Ueber den Gebrauch des Integrationsweges

Autor(en): **Schläfli, L.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1862)**

Heft 529-530

PDF erstellt am: **17.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-318727

Nr. 529 u. 530.

L. Schläfli.

Ueber den Gebrauch des Integrationsweges.

(Eingereicht im December 1862.)

Ein bestimmtes einfaches Integrat ist im Allgemeinen durch seine zwei Gränzen noch nicht hinreichend definirt, sondern es muss noch gesagt werden, welche Reihe von Werthen die unabhängige Variable (das Argument) von der untern Gränze an bis zur obern durchlaufen soll. Diese Reihe von Werthen nenne ich den Integrationsweg. Ich nenne ferner Klippe der Integralfunction jeden Werth des Arguments, für den das Integral seine Convergenz, also auch seine Bedeutung verliert. So ist z. B. $x=0$ eine Klippe für die Function $x^{1/2}$; man kann die ganze Variation dieser Function nicht angeben, wenn x von einem negativen Anfangswerthe $-a^2$ durch reelle Werthe hindurch bis zu einem positiven Endwerthe b^2 geführt wird; nimmt man z. B. ia als Anfangswerth der Function, so gelangt man mit dieser zwar sicher zu Null, kann sie aber von hier an nicht weiter fortführen, da in der Continuität kein Zwang liegt, der Function von da an entweder positive oder negative Werthe zu geben. Um sämmtliche Zahlen zu versinnlichen, ziehen wir in einem ebenen Felde zwei auf einander senkrechte Axen und nehmen die reelle Componente irgend einer gegebenen Zahl als Abscisse, die imaginäre als Ordinate des Punktes, der diese Zahl darstellen soll. Der positive Werth des Strahls, der vom

Ursprunge nach dem gegebenen Punkte hingeht, ist dann der absolute Werth der entsprechenden Zahl und der Polarwinkel, den der Strahl mit der Abscissenaxe bildet, deren Phase. Wenn k das positive Unendliche bedeutet, so wollen wir die Gegenden k, ik, — k, — ik des Feldes resp. mit Ost, Nord, West, Süd benennen, um Figuren zu sparen. Führen wir nun das Argument x jener Function $x^{1/2}$ nördlich an der Klippe Null vorbei, so behält die Function ihre Continuität und langt von da aus nothwendig beim Werthe b an; ihre ganze Variation ist daher b — ia. Führen wir aber das Argument x südlich an der Klippe Null vorbei, so langen wir mit der Function beim Werthe — b an, und dann ist — b — ia die ganze Variation der Function. Wenn man also im Integrale $\int_{-a^2}^{b^2} \frac{1}{2} x^{-1/2} dx$ an der untern Gränze $x^{-1/2} = -\frac{i}{a}$ setzt, so hat dasselbe entweder den Werth b — ia oder den Werth — b — ia, je nachdem der Integrationsweg nördlich oder südlich an der Klippe Null vorbeiführt.

Es seien a, b, c, ... l, m, n, p, dicht auf einanderfolgende Werthe des Arguments x, welche einen Integrationsweg ausmachen, und die entsprechenden Werthe der Integralfunction seien A, C, D, ... M, N, P, also a die untere, p die obere Gränze. Das bestimmte Integral hat dann die Form (B—A) + (C—B) + (D—C) + ... + (M—L) + (N—M) + (P—N) = P—A, wo es freistehen muss, alle einzelnen Unterschiede so klein zu machen, als man nur will. So lange als diese Freiheit nicht beeinträchtigt wird, hat das Integral einen Sinn.

