wohl keiner besondern Erörterung, dass das Vorstehende

Unsere Aufgabe ist gelöst, wenn wir für dieselbe Stelle d. i. für die Drehungsaxe des Theodolithen auch noch den astronomischen Meridian ermittelt haben. Da wir unsere Beobachtungen in unmittelbarer Nähe der Sternwarte anstellten, so haben wir diesen Umstand benutzt, uns das letztere Geschäft unbeschadet der Genauigkeit bedeutend zu erleichtern. Der Theodolith wurde nämlich stets auf Postamenten aufgestellt, welche sich im astronomischen Meridian des Meridiankreises der Sternwarte befanden, und seine optische Axe auf folgende Weise mit derjenigen des Meridianfernrohrs zur genauen Coincidenz gebracht. Nachdem wir die Meridianspalte des Observatoriums ganz geöffnet und ein entferntes Object gefunden hatten, das mit dem Mittelfaden des Fernrohrs genau coincidirte und zugleich vom Postament auf der entgegengesetzten Seite des Observatoriums aus durch die geöffnete Spalte hindurch gesehen werden konnte, verschoben wir nun den Theodolithen auf dem letzten Postament so lange, bis man bloss durch eine Drehung seines Fernrohrs um eine horizontale Axe bald das irdische Object, bald den Mittelfaden im Focus des Meridianfernrohrs mit dem Fadenkreuz zur Coincidenz bringen konnte. Der jetzt abgelesene Stand des Nonius gab, combinirt mit den nun folgenden Beobachtungen an den Magneten, den Winkel des magnetischen Meridians mit einer Vertikalebene durch die optische Axe des Meridianfernrohrs. Aus einer Fehlerbestimmung des letztern Instruments, die wir zu andern Zwecken kurz vorher ausgeführt hatten, folgte aber, dass bei der hier in Anwendung kommenden Lage desselben der Vertikalebene

---

auch für unsern Doppelmagneten gilt, selbst dann noch, wenn die magnetischen Axen der beiden Stäbe nicht parallel sind.

durch seine optische Axe ein östliches Azimuth von 59″ zukam. Diesen Winkel hatte man, je nachdem das Nordende der Magnetstäbe nach Westen oder Osten von der optischen Axe des Meridianfernrohrs abwich, zu diesem Winkel hinzuzuzählen oder davon zu subtrahiren, um die wahre Declination zu erhalten.

Dieses Resultat ist nun aber bloss dann richtig, wenn folgende zwei Bedingungen, wie wir bisher stillschweigend vorausgesetzt haben, wirklich erfüllt sind. Erstlich muss innerhalb der kleinen Elevation von circa 4°, welche man dem Theodolithenfernrohr zu geben hat, um das Fadenkreuz des Meridianinstruments und das wenig darüber erscheinende ferne terrestrische Object (das Meridianzeichen am Hause auf dem Gurten) sehen zu können, die optische Axe des erstern Fernrohrs eine Verticalebene beschrieben. Dies wird der Fall sein, wenn das Fadenkreuz bei der Drehung des Fernrohrs von dem Faden eines entfernten Bleiloths stets gleich weit entfernt bleibt. Durch eine derartige Beobachtung haben wir uns überzeugt, dass diese erstere Bedingung sogar bis zu einer Elevation von 7° bei unserm Apparate erfüllt sei und zwar innerhalb der Genauigkeitsgrenze der Winkelbestimmung an demselben, indem die kleinste dem Auge noch deutlich erkennbare Vergrösserung der Entfernung der beiden Faden gerade einem Winkel von 10″ entsprach. Zweitens soll die Torsion des Fadens, an welchem der Doppelmagnet aufgehängt ist, entweder Null oder doch so klein sein, dass die daraus hervorgehende Torsionskraft neben der Richtungskraft des Erdmagnetismus verschwindet. Ist dies nicht der Fall, so muss die erstere im Verhältniss zu letzterer bestimmt und in Rechnung gebracht werden. Da wir bei der Aufhängung des Magneten jede Torsion des Fadens möglichst vermieden, derselbe auch überdies 75cm. lang war, so war von vorneherein zu erwarten, dass die Torsionskraft keinen erheblichen Einfluss haben werde. Um indessen unserer Sache sicher zu sein, wurde am Schluss jeder Declinationsmessung der obere Querschnitt des Aufhängefadens um 360° einmal nach rechts, das andere Mal nach links gedreht und die dadurch hervorgebrachte Aenderung im Stand der Spiegelnormale beobachtet. Letztere überstieg nie 20—30″ im Sinne der Drehung und erwies sich bis auf 10″ stets als gleich nach beiden Seiten hin. Hieraus folgte, dass innerhalb der Genauigkeitsgrenze unserer Winkelbestimmung auch der Einfluss einer allfälligen Torsion des Fadens ganz zu vernachlässigen war.

Die folgenden Messungen wurden sämmtlich im Freien gemacht und dabei das Instrument auf einen festen hölzernen Dreifuss gestellt, der sich auf der Nordseite der Meridianspalte des Observatoriums in einer Entfernung von 10m von letzterm befand. Wenn die Sonne schien, so wurden ihre Strahlen durch einen Schirm vom Instrumente abgehalten. Da es hier kein Interesse gewährt, die einzelnen Daten der Beobachtungen anzugeben, so theilen wir bloss ihre Endresultate mit. Die Declination ergab sich als eine westliche (d. h. das Nordende der Magnetstäbe wich vom astronomischen Meridian nach Westen ab) und zwar betrug sie am:

18.	October	5^h	Nachm.	16° 43′ 42″
19.	„ „	3^h	„	16° 44′ 19″
28.	„ „	4^h	„	16° 42′ 37″
30.	„ „	10^h	Vorm.	16° 43′ 49″ *).

