Potential einer elliptischen Scheibe von der Dichtigkeit 1, deren Punkte den Gleichungen x²/A + y²/B 1, z = 0 genügen, abgeleitet mittelst des discontinuirlichen Faktors von Dirichlet

Dr. U. Bigler.

Potential einer elliptischen Scheibe

von der Dichtigkeit 1,

deren Punkte den Gleichungen $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} \leqq 1$, $z = 0$ genügen,

abgeleitet mittelst des discontinuirlichen Faktors von Dirichlet.

Eingereicht den 22. Januar 1887.

Die Coordinaten des Bezugspunktes seien a, b, c; diejenigen eines Punktes der elliptischen Scheibe x, y. Wird nun die Entfernung dieser beiden Punkte mit r bezeichnet, so ist eine erste Form des Potentials

$$1) \qquad \text{Pot.} = \iint \frac{d\,x\,d\,y}{r}$$

wo sich die Integration über alle Punkte der Scheibe ausdehnt. Ist N eine sehr grosse positive Zahl, so ist

$$2) \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^N e^{-r^2 \chi} \cdot \chi^{-1/2}\, d\chi.$$

Ich betrachte nun das Integral $\int \frac{e^{bt} - e^{at}}{t^{1+c}} d\,t.$ Der Weg desselben sei eine aus dem Westpunkte um den Pol Null geworfene rechtläufige Schlinge. Damit dieses Integral convergire, müssen die reellen Componenten von a und b positiv sein. Damit ferner der Pol 0 zugänglich werde, nehme ich an, c sei ein positiver, ächter Bruch ($0 < c < 1$). Zieht man nun die Schlinge auf die Realitätslinie von $-N$ bis 0 zusammen, so folgt

$$\int \frac{e^{bt}-e^{at}}{t^{1+c}} \cdot dt = e^{i\pi(1+c)} \cdot \int_{-N}^{0} \frac{e^{bt}-e^{at}}{(-t)^{1+c}} \cdot dt +$$

$$+ \; e^{-i\pi(1+c)} \cdot \int_{0}^{-N} \frac{e^{bt}-e^{at}}{(-t)^{1+c}} \cdot dt.$$

$$= \left(e^{i\pi(1+c)} - e^{-i\pi(1+c)}\right) \int_{0}^{N} \frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t^{1+c}} \, . \, dt.$$

$$3) \quad \int \frac{e^{bt}-e^{at}}{t^{1+c}} = -\frac{2i\pi}{\Gamma(c)\,\Gamma(1+c)} \cdot \int_{0}^{N} \frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t^{1+c}} \cdot dt.$$

Nach der bekannten Formel

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \frac{1}{2i\pi} \int e^{x} x^{-a} \, dx$$

(Weg eine rechtläufige Schlinge aus dem Westpunkte um den Pol 0.)

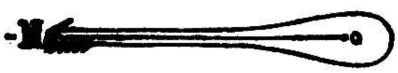
ist aber auch

$$\int e^{bt} t^{-(1+c)} dt = \frac{2 i \pi b^c}{\Gamma(1+c)}$$

und

$$\int e^{at} t^{-(1+c)} dt = \frac{2 i \pi a^c}{\Gamma(1+c)}, \text{ also}$$

$$4) \quad \int \frac{e^{bt} - e^{at}}{t^{1+c}} \cdot dt = \frac{2 i \pi (b^c - a^c)}{\Gamma(1+c)}$$



Aus Gleichung (3) und (4) folgt

$$5) \quad \int_0^\infty \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t^{1+c}} dt = \frac{\Gamma(1-c). (a^c - b^c).}{c}$$

Lässt man hier c auf 0 herab sinken, so folgt

$$6) \quad \int_0^\infty \frac{e^{-bt} - e^{at}}{t} = \log \frac{a}{b}.$$

Die imaginäre Componente dieses Log. werde ausgedrückt durch die Grösse der Drehung des Strahles aus der Richtung vom Ursprunge nach b bis zur Richtung nach a. Setze ich $a = -ig + i$, $b = -ig - i$, so folgt für $1 < g$, dass

$$2\,i\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\cdot e^{i\,g\,t}\,d\,t = \log\frac{g-1}{g+1}\ \text{ist.}$$

Wenn aber $a = i\,g + i$, $b = i\,g - i$, $1 < g$, so hat man

$$2\,i\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\cdot e^{-i\,g\,t}\,d\,t = \log\frac{g+1}{g-1},$$

folglich

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\left(e^{i\,g\,t} + e^{-i\,g\,t}\right) = 0.$$