Aendern wir nun den Integrationsweg ein wenig, indem wir den Anfang a und das Ende p festhalten, aber die Zwischenstationen, b, c, ... n um kleine Strecken erster Ordnung auf dem Felde seitwärts schieben, so werden von den Werthen der Integralfunction nur A und P bleiben, aber B wird zu $B + \mathfrak{B}$, C zu $C + \mathfrak{C}$, ... N zu $N + \mathfrak{N}$, wo die Incremente $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... $\mathfrak{N}$ sämmtlich sehr klein erster Ordnung sind. Das bestimmte Integral, als Summe seiner Elemente aufgefasst, erhält also den Zuwachs $\mathfrak{B} + (\mathfrak{C}-\mathfrak{B}) + (\mathfrak{D}-\mathfrak{C}) + \ldots + (\mathfrak{M}-\mathfrak{L}) + (\mathfrak{N}-\mathfrak{M}) + (-\mathfrak{N}) = 0$, und alle einzelnen Elemente dieses Zuwachses sind sehr klein zweiter Ordnung. So lange nun diese Vorstellung nicht gehemmt wird, kann man den Prozess der Verschiebung des Integrationsweges wiederholen; dieser wird endlich eine endliche Veränderung erfahren haben, aber immer wird das bestimmte Integral $P - A$ dasselbe geblieben sein. Anders wird die Sache, wenn der Faden des Integrationsweges in die Nähe einer Klippe kömmt; er kann nun nicht über diese hinüber geschafft werden. Läge z. B. die Station e in der Nähe einer solchen Klippe, so würde die Variation $\mathfrak{E}$ der Function E in der Richtung gegen die Klippe hin und darüber hinaus ihre Bedeutung verlieren, weil sie nicht mehr sehr klein erster Ordnung gemacht werden könnte. Und wenn der Faden des Integrationsweges jenseits der Klippe liegt, so wird die Integralfunction, obschon sie mit dem Werthe A von der Station a ausgegangen ist, im Allgemeinen nicht wieder mit dem Werthe P auf der Endstation p anlangen.

Wenn $p = a$ ist, kann es sich ereignen, dass $P =$ const. $+ A$, dass also $\mathfrak{P} = \mathfrak{A}$ ist. Dann kann man auch den Punct, in dem die Anfangsstation und die Endstation des Integrationsweges sich vereinigen, verschieben, ohne dass der Werth des bestimmten Integrals sich ändert. Dieses gilt z. B. von der Function log x, wenn $x = re^{i\varphi}$ gesetzt, der absolute Werth r constant gelassen und die Phase φ durch wachsende reelle Werthe von a bis $a + 2\iota\pi$ geführt wird. Die ganze Variation der Function $\{ \log x \} = \int \frac{dx}{x}$ ist in diesem Falle immer $2i\pi$, wie auch der Integrationsweg sonst beschaffen sein mag, wenn er nur rechtläufig (Ost, Nord, West, Süd, Ost) ein Mal um den Nullpunct herum geht und in sich zurückkehrt. Dehnt man diesen geschlossenen Integrationsweg rings um in die Ferne hin aus und lässt ihn gleichsam den Horizont durchlaufen, so bleibt der Werth des Integrals $\int \frac{dx}{x}$ immerhin $2i\pi$. Man kann dann den Integrationsweg als Schlinge auffassen, die die Klippe Unendlich umschliesst. Beiläufig mag bemerkt werden, dass die analytische Consequenz alle Zahlen, deren absoluter Werth sehr gross ist, als Näherungen gegen eine und dieselbe Zahl Unendlich auffassen heisst. Der sinnlichen Darstellung mittelst des ebenen Feldes kömmt kein Recht zu, dieser Auffassung zu widersprechen; sonst müsste man auch jeder endlichen gegebenen Zahl unzählige Werthe zuerkennen, je nach der Phase des Increments, mittelst dessen man von dieser gegebenen Zahl sich so wenig als möglich entfernt. Es ist nun ferner auch klar, dass für jeden rechtläufig ein Mal geschlossenen Integrationsweg $\int \frac{dx}{x - a}$ entweder $= 2i\pi$ oder $= 0$ ist, je nachdem derselbe die Klippe $x = a$ einschliesst oder nicht.

Ich will nun an einigen Beispielen zeigen, wie dieser Begriff des Integrationsweges zu gebrauchen ist.

I. Wenn die reelle Componente von 0 zwischen a und 1 liegt, so ist das bestimmte Integral $I = \int\limits_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x}$, wo der .Integrationsweg zunächst in gerader Linie vom Nullpunct nach Ost geht, an beiden Grenzen convergent. Denn an der untern Gränze hält die Integralfunction mit $\frac{1}{a}x^a$, an der obern mit $\frac{1}{1-a}\left(\frac{1}{x}\right)^{1-a}$ gleichen Schritt. Ausser Null und Unendlich hat sie nur noch eine Klippe, $x = -1$. Dem Horizont entlang verschwindet die ganze Variation der Integralfunction. Wir dürfen also den Integrationsweg am Horizont hin von Ost über Süd nach West führen, den Faden in $-k$ befestigen und nun anziehen, wenn wir nur die Klippe -1 nicht überschreiten. Stellen wir die Bewegung des Fadens durch $x = re^{-i\varphi}$ dar, wo φ von o bis π geht, so ist klar, dass $x^{a-1}dx$ die Form $e^{-ia\varphi}r^{a-1}dr$ annimmt und durch stetige Veränderung nothwendig bei $e^{-ia\pi}t^{a-1}dt$ anlangt, wenn wir zuletzt x in $-t$ umsetzen. Wir haben dann
$I = e^{-ia\pi}\int\frac{t^{a-1}dt}{1-t}$, also $e^{ia\pi}\,I = \int\frac{t^{a-1}dt}{1-t}$.

