Friedrich Geiser.
Docent am eidgenössischen Polytechnikum.

Ueber eine geometrische Verwandtschaft des zweiten Grades.

Vorgelegt von Dr. Sidler am 22. April 1865.

1) In Bezug auf einen festen Punkt P und einen festen Kegelschnitt K kann jedem Punkte p in der Ebene ein anderer p_1 zugeordnet werden, indem man die Gerade pP zieht, welche K in k_1 und k_2 schneiden möge, und nun zu p, k_1 und k_2 den vierten harmonischen p zugeordneten Punkt p_1 construirt. Einem Punkte p entspricht im Allgemeinen stets ein und nur ein Punkt p_1, während diesem wiederum der urprüngliche p conjugirt ist; die aufgestellte Beziehung ist also eindeutig und reziprok.

Eine besondere Betrachtung erfordert der Punkt P und die Punkte Q und R, in welchen die Polare von P den Kegelschnitt K schneidet, oder was dasselbe ist: die Berührungspunkte Q und R der von P aus an K gelegten Tangenten *). Fällt nämlich p mit P zusammen, so wird die Richtung der Geraden pP unbestimmt und wir können deshalb p_1 auf der Polaren von P beliebig wählen. Für einen der Punkte Q und R ist zwar pP bestimmt; aber, da diese Gerade Tangente an den Kegelschnitt K ist, so fallen die Punkte k_1, k_2, p zusammen und der vierte harmonische Punkt p_1 ist auf der Tangente willkürlich. Also: dem Punkte P entspricht die Gerade QR,

*) Unsere Sätze werden immer in der Form ausgesprochen als ob alle zu betrachtenden Elemente reell wären. Dies thut der Allgemeinheit der Resultate keinen Abbruch, denn die Modifikationen für imaginäre Elemente ergeben sich überall von selbst.

dem Punkte Q die Geraden PQ, dem Punkte R die Gerade PR; umgekehrt entspricht jedem Punkte der Geraden QR (Q und R ausgenommen) der Punkt P, jedem Punkt der Geraden QP (P und Q ausgenommen) der Punkt Q und jedem Punkte der Gerade PR (P und R ausgenommen) der Punkt R.

2) Sucht man nun den Ort aller conjugirten Punkte für die Punkte einer Geraden g, so findet man einen Kegelschnitt; denn wenn man die ganze Figur so projicirt, dass g zur unendlich entfernten Geraden der Ebene wird, so reducirt sich der Satz auf den bekannten, dass die Mitten sämmtlicher durch einen festen Punkt gehenden Sehnen eines Kegelschnittes wieder auf einem Kegelschnitte liegen. Für eine Gerade g_1 bekommt man einen zweiten Kegelschnitt, dessen vier Durchschnittspunkte mit dem Kegelschnitt der Geraden g dem Durchschnittspunkt von g und g_1 conjugirt sein sollten. Da aber unsere Beziehung eindeutig und reziprok ist, so tritt hier ein scheinbarer Widerspruch auf, der in folgender Weise gelöst wird Bestimmt man zu einer beliebigen Geraden G den Ort der conjugirten Punkte, so muss dieser die Punkte P, Q, R enthalten, denn G schneidet die Geraden QR, PQ, PR in Punkten, denen die genannten singulären Punkte entsprechen. Die den Geraden g und g_1 entsprechenden Kegelschnitte treffen sich also zunächst in P, Q, R und der vierte Durchschnittspunkt wird nun der conjugirte sein müssen zu dem gemeinsamen Punkte von g und g_1.

Irgend einem Punkte k des Kegelschnittes K (Q und R ausgenommen) entspricht dieser selbe Punkt k, so dass man also leicht mittelst des Lineals allein den Kegelschnitt construiren kann, welcher einer Geraden g entspricht; sind nämlich s_1 und s_2 die beiden Punkte, in welchen K von g geschnitten wird, so ist der gesuchte

Kegelschnitt nach dem Pascal'schen Satze durch die Punkte s_1, s_2, P, Q, R bestimmt. Geht speziell die Gerade g durch einen der singulären Punkte, so zerfällt der Kegelschnitt in zwei Gerade, die sofort gegeben sind, sobald man bedenkt, dass sie die Punkte P, Q, R, s_1 und s_2 immer noch enthalten müssen.