Ist hingegen $0 < g < 1$, $a = -i\,g + i$, $b = -i\,g - i$, so ergibt sich

$$2\,i\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\cdot e^{i\,g\,t}\,d\,t = \log\frac{1-g}{1+g} + i\,\pi,$$

und für $0 < g < 1$, $a = +\,i\,g + i$, $b = i\,g - i$ findet man

$$2\,i\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\cdot e^{-i\,g\,t}\,d\,t = \log\frac{1+g}{1-g} + i\,\pi,$$

somit

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\left(e^{i\,g\,t} + e^{-i\,g\,t}\right)d\,t = 1.$$

Ist also in dem Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\cdot\left(e^{i\,g\,t} + e^{-i\,g\,t}\right)dt,\ 0 < g < 1,$$

so ist der Werth desselben 1; ist aber $1 < g$, so ist der Werth Null. Setze ich nun

$$g = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B},$$

$$\Omega = r^2\chi - i\,g\,\varphi,\quad \Omega^1 = r^2\chi + i\,g\,\varphi,$$

so kann dem Potential der elliptischen Scheibe folgende Form gegeben werden:

$$7)\quad \text{Pot.} = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cdot \chi^{-1/2} \left(e^{-\Omega} + e^{-\Omega^1}\right) \times dx\,dy\,dz.$$

In diesem Ausdrucke laufen die Variabeln φ und χ von 0 bis $+\infty$ und die Integrationen nach x und y erstrecken sich über die ganze Ebene $z=0$. Ich beabsichtige nun bei Ω, Ω^1 ein Mal x in ein vollständiges Quadrat einzuschliessen, das andere Mal ebenso y und setze

$$\Omega = x^2\left(\chi - \frac{i\varphi}{A}\right) - 2ax\chi + \frac{a^2\chi^2}{\chi - \frac{i\varphi}{A}} - \frac{i\varphi}{A} \cdot \frac{a^2\chi}{\chi - \frac{i\varphi}{A}}$$

$$+ y^2\left(\chi - \frac{i\varphi}{B}\right) - 2by\chi + \frac{b^2\chi^2}{\chi - \frac{i\varphi}{B}} - \frac{i\varphi}{B} \cdot \frac{b^2\chi}{\chi - \frac{i\varphi}{B}} + c^2\chi.$$

Ist nun

$$\mathfrak{A} = \frac{\sqrt{A\chi - i\varphi}}{\sqrt{A}} \cdot x - \frac{\sqrt{A} \cdot a\chi}{\sqrt{A\chi - i\varphi}}, \quad \mathfrak{B} = \frac{\sqrt{B\chi - i\varphi}}{\sqrt{B}} \cdot y - \frac{\sqrt{B} \cdot b\chi}{\sqrt{B\chi - i\varphi}}$$

$$S = \frac{-i a^2\chi}{A\chi - i\varphi} + \frac{-i b^2\chi}{B\chi - i\varphi} + \frac{c^2\chi}{\varphi};$$

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{\sqrt{A\chi + i\varphi}}{\sqrt{A}} \cdot x - \frac{\sqrt{A} \cdot a\chi}{\sqrt{A\chi + i\varphi}}, \quad \mathfrak{B}_1 = \frac{\sqrt{B\chi + i\varphi}}{\sqrt{B}} \cdot y - \frac{\sqrt{B} \cdot b\chi}{\sqrt{B\chi + i\varphi}},$$

$$S_1 = \frac{i a^2\chi}{A\chi + i\varphi} + \frac{i b^2\chi}{B\chi + i\varphi} + \frac{c^2\chi}{\varphi},$$

so folgt, dass $\Omega = \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + S\varphi$, $\Omega^1 = \mathfrak{A}_1{}^2 + \mathfrak{B}_1{}^2 + S_1\varphi$ ist. Ich wähle denjenigen Werth von $\sqrt{A\chi - i\varphi}$, dessen reelle Componente positiv ist. Man hat also

$$\text{Pot.} = \frac{1}{\pi^{3/2}} \iiiint \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cdot \chi^{-1/2} \times$$

$$\times \left(e^{-(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + S\varphi)} + e^{-(\mathfrak{A}_1{}^2 + \mathfrak{B}_1{}^2 + S_1\varphi)} \right) dx\, dy\, d\varphi\, d\chi.$$