*) Hier sowohl als bei allen folgenden Winkelbestimmungen wurden stets die Mittel aus den Ablesungen an den beiden einander diametral gegenüberstehenden Nonien benutzt, wodurch bekanntlich

Um hieraus die mittlere Declination von Bern ableiten zu können, müssten noch besondere Beobachtungen über die täglichen Variationen derselben vorliegen. Da wir indessen die Instrumente zur Anstellung der letztern nicht besitzen, vor Allem aber ein eisenfreies Local zu der durchaus nothwendigen festen Aufstellung fehlt, so wollen wir vor der Hand das Mittel aus den obigen Messungen, nämlich:

$$16^0\ 43'\ 36'',7 \text{ westlich}$$

als die mittlere Declination in Bern im Oct. 1859 betrachten. Das wahre Mittel wird hievon jedenfalls nur sehr wenig verschieden sein.

2. Inclination.

Der Kreis des zu unsern Messungen benutzten Inclinatoriums ist direct in $^1/_4{}^0$ getheilt, mittelst der an den Enden der Magnetnadel angebrachten Nonien liest man einzelne Minuten ab. Die Axe der letztern ruht auf Frictionsrollen und diese, sowie der getheilte Kreis werden von Messingsäulen getragen, die auf einer mit Stellschrauben versehenen Messingplatte stehen. Ueber das Ganze kann ein Glasgehäuse mit Holzfassungen gestellt werden, bei dem indessen, wie wir leider erst etwas spät entdeckten, die Glasscheiben mit Eisenstiften befestigt sind, so dass es bei den Beobachtungen nicht zur Abhaltung von Luftzug benutzt werden darf. Aus diesem Grunde konnten wir denn auch unsere Beobachtungen nicht im Freien anstellen. Um die Fehler zu eliminiren, welche von einer Abweichung der markirten

---

der aus einer Excentricität der Drehungsaxe entspringende Fehler eliminirt wird.

Linie von der magnetischen Axe des Stabes, der Nulllinie der Kreistheilung von der Horizontalität und des Schwerpunktes von der Drehungsaxe herrühren, pflegt man gewöhnlich 4 Ablesungen zu machen, indem man den Kreis um eine vertikale Axe um 180^0 umdreht und in jeder Stellung den Magnet umlegt, hierauf magnetisirt man den Magnet um und wiederholt dieselben Beobachtungen. Sind die verschiedenen Abweichungen klein, die magnetischen Momente des Stabes beide Male gleich gross und befand sich die Kreisebene genau im magnetischen Meridian, so kann man das Mittel aus allen 8 Beobachtungen als den wahren Werth der Inclination betrachten. Ist das Instrument mit horizontaler Kreistheilung versehen, so lässt sich übrigens durch eine geeignete Beobachtungsmethode auch noch der aus einer mangelhaften Einstellung der Kreisebene in den magnetischen Meridian entspringende Fehler eliminiren. Da unser Instrument keine vertikale Drehaxe besitzt, so mussten wir uns begnügen, die Kreisebene der Richtung einer Horizontal-Nadel möglichst parallel zu stellen und die Nulllinie mit Hülfe einer Libelle horizontal zu machen. Ebenso konnte auch die Magnetnadel nicht umgelegt werden; die folgenden Zahlen sind daher bloss die Mittel aus 2 Beobachtungen, zwischen welchen der Magnetstab ummagnetisirt worden war. Durch besondere Ablesungsversuche überzeugten wir uns, dass sich beim Ummagnetisiren die Grösse des magnetischen Moments nicht wesentlich geändert hatte. Die Beobachtungen wurden im physikalischen Auditorium der Hochschule angestellt und dabei alles Eisen möglichst vom Instrumente entfernt. Die Inclination in Bern ist nördlich und betrug am:

27.	October	63° 48′
28.	„ „	63° 39′
29.	„ „	63° 43′
30.	„ „	63° 50′

Da der störende Einfluss der unbekannten Lage der magnetischen Axe nicht durch Umlegung des Magnetstabs eliminirt werden konnte, so darf das Mittel aus den vorstrehenden Zahlen, nämlich:

63° 45′

nur annäherungsweise als Werth der Inclination in Bern im October 1859 gelten.

3. Intensität.

Die beschleunigende erdmagnetische Kraft eines Ortes: K, die in der Richtung der Inclination wirkt, können wir uns in eine horizontale Componente H und in eine vertikale V zerlegt denken. Stellt i die Inclination dar, so haben wir:

$$H = K \cos. i \text{ und } V = K \sin. i.$$

Ist also i bekannt, so brauchen wir bloss eine dieser Componenten zu ermitteln, um daraus sofort die ganze Kraft ableiten zu können. Man pflegt nun in der That nur eine dieser Componenten, nämlich die horizontale direct zu bestimmen, da dies mit grosser Schärfe geschehen kann, während die ganze Kraft selbst oder die vertikale Componente nur sehr ungenau durch directe Versuche gefunden werden könnten.

Es gibt verschiedene Methoden, diese horizontale Componente H der erdmagnetischen Kraft zu bestimmen; wir haben die von Gauss in seiner Schrift: „*Intensitas vis magneticae terrestris* etc." beschriebene angewandt.

Dieselbe spaltet sich in zwei Aufgaben, nämlich den Quotienten $\frac{H}{M}$ und das Product HM zu bestimmen, wo M das magnetische Moment eines Magnetstabes darstellt.