Der auf x bezügliche Integrationsweg, der nun im Ganzen vom Nullpunct aus gerade gegen West geht, muss aber der Klippe -1 südlich ausweichen. Der auf t bezügliche Integrationsweg ist über Süd in die alte Lage zurückgedreht, weicht also der Klippe $t = 1$ nördlich aus, und verfolgt sonst vom Nullpunct an den geraden Weg nach Ost. — Wenn wir aber den anfänglichen Integrationsweg von Ost über Nord nach West führen, in $-k$ befestigen und nun anziehen, so bekommen wir

$e^{-ia\pi}\, I = \int \frac{t^{a-1}dt}{1-t}$, wo aber der auf t bezügliche Integrationsweg der Klippe $t = 1$ südlich ausweicht. Wir wollen jetzt die zweite Formel von der ersten abziehen, und stellen zu diesem Zweck beide so dar:

$$-e^{-ia\pi}\, I = \int \frac{t^{a-1}dt}{t-1}, \text{ Nullpunct, südl. um 1 herum, Ost;}$$

$$e^{ia\pi}\, I = \int \frac{t^{a-1}dt}{t-1}, \text{ Ost, nördl. um 1 herum, Nullpunct.}$$

Die Addition gibt links $2i \sin a\pi.\, I$, rechts ein geschlossenes, rechtläufig die Klippe 1 so nahe, als wir nur wollen, umgebendes Integral. Setzen wir $1 = t + re^{i\varphi}$, wo r sehr klein soll, so reducirt es sich auf $\int\limits_0^{2\pi} i d\varphi = 2i\pi$. Also ist $2i \sin a\pi.\, I = 2i\pi$, d. h. es ist

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

Setzt man $x = \frac{t}{1-t}$, so verwandelt sich diese Formel in

$$\int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{-a}dt = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

d. h. sie gibt den Satz

$$\Gamma(a).\ \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

II. Die Integralfunction $\int e^{-x}\frac{dx}{x}$ hat nur zwei Klippen Null und Unendlich, und kann sich der letztern auf der ganzen östlichen Hälfte des Horizonts nähern; selbst die Richtungen Nord und Süd sind nicht ausgeschlossen. Ihre ganze Variation längs eines östlichen Stücks des Horizonts ist Null. Wenn daher irgend eine

Gegend des östlichen Horizonts als obere Gränze des Integrals angenommen wird, so kann man sie auch durch jede andere Gegend derselben Hälfte des Horizonts, ja selbst durch Nord und Süd ersetzen. Es seien nun a, b zwei endliche Zahlen, welche östlich vom Meridian oder auch auf dem Meridian selbst liegen, die zweite sei nördlicher als die erste. Man führe den Integrationsweg zuerst von a aus in der geraden Richtung vom Nullpunct weg, also nach der Weltgegend ak. Dieses ist dasselbe, wie wenn man x durch ax ersetzt und das neue x die positiven reellen Werthe von 1 bis ∞ durchlaufen läst. Man erhält $\int_1^\infty e^{-ax} \frac{dx}{x}$.

Man darf aber auch den Integrationsweg östlich vom Nullpunct von a nach b führen und von hier gerade nach bk. Man erhält so $\int_a^b e^{-x} \frac{dx}{x} + \int_1^\infty e^{-bx} \frac{dx}{x}$.

Da beide Ausdrücke gleich sind, so folgt

$$\int_1^\infty (e^{-ax} - e^{-bx}) \frac{dx}{x} = \int_a^b e^{-x} \frac{dx}{x}.$$

Die Integralfunction links hält in der Nähe von $x = o$ mit $(b - a)\,x$ gleichen Schritt, ist also hier convergent. Wir wünschen daher als untere Gränze o statt 1 zu setzen und müssen für diesen Zweck

$$\int_0^1 (e^{-ax} - e^{-bx}) \frac{dx}{x} = \int_0^1 (1 - e^{-bx}) \frac{dx}{x} - \int_0^1 (1 - e^{-ax}) \frac{dx}{x}$$

addiren. Aber $\int_0^1 (1 - e^{-ax}) \frac{dx}{x} = \int_0^a (1 - e^{-x}) \frac{dx}{x}$, wenn ax in x verwandelt wird, der Integrationsweg führt im letzten