3) Um zu entscheiden, ob einer gegebenen Geraden eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse entspricht, verfahren wir, wie folgt: Der unendlich entfernten Geraden entspricht ein Kegelschnitt K_∞, der durch die Punkte P, Q, R geht. Jedem Punkte dieses Kegelschnittes (P, Q, R ausgenommen) entspricht umgekehrt ein unendlich entfernter Punkt, so dass also einer Geraden g eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse entspricht, je nachdem sie mit K_∞ zwei reelle, zwei zusammenfallende oder zwei imaginäre Punkte gemein hat, d. h. je nachdem sie K_∞ schneidet, berührt oder nicht schneidet. Schneidet g den Kegelschnitt K_∞ in zwei reellen Punkten p und p^1, so bestimmen Pp und Pp^1 die Asymptotenrichtungen der Hyperbel, welche g conjugirt ist. Will man also alle diejenigen Geraden finden, deren conjugirte Kegelschnitte gleichseitige Hyperbeln sind, so braucht man blos um P einen rechten Winkel zu drehen, dessen Scheitel in P selbst liegt, und dessen Schenkel K_∞ ausser in P noch in A und B scheiden mögen: dann wird jede Gerade AB eine gleichseitige Hyperbel erzeugen. Alle diese gleichseitigen Hyperbeln gehen durch P Q R und demzufolge auch durch den Höhenpunkt des von ihnen gebildeten Dreiecks. Durch den, diesem Höhenpunkt conjugirten Punkt gehen somit alle jene Geraden AB. Wird nun noch bewiesen, dass zu einem gegebenen Kegelschnitt K_∞ und einem beliebig auf demselben gewählten Punkte P stets ein ursprünglicher Kegelschnitt K gefunden werden kann,

so folgt der Satz: Bleibt der Scheitel des rechten Winkels in einem rechtwinkligen Dreiecke fest in einem beliebigen Punkte auf dem Umfange eines Kegelschnittes, während die beiden andern Ecken beliebig auf diesem Umfange sich bewegen, so geht die Hypotenuse stets durch einen festen Punkt.

Wenn man umgekehrt diesen Satz voraussetzt, was naturgemässer ist, so folgt, dass alle gleichseitigen Hyperbeln die drei bestimmte Punkte gemein haben; nothwendig noch durch einen vierten gehen. Uebrigens gilt noch allgemeiner der Satz: Dreht man um einen festen Punkt P auf dem Umfange eines beliebigen Kegelschnittes einen constanten Winkel, dessen Schenkel ausser in P den Kegelschnitt noch in A und B scheiden mögen, so ist AB stets Tangente eines zweiten Kegelschnittes. Will man also einem Dreieck eine Schaar ähnlicher Kegelschnitte umschreiben, so wird dies geschehen können, indem man einfach die Geraden transformirt, die einen gewissen Kegelschnitt berühren. Es entsteht dann durch Transformation die Schaar der gesuchten Kegelschnitte, die nun eine Curve vierten Grades berühren, welche die Ecken des Dreiecks zu Doppelpunkten hat. Sollen die ähnlichen Kegelschnitte Parabeln sein, so muss man die Tangenten von K_x transformiren, und die zugehörige Curve vierten Grades zerfällt dann in die drei Seiten des Dreiecks und die unendlich entfernte Gerade.

Die vorstehenden Betrachtungen bieten einen Ausgangspunkt zur Untersuchung der Schaar-Schaar von Kegelschnitten, welche durch gegebene drei Punkte gehen, denn man kann sie auf diese Weise als den sämmtlichen Geraden der Ebene entsprechend ansehen. Aehnlich gewinnen wir die Hülfsmittel zur Untersuchung der Schaar von Kegelschnitten, welche durch vier gegebene

Punkte gehen etc. Unsere Absicht ist aber, diesen Gegenstand spätern Mittheilungen aufzubehalten, die zeigen werden, wie aus den Eigenschaften von Geraden in ihrem Zusammenhang die Eigenschaften von Kegelschnitten in ihrem Zusammenhang hergeleitet werden können.