Ich integrire nun zuerst nach x und dann nach y und setze

$$u = \frac{\sqrt{A\chi - i\varphi}}{\sqrt{A}} \cdot x - \frac{\sqrt{A} \cdot a\chi}{\sqrt{A\chi - i\varphi}},\ du = \frac{\sqrt{A\chi - i\varphi}}{\sqrt{A}} \cdot dx;$$

durchläuft nun x die Realitätsline vom Westpunkte bis zum Ostpunkte, so durchläuft u eine Gerade, welche dieselbe unter einem Winkel schneidet, der kleiner als $\frac{\pi}{4}$ ist. Ich darf desshalb den Anfang des u-Weges mit dem Westpunkte und das Ende mit dem Ostpunkte der Realitätslinie verbinden und den Integrationsweg wieder in die Realitätslinie verlegen. Also ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathfrak{A}^2} dx = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A\chi - i\varphi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{2\sqrt{A}}{\sqrt{A\chi - i\varphi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-u^2} du$$

somit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathfrak{A}^2} dx = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A\chi - i\varphi}} \cdot \Gamma(\tfrac{1}{2}) \text{ und ebenso}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathfrak{A}_1{}^2} dx = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A\chi + i\varphi}} \cdot \Gamma(\tfrac{1}{2}),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathfrak{B}^2} dy = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B\chi - i\varphi}} \cdot \Gamma(\tfrac{1}{2}),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathfrak{B}_1^{\,2}} dy = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B\chi + i\varphi}} \cdot \Gamma(\tfrac{1}{2}),$$

somit

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+S\varphi)} + e^{-(\mathfrak{A}_1^{\,2}+\mathfrak{B}_1^{\,2}+S_1\varphi)}\right) dx\,dy =$$

$$\sqrt{AB}.\,\pi\left(\frac{e^{-S\varphi}}{\sqrt{(A\chi - i\varphi)(B\chi - i\varphi)}} + \frac{e^{-S_1\varphi}}{\sqrt{(A\chi + i\varphi)(B\chi + i\varphi)}}\right)$$

und also

8) $$\text{Pot.} = \frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi} \chi^{-1/2} \times$$

$$\times \left(\frac{e^{-S\varphi}}{\sqrt{(A\chi - i\varphi)(B\chi - i\varphi)}} + \frac{e^{-S_1\varphi}}{\sqrt{(A\chi + i\varphi)(B\chi + i\varphi)}}\right) d\varphi\, d\chi.$$

Denkt man sich zuerst φ constant und setzt, um sich die nachherige Integration nach φ zu erleichtern, $\chi = \frac{\varphi}{s}$, wo s die neue Variable bedeutet, die χ ersetzen soll, so hat man

$$d\chi = -\frac{\varphi}{s^2}\, ds,$$

$$S = \frac{-ia^2}{A - is} + \frac{-ib^2}{B - is} + \frac{c^2}{s},\quad S_1 = \frac{ia^2}{A + is} + \frac{ib^2}{B + is} + \frac{c^2}{s},$$

folglich

$$\text{Pot.} = \frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi^{3/2}} \times$$

$$\times \left(\frac{e^{-S\varphi}}{\sqrt{(A-is)(B-is)}} + \frac{e^{-S_1\varphi}}{\sqrt{(A+is)(B+is)}} \right) \frac{ds\,d\varphi}{\sqrt{s}}.$$

Weil die gemeinschaftliche reelle Componente von S und S^1 für jeden positiven Werth von s positiv ist, so convergirt dieser Ausdruck auch an der obern Grenze.

Ich kehre nun die Folge der Integration um und integrire zuerst nach φ. Es ist

$$\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi^{3/2}} \cdot e^{-S\varphi} = \frac{1}{2i} \int_0^\infty \left(\frac{e^{-(S-i)\varphi} - e^{-(S+i)\varphi}}{\varphi^{3/2}} \right) \cdot d\varphi,$$

und weil die reellen Componenten von $S-i$, $S+i$ positiv sind, so erhält man nach Formel (5)

$$\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi^{3/2}} e^{-S\varphi} d\varphi = \Gamma(\tfrac{1}{2}) \cdot \frac{\sqrt{S+i} - \sqrt{S-i}}{i};$$

ebenso ist

$$\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi^{3/2}} e^{-S_1\varphi} d\varphi = \Gamma(\tfrac{1}{2}) \frac{\sqrt{S_1+i} - \sqrt{S_1-i}}{i},$$

wo die reellen Componenten von $\sqrt{S+i}$, $\sqrt{S_1+i}$ etc. positiv verstanden werden. Folglich ist

$$9) \qquad \text{Pot.} = \sqrt{AB} \left(\int_0^\infty \frac{\sqrt{S+i} - \sqrt{S-i}}{i\sqrt{(A-is)(B-is)}} \cdot \frac{ds}{\sqrt{s}} \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty \frac{\sqrt{S_1+i} - \sqrt{S_1-i}}{i\sqrt{(A+is)(B+is)}} \cdot \frac{ds}{\sqrt{s}} \right).$$