Ausdruck gerade von o nach a hin. Wir müssen also $\int\limits_a^0 (1-e^{-x})\frac{dx}{x} + \int\limits_0^b (1-e^{-x})\frac{dx}{x} = \int\limits_a^b (1-e^{-x})\frac{dx}{x}$ addiren. Denn der Integrationsweg von a gerade gegen 0 und von hier gerade gegen b kann durch einen andern ersetzt werden, der östlich vom Nullpunct von a gegen b hin führt. Wir bekommen also

$$\int\limits_0^\infty (e^{-ax}-e^{-bx})\frac{dx}{x} = \int\limits_a^b \frac{dx}{x}.$$

Es ist erlaubt, in dieser allgemeinen Formel $a = -i$, $b = i$ zu setzen. Wenn man dann mit 2i dividirt, so erhält man

$$\int\limits_0^\infty \sin x. \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

III. Wir bleiben bei der Integralfunction $\int e^{-x}\frac{dx}{x}$, wollen aber noch etwas nachholen, was wir im Eingange zu sagen unterlassen haben. So oft n eine ganze nicht nulle Zahl ist, ist $\int x^{n-1}dx = \left\{\frac{1}{n}x^n\right\} = 0$, aber $\int\frac{dx}{x} = \left\{\log x\right\} = 2i\pi$, wenn der Integrationsweg rechtläufig ein Mal um $x = o$ herumgeht und in sich zurückkehrt. Daraus folgt $\int f(x)\frac{dx}{x-a} = 2i\pi f(a)$, wenn der Integrationsweg rechtläufig nur die Klippe a ein Mal umschliesst, natürlich unter der Voraussetzung, dass $f(a+t)$, wenn nur t absolut klein genug angenommen wird, nach steigenden ganzen Potenzen von t entwickelt werden kann. Denn man bekömmt dann $f(a).\int\frac{dt}{t} + f'(a).\int dt + \frac{1}{2}f''(a)\int t\,dt +$ etc. Dieser

Satz war auch in § I unmittelbar auf $\int \frac{x^{a-1}dx}{x-1}$ anzuwenden, als der Integrationsweg rechtläufig um 1 ein Mal herum gieng. Wenn dagegen die Schlinge des Integrationsweges keine Klippe der Integralfunction umschliesst, so ist das bestimmte Integral immer null.

Es sei nun a eine positive endliche Zahl. Führen wir den Integrationsweg in der Distanz — a vom Meridian (also westlich) von Nord nach Süd, dann dem Horizont entlang über Ost nach Nord zurück, so bildet er eine rechtläufige Schlinge um den Nullpunct, und es ist $\int e^{-x}\frac{dx}{x} = 2i\pi$. Führen wir aber den Integrationsweg in der Distanz a vom Meridian (also östlich) von Nord nach Süd und von da längs des Horizonts über Ost nach Nord zurück, so umschliesst die Schlinge den Nullpunct nicht; also ist $\int e^{-x}\frac{dx}{x} = 0$. In beiden Fällen verschwindet aber diejenige ganze Variation der Integralfunction, welche dem durchlaufenen Stücke des Horizonts entspricht. Wir haben daher nur resp. — a — ix, a — ix statt x zu setzen und das neue x die reellen Werthe von — ∞ bis ∞ durchlaufen zu lassen. Also ist

$$e^{a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix}\frac{-idx}{-a-ix} = 2i\pi,\quad e^{-a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix}\frac{-idx}{a-ix} = 0.$$

Man vereinige in jedem dieser Integrale die untere Hälfte, nachdem man darin x in — x umgesetzt hat, mit der obern und reducire, so erhält man

$$\int_0^{\infty}\frac{a\cos x + x\sin x}{a^2+x^2}\,dx = \pi e^{-a},\quad \int_0^{\infty}\frac{a\cos x - x\sin x}{a^2+x^2}\,dx = 0;$$

Gränze, welche einzig in Frage kömmt, convergent.

also $$\int_0^\infty \frac{a\cos x}{a^2+x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{x\sin x}{a^2+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\cdot\pi e^{-a}.$$

Für a = 0 gibt die zweite Integralformel den Satz $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ wieder. Setzt man x in ax um, so kömmt

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{x\sin ax}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,e^{-a}.$$