4) Der Anwendung des aufgestellten Prinzipes zur Untersuchung der Curven höherer Grade stellt sich die Schwierigkeit entgegen, dass gewisse Singularitäten, die mit der Theorie der vielfachen Punkte zusammenhängen, nicht umgangen werden können, wie schon das einfachste sich darbietende Beispiel lehrt. Den Punkten eines Kegelschnittes k entspricht als Ort der zugeordneten Punkte eine Curve vierten Grades, denn dieser Ort wird von einer beliebigen Geraden in so vielen Punkten geschnitten, als der Kegelschnitt k von dem Kegelschnitte, welcher der angenommenen Geraden entspricht. Zwei Kegelschnitte können aber nur 4 Punkte gemein haben, der gesuchte Ort hat also mit jeder Geraden der Ebene vier Punkte gemein, und ist somit vom vierten Grade. Der Kegelschnitt k geht zweimal durch jede der Gera, den QR, PQ, PR, also die Curve vierten Grades zweimal durch jeden der Punkte P, Q, R, d. h. diese Punkte sind Doppelpunkte der Curve. Man kann auch leicht die Anzahl der Tangenten bestimmen, welche im Allgemeinen von einem Punkt p aus an diese Curve gelegt werden können, denn eine solche Tangente ist die reziproke Figur eines Kegelschnittes, der durch P, Q-R, p_1 geht und zugleich den Kegelschnitt k berührt. Solcher Kegelschnitte gibt es aber 6, folglich ist die Curve von sechster Klasse. Geht im Besondern k durch einen der singulären Punkte, z. B. Q, dann zerfällt die Curve vierten Grades in eine Gerade, PQ, und eine Curve drit-

ten Grades, welche R zum Doppelpunkte hat; geht k durch 2 der Punkte, z. B. Q und R, so zerfällt die Ortscurve in 2 Gerade, PQ und PR, und einen Kegelschnitt, und endlich, geht k durch sämmtliche singulären Punkte, sobesteht die Ortscurve aus 4 Geraden, von denen 3 die Geraden PQ, PR, QR sind.

Man erkennt also, dass die Curven dritten und vierten Grades, welche wir durch unsere Transformation erhalten, resp. 1 und 3 Doppelpunkte haben. Es frägt sich nun, ob umgekehrt, wenn eine Curve dritten und vierten Grades mit 1 oder 3 Doppelpunkten gegeben ist, dann wirklich dieselbe als einem Kegelschnitt entsprechend gedacht werden kann. Dies ist stets der Fall, wie aus Folgendem erhellt: Ist ein Curve vierten Grades mit 3 Doppelpunkten gegeben, so wähle man dieselben zu Punkten P, Q, R, was stets möglich ist, denn der Kegelschnitt K ist erst bestimmt, wenn zu den 2 Tangenten PR und PR und ihren Berührungspunkten noch ein Punkt oder eine Tangente gegeben wird. Greifen wir nun irgend einen dieser Kegelschnitte heraus und transformiren auf ihn die Curve vierten Grades, so wird dieselbe zu einer Curve achten Grades, die aber zerfällt; nämlich da P ein Doppelpunkt ist, so entspricht ihm die Gerade QR doppelt gelegt, ähnlich für Q und R, so dass also die Curve achten Grades aus 6 Geraden und einem Kegelschnitt besteht. Transformirt man endlich diesen Kegelschnitt, so wird man auf die Curve vierten Grades zurückkommen, von der man ausgegangen ist. Aus dieser Bemerkung folgt nun sofort der bekannte Satz, dass bei einer Curve vierten Grades mit drei Doppelpunkten die sechs Tangenten in den letztern ein Brianchon'sches Sechsseit bilden.

Es braucht schliesslich kaum erwähnt zu werden, dass durch Polarisation die gefundenen Resultate in solche sich verwandeln, welche von einer Zuordnung ausgehen, die einer Geraden wieder eine Gerade, einem Punkt einen Kegelschnitt, einem Kegelschnitt eine Curve vierter Klasse mit 3 Doppeltangenten etc. entsprechen lässt. Die Anwendung dieser Zuordnung zur Untersuchung von Kegelschnitten, welche drei oder vier gemeinschaftliche Tangenten etc. haben, folgt dann sofort.