Bestimmung des Productes: HM. Dieses findet man nach Gauss, wenn man den Magnetstab, dessen magnetisches Moment M ist, an einem Coconfaden so aufhängt, dass seine magnetische Axe sich in einer Horizontalebene frei drehen hann, und alsdann die Schwingungsdauer dieses Magnetstabs bestimmt. Da das Drehungsmoment der erdmagnetischen Kraft auf unsern Magnetstab gleich: HM sin. v ist, wenn seine magnetische Axe einen Winkel v mit dem magnetischen Meridian einschliesst, so ergibt sich für seine Schwingungsdauer T durch Analogie mit der Pendelbewegung sofort der Werth:

$$T^2 = \pi^2 \frac{N}{HM}$$

wo N das Trägheitsmoment des Magnetstabs darstellt. Wird T bobachtet, so hat man also:

1)
$$HM = \frac{\pi^2}{T^2} N.$$

Diese Formel gilt aber nur dann, wenn bei der Beobachtung von T die Amplitude der Schwingungen sehr klein war. Hat aber die Amplitude a einen grössern Werth, so muss die dabei beobachtete Schwingungsdauer T_1 zuerst auf sehr kleine Amplituden reducirt werden, ehe man ihren Werth in die obige Formel einsetzen darf. Es ist die entsprechende Schwingungsdauer für kleine Amplituden:

$$T = \frac{T_1}{1 + \frac{1}{4} \sin.^2 \frac{a}{2} + \frac{9}{64} \sin.^4 \frac{a}{2} + \ldots\ldots}.$$

Uebersteigt die Amplitude a nicht 20^0, so darf man sich mit einer Genauigkeit von $\frac{1}{10000}$ an die einfachere Formel:

$$T = \frac{T_1}{1 + \left(\frac{b}{4}\right)^2}$$

halten, wo b den der Amplitude a entsprechende Bogen bezeichnet.

Ist die Torsionskraft des Aufhängefadens sehr gering, der Magnetstab etwas schwer (ein oder mehrere Kilogramm) und befindet sich kein Metall in der Nähe des letztern, so kann man bei der vorstehenden Correction stehen bleiben. Sind aber diese Bedingungen, wie dies bei unserm Apparate der Fall war, nicht erfüllt, so haben wir den Einfluss der Torsion, des Luftwiderstandes und der Hemmung durch die im benachbarten Metall inducirten electrischen Ströme zu berücksichtigen. Was zunächst die Torsionskraft betrifft, so lässt sich dieselbe, da sie dem Drehungswinkel proportional ist, für kleine Ablenkungswinkel aus dem magnetischen Meridian leicht als Bruchtheil der Grösse HM darstellen. Drehen wir nämlich den obern Querschnitt des Aufhängefadens etwa um 360^0 und beobachten dann die dadurch hervorgebrachte kleine Ablenkung α des Magneten aus dem magnetischen Meridian, so hat man:

$$D = HM \frac{\alpha}{360 - \alpha},$$

wenn D die Torsionskraft des Fadens für einen Drehungswinkel von 1^0 darstellt. Da die Torsionskraft im Sinne der erdmagnetischen Kraft drehend wirkt, so geht jetzt die Gleichung 1) über in:

$$HM + D = \frac{\pi^2}{T^2} N \;;$$

oder also:

1)
$$HM = \frac{\pi^2}{T^2} \frac{N}{1 + \frac{\alpha}{360^0 - \alpha}} .$$

Der Luftwiderstand und die inducirten Ströme wirken proportional der Geschwindigkeit des Magnetstabs hemmend auf seine Bewegung ein und haben daher zur Folge, dass seine Schwingungsdauer grösser wird und seine Amplituden in geometrischer Progression abnehmen. Damit wir die vorstehende Formel benutzen können, haben wir desshalb wieder die beobachtete Schwingungsdauer T_1 zuvor auf die Schwingungsdauer T, wie sie ohne die erwähnten Hindernisse gefunden würde, zu reduciren. Es ergibt sich nun leicht, dass das Verhältniss dieser beiden Schwingungsdauern sei:

$$T^2 = T_1^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda \mu}{\pi}\right)^2} ,$$

wo μ = log. nat. 10 = 2,30259 und λ das sogen. logarithmische Decrement, d. h. der briggische Logarithmus des constanten Coeffizienten c der geometrischen Progression, welche die aufeinander folgenden Amplituden eingehen.

Da endlich die Schwingungsdauer stets aus der Beobachtung der Zeitdauer einer grössern Zahl von Schwingungen abgeleitet wird, so muss man bei der Reduction auf unendlich kleine Amplituden darauf Rücksicht nehmen, dass die letztern dem Vorigen gemäss continuirlich abnehmen. Messen wir z. B. zie Zeit Z für n Schwingungen, so erhält man durch Summation der aufeinander folgenden

Amplituden, wenn b_1 den der ersten derselben entsprechenden Bogen darstellt:

$$T = \frac{Z}{n + \left(\frac{b_1}{4}\right)^2 \frac{1 - c^{2n}}{1 - c^2}},$$

oder da $Z = n T_1$ zu setzen ist:

$$T = \frac{T_1}{1 + \frac{1}{n}\left(\frac{b_1}{4}\right)^2 \frac{1 - c^{2n}}{1 - c^2}}.$$

Fassen wir diese verschiedenen Correctionen zusammen, so ist also die Grösse T in der Gleichung 1') aus der beobachteten Schwingungsdauer T_1 nach folgender Formel zu berechnen:

$$T = \frac{T_1}{\left(1 + \frac{1}{n}\left(\frac{b_1}{4}\right)^2 \frac{1 - c^{2n}}{1 - c^2}\right)\sqrt{1 + \frac{\lambda^2 \mu^2}{\pi^2}}}. \qquad 2)$$