IV. Die Integralfunction $\int e^{-x^2} dx$ hat nur Unendlich zur Klippe und kann dieser in den Quadranten (Südost, Ost, Nordost) und (Nordwest, West, Südwest) sich nähern. Ihre ganze Variation längs dieser Theile des Horizonts verschwindet. Führt der Integrationsweg gerade von Null nach Ost, so ist $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ (positiv zu verstehen). Man darf also den Integrationsweg auch von Null gerade gegen Nordost führen, d. h. man darf x in $(\sqrt{\tfrac{1}{2}} + i\sqrt{\tfrac{1}{2}})\,x$ umsetzen und das neue x die positiven Werthe von 0 bis ∞ durchlaufen lassen. Man erhält, wenn man mit $\sqrt{\tfrac{1}{2}} - i\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ multiplicirt, $\int_0^\infty e^{-ix^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.(1-i)$, d. h.

$$\int_0^\infty \cos x^2 .\, dx = \int_0^\infty \sin x^2 .\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Da $\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}x}\left(\frac{\sin x^2}{x}\right) = 2\cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2}$, $\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}x}\left(\frac{\cos x^2}{x}\right) = -2\sin x^2 - \frac{\cos x^2}{x^2}$, so sind beide Integrale an der obern

V. Wenn a eine reelle Zahl bedeutet, $0 < a < 1$, so ist $\int \log(1 + ax)\frac{dx}{x} = 0$, wenn der Integrationsweg rechtläufig ein Mal durch alle Zahlen geht, deren absoluter Werth 1 ist. Denn er umschliesst dann zwar $x = 0$, was keine Klippe ist, da in dieser Gegend die Integralfunction mit ax Schritt hält, aber nicht die Klippe $x = -\frac{1}{a}$, weil der absolute Werth derselben grösser als 1 ist. Setzen wir nun $x = e^{i\varphi}$ und lassen φ die reellen Werthe von $-\pi$ bis π durchlaufen, so erhalten wir, mit Unterdrückung des constanten Factors i,

$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \log.(1 + ae^{-i\varphi})\, d\varphi = 0$, und wenn wir in der untern Hälfte des Integrals φ durch $-\varphi$ ersetzen, und sie dann mit der obern Hälfte vereinigen,

$$\int\limits_0^{\pi} \log\,(1 + 2a\cos\varphi + a^2)\, d\varphi = 0.$$

Diese Formel ist selbst dann noch richtig, wenn $a = 1$ wird, und gibt in diesem Falle

$$\int\limits_0^{\pi/2} \log\,(2\cos\varphi).\, d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \log\,(2\sin\varphi).\, d\varphi = 0.$$

Wendet man auf beide Formeln die Substitution $\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} = \frac{1+a}{1-a}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ an, so erhält man

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\log(2\sin x)}{1 - 2a\cos x + x^2}\, dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{\frac{1}{2}\log\,(1 - 2\,a\cos x + a^2)}{1 - 2\,a\cos x + a^2} = \frac{\pi \log\,(1 - a^2)}{1 - a^2}.$$

Schlussbemerkung. Die hier aufgeführten Integralformeln stehen in allen Lehrbüchern, werden aber meist mit Hülfe von Doppelintegralen bewiesen. Ich wollte nur zeigen, dass man für diesen Zweck weder Doppelintegrale, noch unendlicher Summen oder Producte bedarf.

Verzeichniss der für die Bibliothek der Schweizer. Naturf. Gesellschaft eingegangenen Geschenke.

Von der fürstlichen Jablonowskischen Gesellschaft zn Leipzig:
Preisschriften IX. Leipzig 1862. 8.

Vom Herrn Verfasser:
Favre: Note sur la présence en Savoie de la ligne anticlinale de la molasse qui traverse la Suisse et une portion de la Bavière. 8.
2) Favre: Explication de la carte géologique des parties de la Savoie, du Piémont et de la Suisse voisines du Montblanc. Genève 1862. 8.
3) Favre: Note sur la carte géologique des parties de la Savoie, du Piémont et de la Suisse, voisines du Montblanc. 4.

Von der Società italiana di scienze nationali:
Atti, vol. IV., fasc. 3. Milano 1862. 8.

Von dem niederösterreichischen Gewerbe-Verein:
Verhandlungen und Mittheilungen, Jahrg. 1862, Heft 11. Wien 1862. 8.

Von der Redaktion:
Anzeigeblatt und Ergänzungsheft zur schweiz. Zeitschrift für Pharmacie No. 45. Schaffhausen 1862. 8.

De l'académie royale de Bruxelles:
1) Mémoires. Tome 33. Bruxelles 1861. 4.
2) Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers. Tome 30. Br. 1861. 4.
3) Mémoires couronnés et autres mémoires. Tomes 11. 12. Brux. 1862. 8.
4) Bulletin 30ème année, 2ème Série. Tomes 11. 12. Brux. 1861. 8.
5) Annuaire. 28ème année. Brux. 1862. 8.