5) Im Raum ergeben sich durchaus analoge Resultate. Einem Punkte p kann in Bezug auf eine feste Fläche F vom zweiten Grad und einen festen Punkt P ein anderer p_1 zugeordnet werden, indem man die Gerade pP zieht, welche F in den Punkten f_1 und f_2 schneiden möge, und nun zu p, f_1, f_2 den vierten harmonischen, p zugeordneten Punkt p_1 bestimmt. Die Zuordnung kann, was in manchen Fällen bequemer ist, definirt werden, indem man statt des Punktes P dessen Polarebene E, in Bezug auf F zu Hülfe nimmt; man findet den Punkt p_1, indem man die Polarebene von p construirt, deren Durchschnitt mit F, der k sein möge und mit E, der mit g bezeichnet werde, sucht, und nun den Pol p_1 von g in Bezug auf k bestimmt. Auch im Raume ist die Beziehung eindeutig und reziprok, d. h. einem Punkte p entspricht im Allgemeinen stets ein und nur ein Punkt p_1, während diesem wiederum der ursprüngliche conjugirt ist. Hievon machen eine Ausnahme der Punkt P und die Punkte des Kegelschnittes K, welchen E und F gemein haben. Dem Punkte P entspricht jeder beliebige Punkt der Ebene E, einem Punkt s des Kegelschnittes K entspricht jeder beliebige Punkt der Geraden Ps, welche Tangente an F ist, umgekehrt entspricht jedem Punkte von E (die Punkte des Kegelschnittes K ausgenommen) der Punkt P, jedem Punkte r des Kegels PK (P und die

Punkte von K ausgenommen) ein Punkt r, auf dem Kegelschnitte K.

6) Einer Geraden g entspricht im Allgemeinen ein Kegelschnitt, der in einer Ebene liegt, welche durch P und g bestimmt ist. Schneidet diese Ebene K in den Punkten k_1 und k_2, so geht der Kegelschnitt durch P, k_1 und k_2. Geht die Gerade im Besondern durch einen Punkt s des Kegelschnitts K, so zerfällt ihr conjugirter Kegelschnitt in 2 Gerade, von denen eine Ps ist. Enthält g den Punkt P, so wird ihr conjugirter Ort bestehen aus g und E. Der Ort der conjugirten Punkte für die Punkte einer Ebene e ist wie die vorhergehenden Betrachtungen lehren, eine Fläche zweiten Grades, denn eine beliebige Gerade wird diesen Ort in so vielen Punkten schneiden, als der ihr conjugirte Kegelschnitt die Ebene e. Da nun eine Ebene von einem Kegelschnitt nur in 2 Punkten geschnitten werden kann, so folgt, dass eine Gerade mit der gesuchten Fläche nur zwei Punkte gemein haben kann; diese ist also eine Fläche zweiten Grades. e und E schneiden sich in einer Geraden, welcher der Punkt P entspricht. Der Kegel PK hat mit e einen Kegelschnitt gemein, dem der Kegelschnitt K entspricht. Also: der Ort der conjugirten Punkte zu den Punkten einer Ebene ist eine Fläche zweiten Grades, die den Punkt P und den Kegelschnitt K enthält.

7) Da man keine Voraussetzungen über die Flächen zweiten Grades zu machen braucht, als dass sie von allen Ebenen in Kegelschnitten geschnitten werden, so kann man das aufgestellte Transformationsprinzip dazu benutzen, weitere Eigenschaften dieser Flächen zu finden. Zunächst beweist man, dass zwei Schaaren von Geraden gefunden werden können, die ganz auf der Fläche zweiten Grades liegen. Denn seine g_1, g_2 .... Gerade, welche

durch k_1 oder k_2 (die Schnittpunkte von e mit K) gehen, so werden die ihnen entsprechenden Kegelschnitte in Geraden zerfallen, so dass wir (ausser den beiden Geraden Pk_1 und Pk_2) 2 Schaaren von Graden bekommen, die auf der Fläche zweiten Grades liegen müssen, welche e entspricht. Sofort erkennt man auch, dass jede Gerade der einen Schaar von jeder Geraden der andern Schaar geschnitten wird, dass aber nie 2 Gerade, die derselben Schaar angehören, einander schneiden können, Legt man also eine Ebene durch eine Gerade der einen Schaar, so wird noch eine andere Gerade der andern Schaar ausgeschnitten. Eine Ebene, welche aus einer Fläche zweiten Grades zwei Gerade ausschneidet, ist aber die Tangentialebene an dieselbe im Schnittpunkte der beiden Geraden, denn wenn durch diesen Punkt irgend eine dritte Gerade in der Ebene gezogen wird, so wird diese Gerade die Fläche zweiten Grades ausser in dem Schnittpunkte jener beiden Geraden nirgends mehr treffen können.