Das Trägheitsmoment N des Magnetstabes, dessen Kenntniss erfordert wird, konnte nicht aus den Dimensionen und aus dem Gewicht desselben berechnet werden, da seine Gestalt zu dem Ende nicht hinlänglich regelmässig war; wir ermittelten daher dasselbe empirisch auf folgende Weise. Der Stab wurde im Saal der Sternwarte an einem 3^m langen, feinen Messingdrahte aufgehängt und seine Schwingungsdauer beobachtet. Reduciren wir die letztern nach Formel 2) auf unendlich kleine Amplituden und auf eine Bewegung ohne Hindernisse und heissen dann Ta diese reducirte Schwingungsdauer, so hat man die Gleichung:

$$T_a^2 (HM + D) = \pi^2 N,$$

wo D die Torsionskraft des Drahtes darstellen soll. Auf den Stab wurde hierauf ein genau gearbeiteter Messing-ring so gelegt, dass seine Axe mit der Drehungsaxe des Stabes zusammenfiel. Das Trägheitsmoment N' desselben konnte dann leicht aus seinem Gewicht und seinen Dimensionen berechnet werden. Die Beobachtung der neuen Schwingungsdauer, deren reducirter Werth T_b sein mag, gibt, da nach Coulomb die Torsionskraft bei Drähten unabhängig ist von der Belastung:

$$T_b^2\,(HM + D) = \pi^2\,(N + N').$$

Aus dieser und der vorigen Gleichung ergibt sich aber:

3)
$$N = N'\,\frac{T_a^2}{T_b^2 - T_a^2}\;.$$

Bestimmung des Quotienten: $\frac{H}{M}$. Dieser Quotient wird nach Gauss dadurch bestimmt, das man den Magnetstab, dessen magnetisches Moment M ist, seitwärts von einem andern um eine vertikale Axe drehbaren Magneten aufstellt und die dadurch hervorgebrachte constante Ablenkung des letztern aus dem magnetischen Meridian beobachtet. Der Einfachheit halber pflegt man die gegenseitige Stellung der beiden Magnete stets so zu wählen, dass ihre magnetischen Axen in derselben Horizontalebene liegen. Unter dieser Bedingung wird die Gleichgewichtslage des beweglichen Magnetstabs unter dem Einfluss des festen Magneten einerseits und des Erdmagnetismus anderseits allgemein durch folgende Gleichung definirt:

$$-H\sin.(\psi-\beta) = \frac{M}{E^3}\,[\sin.\psi(3\cos.^2\alpha-1)-\cos.\psi\sin.\alpha\cos.\alpha] +$$
$$+ \frac{B}{E^4} + \frac{C}{E^5} + \frac{D}{E^6} + \cdots\cdots ,$$

wo α, β und ψ die Winkel darstellen, welche die magnetische Axe unsers festen Magnetstabes der Reihe nach bildet mit der Verbindungslinie E der Mittelpunkte beider Magnetstäbe, mit der Richtung des magnetischen Meridians und mit der magnetischen Axe des beweglichen Magneten. B, C, D etc. stellen gewisse Functionen von α und ψ dar und hangen im Uebrigen wesentlich von der Vertheilung des freien Magnetismus in den beiden Magneten ab, die uns unbekannt ist. Endlich setzt die obige Gleichung voraus, dass man mit Gauss als Einheit der magnetischen Flüssigkeitsmenge diejenige angenommen habe, welche an zwei ponderable Massen gebunden sein muss, damit dieselben in der Einheit der Entfernung mit der Einheit der bewegenden Kraft aufeinander einwirken.

Aus dieser allgemeinen Gleichung wollen wir jetzt die Bedingung des Gleichgewichts für die spezielle Anordnung ableiten, welche die Einrichtung des magnetischen Theodolithen erfordert. Bei unsern Versuchen fiel die Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Magnete stets mit der magnetischen Axe des festen Magnets zusammen; es ist also $\alpha = 0$ zu setzen. Führen wir ferner statt ψ den Winkel φ ein, welchen die magnetische Axe des beweglichen Magneten mit dem magnetischen Meridian macht, indem wir $\psi = \beta - \varphi$ setzen, so geht die obige Bedingungsgleichung über in:

$$\mathrm{H} \sin. \varphi = \frac{2 \mathrm{M} \sin. (\beta - \varphi)}{\mathrm{E}^3} + \frac{\mathrm{B}'}{\mathrm{E}^4} + \frac{\mathrm{C}'}{\mathrm{E}^5} + \cdots\cdots$$

Wir denken uns nun den festen Magneten so gestellt, dass seine magnetische Axe auf dem magnetischen Meridian senkrecht steht; hierauf soll derselbe um eine Vertikale durch den Mittelpunkt des beweglichen Magneten als Drehungsaxe so lange gedreht werden, bis er auf der magnetischen Axe des letztern, der durch ihn aus dem magnetischen Meridian abgelenkt wird, senkrecht steht. Heissen wir u den Winkel, um den wir hiebei den festen Magneten gedreht haben, so schliesst derselbe jetzt den Winkel $90^0 + u$ mit dem magnetischen Meridian ein und der Ablenkungswinkel des beweglichen Magneten wird demnach u sein. Substituiren wir diese Werthe von β und φ in die obige Gleichung, so kommt schliesslich:

$$H \sin. u = \frac{2M}{E^3} + \frac{B''}{E^4} + \frac{C''}{E^5} + \cdots\cdots ,$$

wo nunmehr B'', C'' etc. Constanten darstellen, d. h. nicht mehr von u, sondern bloss noch von der unbekannten Vertheilung des freien Magnetismus in den beiden Magneten und von ihren Dimensionen abhangen und zwar sind B'', C'' etc. Grössen von der 2., 3. u. s. w. Ordnung betreffend die halbe Länge der Magnete, während das magnetische Moment M bekanntlich eine Grösse erster Ordnung repräsentirt. Die obige Gleichung können wir auch auf folgende Form bringen:

$$\sin. u = \frac{a}{E^3} + \frac{b}{E^4} + \frac{c}{E^5} + \cdots\cdots ,$$

wo dann:

$$a = \frac{2M}{H} ,$$

und b, c etc. unbekannte Constanten. Unsere Aufgabe ist als gelöst zu betrachten, wenn es uns gelungen sein wird, den Werth des Coefficienten a der obigen Reihe zu bestimmen. Zu dem Ende hin werde zuerst für eine bestimmte Entfernung E des festen Magneten der Drehungswinkel u beobachtet, sodann der letztere ohne Aenderung der Entfernung auf die entgegengesetzte Seite des beweglichen Magneten gebracht — gleichsam um 180⁰ um die Drehungsaxe des letztern gedreht — und der neue Drehungswinkel u_1 abgelesen. Da man den festen Magneten jetzt offenbar nach der entgegengesetzten Seite wird zu drehen haben und E negativ geworden ist, so wird für die jetzige Anordnung die Gleichung:

$$-\sin. u_1 = -\frac{a}{E^3} + \frac{b}{E^4} - \frac{c}{E^5} + \cdots\cdots$$

gelten. Aus dieser und der vorigen Gleichung gewinnt man aber durch Subtraction folgende einfachere:

$$\frac{\sin. u + \sin. u_1}{2} = \frac{a}{E^3} + \frac{c}{E^5} + \frac{e}{E^7} + \cdots\cdots .$$

Sind die Winkel u und u_1, wie es in Wirklichkeit stets der Fall ist, wenig von einander verschieden, so kann man, da:

$$\frac{\sin. u + \sin. u_1}{2} = \sin. \frac{u + u_1}{2} \cos. \frac{u - u_1}{2}$$

$$= \sin. \frac{u + u_1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{u - u_1}{2}\right)^2 + \cdots\right)$$

ist, mit grosser Annäherung auch setzen:

$$\sin. v = \frac{a}{E^3} + \frac{c}{E^5} + \frac{e}{E^7} + \cdots , \qquad 4)$$

wo:

$$v = \frac{u + u_1}{2} .$$

Denken wir uns nun für eine Reihe verschiedener Entfernungen E, E_1, E_2 etc. der beiden Magnete aus den Beobachtungen die Winkel v, v_1, v_2 etc. gemäss der vorstehenden Auseinandersetzung abgeleitet, so werden wir eine Reihe von Gleichungen analog der obigen erhalten und daraus dann eine entsprechende Zahl der Constanten a, b, c etc. bestimmen können. Da indessen die fortwährenden kleinen Veränderungen der erdmagnetischen Kraft und des magnetischen Zustandes des Stabes im Allgemeinen einen um so grössern fehlerhaften Einfluss gewinnen, je länger die Beobachtungen dauern, so zieht man es vor, bloss für zwei verschiedene Entfernungen E und E_1 die Winkel v und v_1 zu bestimmen und diese Entfernungen dann so gross zu wählen, dass das 3. Glied in der Reihe rechts vom Gleichheitszeichen der Gleichung 4) neben dem ersten als sehr klein zu vernachlässigen ist. Dies wird aber der Fall sein, wenn: $1 \pm \left(\frac{l}{E}\right)^4$, wo l die halbe Länge der Magnete darstellt, innerhalb der gewünschten Genauigkeitsgrenze der Versuche nicht von 1 verschieden ist. Aus den beiden diesen Messungen entsprechenden Gleichungen findet man dann:

5) $$a = \frac{E_1{}^5 \sin. v_1 - E^5 \sin. v}{E_1{}^2 - E^2}.$$

Das Verhältniss der beiden Entfernungen E und E_1 ist an und für sich beliebig; es wird indessen einen bestimmten Werth desselben geben, für welchen der Fehler bei der Bestimmung von a ein Minimum wird. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung lehrt, diesen bestimmten Werth zu finden; sie zeigt nämlich, dass annäherungsweise:

$$\frac{E_1}{E} = \sqrt{1{,}7395}$$

sein muss, damit der wahrscheinliche Fehler des Resultates a am kleinsten werde.

Mit der Bestimmung von a ist aber, wie schon oben bemerkt worden ist, der zweite Theil unserer Aufgabe gelöst, da man ja hat:

6) $$\frac{H}{M} = \frac{2}{a}.$$

Durch Multiplication dieser Gleichung mit 1) findet man schliesslich:

$$H = \sqrt{\frac{2\pi^2 N}{a\,T^2\left(1 + \frac{\alpha}{360-\alpha}\right)}} \quad . \qquad 7)$$

Der Zahlenwerth von H wird nun offenbar verschieden ausfallen je nach den Einheiten, welche man für die in den Grössen unter dem Wurzelzeichen vorkommenden Längen, Zeiten und Massen wählt. Wir haben uns im Folgenden an die allgemein üblichen Gauss-Weber'schen Einheiten für diese Grössen gehalten, d. h. also als Einheit der Länge $1^{mm.}$, als Einheit der Zeit 1^{s} mittlerer Zeit und als Einheit der Masse die Masse von $1^{mgr.}$ angenommen.