Vermittelst der Fläche F_∞, welche der unendlich entfernten Ebene des Raumes entspricht, kann man nun die Flächen zweiten Grades eintheilen. Einer Ebene e, welche F_∞ nicht schneidet (d. h. sie in einem imaginären Kegelschnitte schneidet) entspricht eine Fläche zweiten Grades, welche keine reellen Punkte im Unendlichen hat, ein Ellipsoid. Wenn e die Fläche F_∞ berührt, so können die durch e ausgeschnittenen Geraden reell oder imaginär sein und dann müssen nothwendig auch die Punkte, in denen e und K sich schneiden, reell oder imaginär sein. Die entsprechende Fläche von e hat dann zwei reelle oder imaginäre Gerade im Unendlichen (die unendlich entfernte Ebene ist nach Früheren also eine Tangentialebene) und heiszt hyperbolisches oder elliptischer Paraboloid. Haben e und F_∞ einen reellen Kegelschnitt gemein, so wird die e zugehörige Fläche ein Hyperboloid und zwar ein hyperbolisches oder elliptisches, je nachdem die Schnittpunkte von e und K reell oder imaginär sind*). Derselbe Grundsatz, welcher hier die Unterseheidung der Flächen zweiten Grades gab, liefert auch die Construction des hyperbolischen Hyperboloids aus 3 Geraden die derselben Schaar angehören, ebenso die Construction des hyperbolischen Paraboloids. Man kann nämlich leicht P und F so wählen, dass irgend drei Gerade im Raum transformirt werden zu 3 Geraden in einer Ebene, die durch denselben Punkt gehen.

8) Der Ort der conjugirten Punkte für sämmtliche Punkte einer Fläche zweiten Grades f ist eine Fläche vierten Grades φ, die den Kegelschnitt K zur Doppelpunktscurve hat; da jede durch P gehende Ebene mit der Ortsfläche eine Curve gemein hat, welche P zum Doppelpunkt hat, so ist P ebenfalls ein Doppelpunkt der Fläche. Legt man von P aus sämmtliche Tangentialebenen an f (die einen Kegel zweiter Klasse oder zweiten Grades bilden) so werden dieselben auch Tangentialebenen an φ sein, und aus dieser, entsprechend zweien Geraden auf f, zwei Kegelschnitte ausschneiden. Diese haben 4 gemeinschaftliche Punkte, von denen der eine P festbleibt, 2 andere bewegen sich auf K und der Ort des vierten ist eine Raumcurve vierten Grades. Von besonderer Wichtigkeit sind die vier Punkte s_1, s_2, s_3, s_4 in denen f und K sich schneiden, denn man erkennt sofort, dass die Geraden $Ps_1 \ldots Ps_4$ auf φ liegen; eine Ebene welche durch 2 derselben geht, wird also noch

*) Die Bezeichnung hyperbolisches und elliptisches Hyperboloid ist die ältere, in neuerer Zeit verlassen. Das erste heisst jetzt Hyperboloid mit einer Mantelfläche, das zweite Hyperboloid mit zwei Mantelflächen.

einen Kegelschnitt ergeben welcher ebenfalls auf φ liegt. Verbindet man irgend zwei dieser merkwürdigen Punkte, z. B.: s_1 und s_2 durch eine Gerade, so wird jede Ebene e, die durch eine solche Gerade geht mit f einen Kegelschnitt k gemein haben, dessen transformirte Figur (abgesehen von Ps_1 und Ps_2) wieder ein Kegelschnitt ist. Dieser Kegelschnitt geht durch s_1 und s_2 und liegt auf der Fläche zweiten Grades, welche e entspricht; ferner liegt er auf φ und schliesslich gehört er der Ebene an, welche durch Transformation der Fläche zweiten Grades (kPK) entsteht. In der gleichen Ebene liegt noch ein anderer Kegelschnitt, welcher ebenfalls durch s_1 und s_2 geht etc.

Wir überlassen es dem Leser den Zusammenhang der verschiedenen Kegelschnittschaaren auf der Fläche φ näher zu untersuchen; ebenso treten wir nicht auf die interessanten speziellen Fälle ein, wenn f zum Kegel oder zu 2 Ebenen wird, oder wenn f durch den Punkt P geht (im letztern Falle entsteht eine eigenthümliche Fläche dritten Grades, welche die Eigenschaft hat, dass von ihren 27 Graden 7 durch einen und denselben Punkt gehen), denn es war uns mehr daran gelegen zu zeigen, wie durch das entwickelte Prinzip nach verschiedenen Richtungen hin fruchtbare Resultate sich finden lassen müssen, als einzelne Untersuchungen in sich abgeschlossen zu geben. Im Uebrigen verweisen wir auf Steiners »Syst. Entwicklung § 59,« die, wie man leicht erkennen wird, den Anstoss zu unsern Betrachtungen gegeben hat.