Da das Trägheitsmoment N eine unveränderliche Grösse ist, so lange wenigstens der Magnetstab nicht gewaltsamen äussern Einwirkungen ausgesetzt wird, so haben wir dasselbe zunächst ein für alle Male nach der S. 61 erörterten Methode bestimmt.

Das Trägheitsmoment N^1 eines homogenen Ringes, dessen äusserer und innerer Durchmesser durch D und d dargestellt wird und dessen Masse gleich m ist, berechnet sich nach der Formel:

$$N^1 = \frac{m}{8}\,(D^2 + d^2).$$

Die Masse unsers Messingrings wurde mittelst einer Waage bestimmt, welche bei $50^{gr.}$ Belastung für $0{,}1^{mgr.}$ Uebergewicht noch einen deutlichen Ausschlag gab. Als Mittel aus zwei Wägungen auf beiden Schalen fanden wir:

$$m = 76282{,}5^{mgr.}.$$

Die beiden Durchmesser D und d maassen wir mittelst eines Calibermaassstabs, dessen Nonius $0{,}1^{mm.}$

angab *) und dessen Theilung wird durch Vergleichung mit dem Normal-Metermaassstab der hiesigen Sternwarte als richtig erfunden hatten. Das Resultat der Messung war:

$$D = 49{,}4^{\text{mm.}} \quad , \quad d = 31{,}6^{\text{mm.}}$$

Diese Zahlenwerthe in die obige Formel eingeführt, ergeben:

$$N' = 32791400.$$

Ueber die Schwingungsdauern T_b und T_a mit und ohne Ring wurden an zwei verschiedenen Tagen zwei von einander ganz unabhängige Beobachtungen angestellt. Man maass zu dem Ende wiederholt die Zeitdauer von ungefähr 6, resp. 24 Schwingungen an einer hinlänglich genau nach mittlerer Zeit gehenden Pendeluhr im Saal der Sternwarte. Es ergab sich so als Mittel aus der Beobachtung von durchschnittlich je 180 Schwingungsdauern nach der Reduction auf unendlich kleine Amplituden und eine Bewegung ohne Hindernisse bei der ersten Messung:

$$T_a = 3{,}2361 \quad , \quad T_b = 12{,}188 ,$$

bei der zweiten Messung:

$$T_a = 3{,}2685 \quad , \quad T_b = 12{,}303.$$

Diese Werthe und den obigen von N' in Gleichung 3) substituirt gaben für N die Werthe:

2487200 und 2489900.

Das Mittel aus beiden:

$$N = 2488550,$$

weicht also bloss um $\frac{1}{2000}$ des ganzen Werths von den einzelnen Ergebnissen ab.

---

*) Ein genaueres Instrument für Längenmessungen stand uns leider nicht zu Gebote.

Was den von der Torsion herrührenden Factor $1+\frac{\alpha}{360-\alpha}$ in der Formel 7) anlangt, so wurde das α auf die S. 59 angegebene Weise wiederholt bestimmt und im Maximum $= {}^1/_{10}{}^{\circ}$ gefunden. Der obige Factor nimmt also im Maximum den Werth $1+\frac{1}{3599}$ an, wir haben ihn daher in der Rechnung als nicht von 1 verschieden vernachlässigt.

Zu den Ablenkungsbeobachtungen behufs Bestimmung der Constante a wurde auf die Aldihade des Theodolithen eine im Centimeter eingetheilte Querschiene und auf diese ein aus Messing und Glas bestehendes Gehäuse aufgesetzt, in welchem ein bloss $12^{\text{mm.}}$ langes Magnetstäbchen mit kleinem Spiegel an einem Coconfaden aufgehängt war. Durch Drehung der Aldihade brachte man hierauf das Fadenkreuz im excentrischen Fernrohr mit seinem vom Magnetspiegel reflectirten Bilde zur Coincidenz, stellte dann die Schiene senkrecht zur Längsrichtung des kleinen Magnets und klemmte sie in dieser Lage fest. Nunmehr wurde der Ablenkungsstab von $6^{\text{cm.}}$ Länge auf einem auf der Schiene verschiebbaren Schlitten in der Höhe des kleinen beweglichen Magneten befestigt, die Aldihade mit Schiene, Gehäuse u. s. w. gedreht, bis Faden und Fadenbild wieder zusammenfielen, der Nonius abgelesen und darauf dasselbe bei umgekehrter Lage des Magnetstabs wiederholt. Die halbe Differenz der beiden Ablesungen am Nonius gibt dann offenbar die Ablenkung u des beweglichen Magneten aus dem magnetischen Meridian. Man brachte darauf den Ablenkungsmagnet in dieselbe Entfernung auf die entgegengesetzte Seite des beweglichen und ermittelte in gleicher Weise den Ablenkungswinkel u_1. Endlich stellte man ganz dieselben

Messungen auch an für die nach der Formel S. 66 berechnete grössere Entfernung der Magnete.

Da bei diesen Beobachtungen das Magnetgehäuse mit der Schiene gedreht wurde und man Sorge getragen hatte, den Magneten möglichst ohne Torsion aufzuhängen, so ergibt sich unmittelbar, dass die letztere keinen Einfluss auf diese Ablenkungsbeobachtungen haben konnte. Die Beurtheilung des Einflusses einiger anderer Fehlerquellen wird sich am besten an die Mittheilung einer vollständigen Beobachtungsreihe anschliessen. Am 25. Oct. wurde beobachtet für:

$$E = 200^{\mathrm{mm.}}$$

Magnet Ost $u = 8^0\ 52'\ 5''$ $\quad \frac{u + u_1}{2} = 8^0\ 50'\ 45''$

„ West $u_1 = 8^0\ 49'\ 25''$ $\quad \frac{u - u_1}{2} = 0^0\ 1'\ 20''$

$$E_1 = 260^{\mathrm{mm.}}$$

Magnet Ost $u = 3^0\ 58'\ 20''$ $\quad \frac{u + u_1}{2} = 3^0\ 57'\ 46'',2$

„ West $u_1 = 3^0\ 57'\ 12'',5$ $\quad \frac{u - u_1}{2} = 0^0\ 0'\ 33'',7$

Es frägt sich nun nach dem, was S. 66 hemerkt worden ist, zunächst, inwiefern $1 \pm \left(\frac{1}{E}\right)^4$ für die kleinere der vorstehenden Entfernungen von 1 abweiche. Die halbe Länge des Ablenkungsstabes ist $30^{\mathrm{mm.}}$, also: $\frac{1}{E} = \frac{30}{200}$ und folglich:

$$1 \pm \left(\frac{1}{E}\right)^4 = 1 \pm 0{,}000507.$$

Der Fehler beträgt also noch nicht ein Tausendstel.

Wir haben ferner zu untersuchen, wie sich der Fehler, den wir beim Ablesen des Nonius begehen, zum ganzen Ablenkungswinkel verhalte. Der kleinste Ablenkungswinkel ist dem Obigen zufolge in runder Zahl: $4^0 = 14400''$ und der Beobachtungsfehler beim Ablesen des Nonius beträgt $10''$; es ist also dieser Fehler auch wieder kleiner als der tausendste Theil der beobachteten Grösse.

Die obigen Zahlenwerthe geben uns endlich auch noch die Mittel an die Hand, zu entscheiden, inwiefern wir statt $\frac{\sin. u + \sin. u_1}{2}$ setzen dürfen $\sin. \frac{u + u_1}{2}$ oder, wie S. 65 gezeigt worden ist, inwiefern $\frac{1}{2}\left(\frac{u - u_1}{2}\right)^2$ neben 1 zu vernachlässigen ist. Für $E = 200$ ist $\frac{u - u_1}{2} = 0^0\ 1'\ 20''$ und somit wenn wir statt des Winkels den zugehörigen Bogen einführen:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{u - u_1}{2}\right)^2 = 0{,}0000000753.$$

Was die Bestimmung der Entfernungen E und E_1 betrifft, so war, wie schon oben bemerkt, die Schiene selbst in Centimeter getheilt. Der Sicherheit halber wurden dieselben auch noch direct mittelst des Calibermaassstabs gemessen. Der Fehler in der Bestimmung von E konnte daher höchstens $^1/_{20}{}^{\text{mm.}}$ betragen, was für die kleine Entfernung von $200^{\text{mm.}}$ bloss $\frac{1}{4000}$ des ganzen Werths ausmacht.

Nach diesen Erörterungen dürfen wir daher behaupten, dass unsere Beobachtungen den Werth der Constanten a bis auf den tausendsten Theil richtig ergeben haben.

Nicht dieselbe Genauigkeit dürfte unserer Bestimmung der Schwingungsdauer T des Ablenkungsmagneten zukommen. Da nämlich die Beobachtungen im Freien angestellt wurden, und uns kein transportables Chronometer zu Gebote stand, so mussten diese Messungen mittelst eines gewöhnlichen Secundenzählers von Henry in Paris gemacht werden. Das Instrument wurde nun zwar jedesmal zur Zeit der Messung mit der nach mittlerer Zeit gehenden Uhr in der Sternwarte verglichen und seine Secundenschläge hiernach corrigirt; wir haben uns indessen davon überzeugt, dass sein Gang ziemlich ungleichförmig ist und diese Correction daher theilweise wenigstens illusorisch wird. Im Uebrigen geschah die Bestimmung der Schwingungsdauer ganz analog wie oben bei Ermittlung des Trägheitsmoments, nur war der Magnetstab hier an einem kürzern Coconfaden aufgehängt und durch ein Holzkästchen mit Glasdeckel vor dem Luftzug geschützt. Im Ganzen wurden jedesmal ungefähr 100 Schwingungen beobachtet, so dass wir, die Summe des Beobachtungsfehlers und des fehlerhaften Ganges der Uhr gleich $1^{s.}$ angenommen, die in runder Zahl $3^{s.}$ betragende Schwingungsdauer bloss bis auf $\frac{1}{300}$ ihres Werths genau erhalten hätten. Dieser bedeutende Fehler in der Bestimmung von T gewinnt nun zudem einen verhältnissmässig grossen Einfluss auf unser Resultat als T mit der ersten Potenz, a und M aber bloss mit der einhalbten in dasselbe eingehen.

Dieser letztere Umstand hat uns namentlich bewogen, einige andere Correctionen, wie die durch Schwankungen des magnetischen Moments mit der Temperatur und durch die Induction bedingten, welche stets sehr klein sind, hier ganz zu vernachlässigen.

In der folgenden Tafel haben wir die Daten unserer Intensitäts-Beobachtungen zusammengestellt, nämlich die Zeit der Beobachtung, die beiden Entfernungen des festen Magnets vom drehbaren und die entsprechenden Ablenkungen des letztern, sodann die auf kleine Amplituden und freie Bewegung reducirte Schwingungsdauer des Ablenkungstabes. Die letzte Columne gibt die Resultate der Rechnung.

Im Freien.

Datum	E	E_1	v	v_1	T	H
Sept. 20.	240mm.	290mm.	5° 3′ 42″,5	2° 50′ 13″,7	3,2363 s	1,9934
Sept. 23.	200	260	8 48 42,5	3 59 15,6	3,2332	1,9647
Oct. 18.	200	260	8 55 16,3	3 59 7,5	3,2392	1,9803
Oct. 19.	230	300	5 46 41,3	2 32 55,0	3,2392	2,0039
Oct. 25.	200	260	8 50 45,0	3 57 46,2	3,2331	1,9855

Im Saal der Sternwarte.

Datum	E	E_1	v	v_1	T	H
Sept. 26.	200mm.	260mm.	9° 10′ 26″,2	4° 7′ 52″,5	3,3093 s	1,8926

Die Beobachtungen im Freien wurden, mit alleiniger Ausnahme derjenigen am 19. October, auf einem steinernen Pfeiler südlich von der Meridianspalte der Sternwarte angestellt. Die am 19. October erfolgte nördlich vom Observatorium auf dem hölzernen Tische, der zu den Declinationsmessungen gedient hatte. Am 23. Sept. wehte zur Zeit der Beobachtung ein sehr heftiger Wind, so dass er zuweilen durch die Fugen des Magnetgehäuses einzudringen vermochte und so die Ablenkungsbeobachtungen etwas störte.

Das Mittel aus den Messungen im Freien gibt also als mittlern Werth der horizontalen Componente der erdmagnetischen Kraft in Bern im Oct. 1859:

$$H = 1{,}9856,$$

mit einem wahrscheinlichen Fehler von $\pm$ 0,0130. Dieser Fehler ist bedeutender als derjenige, der aus den wahrscheinlichen Fehlern der einzelnen Beobachtungsdaten sich ergibt; wir vermuthen, dass dieser Mangel an Uebereinstimmung den folgenden Ursachen zuzuschreiben sei. Die beiden von obigem Mittel am meisten abweichenden Resultate sind die vom 23. Sept. und vom 19. Oct. Am erstern Tage mag, wie schon erwähnt, der heftige Wind einen störenden Einfluss ausgeübt haben, am letztern Tage aber die Veränderung des Beobachtungsortes. Während nämlich der steinerne Pfeiler bloss um 3—4$^{m.}$ nach Süden vom Observatorium entfernt war, stand der hölzerne Tisch, auf welchem am 19. Oct. beobachtet wurde, nach Norden in einer Entfernung von 10$^{m.}$ von demselben, der störende Einfluss des Eisens der Stern warte musste daher am letztern Orte geringer sein. Wie gross aber dieser letztere Einfluss in der Nähe wird, zeigt die Beobachtung vom 26. Sept., welche im Saal der Sternwarte auf dem steinernen Tische am nordwestlichen Fenster angestellt wurde.

Man könnte endlich auch noch an die Variationen der Horizontal-Intensität selbst zur Erklärung der obigen Abweichung denken. Nach den zahlreichen Beobachtungen an Bifilarmagnetometern auf verschiedenen magnetischen Observatorien beträgt indessen der Werth der letztern nur in seltenen Fällen, wahrscheinlich nur bei Störungen, $\frac{1}{200}$ der ganzen Intensität.

Gestützt auf die S. 57 aufgestellte Relation lässt sich nun aus dem vorstehenden Werthe von H und dem Werthe der Inclination S. 57 die erdmagnetische Kraft K in Bern für den October 1859 berechnen. Man findet:

$$K = 4{,}489,$$

d. h. die ganze erdmagnetische Kraft würde einem ponderabeln Körper von $1^{\text{mgr.}}$ Masse, an dem die Einheit der magnetischen Flüssigkeitsmenge haftet, in einer Secunde die Endgeschwindigkeit 4,489 in der durch Declination und Inclination bestimmten Richtung ertheilen. Die Einheit der magnetischen Flüssigkeitsmenge aber ist diejenige, welche zwei ponderable Massen besitzen müssen, damit, wenn die eine fest ist und die andere bewegliche die Masse von $1^{\text{mgr.}}$ hat, der letztern durch die gegenseitige Einwirkung bei $1^{\text{mm.}}$ Abstand in einer Secunde die Endgeschwindigkeit 1 ertheilt werde.

Wir haben endlich noch einen Vergleich angestellt der Horizontal-Intensität im physikalischen Auditorium der Hochschule, wo die Inclinationsmessungen gemacht worden waren, mit derjenigen auf der Sternwarte, indem wir nämlich möglichst schnell nacheinander die Schwingungsdauern eines und desselben Magnetstabs an beiden

Orten bestimmten. Da nach Gleichung 1) S. 58, die Intensität dem Quadrat der Schwingungsdauer umgekehrt proportional ist, so hat man die Relation:

$$\frac{H}{H_1} = \frac{T_1^2}{T^2},$$

wo die Grössen ohne Strich auf den einen Ort, die mit Strich auf den andern sich beziehen. Wir fanden so für das physikalische Auditorium den Werth:

$$H_1 = 2{,}006.$$

Da die erdmagnetische Kraft eines Ortes beständigen Aenderungen, sowohl ihrer Richtung als Grösse nach unterworfen ist, so haben Messungen über dieselbe nur dann einen bleibenden Werth, wenn sie längere Zeit hindurch fortgesetzt werden. Wir werden dies thun und dabei bemüht sein, nicht nur die Beobachtungsinstrumente sondern auch die Beobachtungsmethoden zu vervollkommnen und so eine grössere Genauigkeit der Resultate zu erzielen.