Die Zerlegung in die Summe zweier Integrale ist desshalb möglich, weil beide für sich convergiren. Das Integral $\int \frac{\sqrt{S+i}-\sqrt{S-i}}{i\sqrt{(A-is)(B-is)}} \cdot \frac{ds}{\sqrt{s}}$ verschwindet im Horizonte wie $\frac{1}{\sqrt{s}}$. Man setze desshalb den geradlinigen Integrationsweg im Ostpunkte des Horizontes bis zum Nordpunkte fort, um die Nordhälfte der lateralen Axe zum Integrationswege zu machen.

Hier setze ich nun $s = e^{i\frac{\pi}{2}} u$; durchläuft nun s von o aus die Nordhälfte der lateralen Axe, so u von o aus die Osthälfte der Realitätslinie. Ist nun t die Wurzel der Gleichung $\frac{a^2}{A+u} + \frac{b^2}{B+u} + \frac{c^2}{u} = 1$, die dem Ellipsoid entspricht, das durch den Punkt (a, b, c) geht, so ist für das Intervall $o < u < t$ die Grösse T stets grösser als 1 und für $t < u$ ist T kleiner als 1, wenn

$$T = \frac{a^2}{A+u} + \frac{b^2}{B+u} + \frac{c^2}{u}$$

gesetzt wird.

Für das Intervall $o < u < t$ hat man demnach

$$\log(S+i) = \log(T-1) - \frac{i\pi}{2}, \log(S-i) = \log(T+1) - \frac{i\pi}{2}$$

und für $t < u$

$$\log(S+i) = \log(1-T) + \frac{i\pi}{2}, \log(S-i) = \log(1+T) - \frac{i\pi}{2},$$

wo die Logarithmen von $T-1$, $1-T$ etc. reell zu verstehen sind. Man findet somit, dass

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{S+i}-\sqrt{S-i}}{i\sqrt{(A-is)(B-is)}}\cdot\frac{ds}{\sqrt{s}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}\cdot\int_0^t \frac{\sqrt{(T-i)}-\sqrt{T+1}}{\sqrt{(A+u)(B+u)u}}\,du$$

$$+\int_t^\infty \frac{\sqrt{1-T}-e^{-i\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+T}}{\sqrt{(A+u)(B+u)u}}\,du.$$

Um das zweite Integral der Formel (9) auf ähnliche Art umzuformen, setze man den Integrationsweg im Horizonte vom Ostpunkte bis zum Südpunkte fort und verlege den neuen Weg auf die Südhälfte der lateralen Axe.

Hier setze man $s = e^{-i\frac{\pi}{2}}u$. Für $o < u < t$ ist

$$\log(S_1+i) = \log(T+1) + \frac{i\pi}{2},\ \log(S_1-i) = \log(T-i) + \frac{i\pi}{2}$$

und für $t < u$

$$\log(S_1+i) = \log(T+1) + \frac{i\pi}{2},\ \log(S_1-i) = \log(1-T) - \frac{i\pi}{2}$$

wo die Logarithmen von $T+1$, $1-T$ etc. reell verstanden werden. Es ist somit

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{S_1+i}-\sqrt{S_1-i}}{i\sqrt{(A+is)(B+is)}}\cdot\frac{ds}{\sqrt{s}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}\cdot\int_0^t \frac{\sqrt{T+1}-\sqrt{T-1}}{\sqrt{(A+u)(B+u)u}}\cdot du$$

$$+\,e^{-i\frac{\pi}{2}}\cdot\int_t^\infty \frac{\sqrt{1+T}+e^{i\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-T}}{\sqrt{(A+u)(B+u)u}}\,du,$$

folglich nach Formel (9)

$$10)\ \text{Pot.} = 2\sqrt{AB}.\int_t^\infty \frac{\sqrt{1-\left(\frac{a^2}{A+u}+\frac{b^2}{B+u}+\frac{c^2}{C+u}\right)}}{\sqrt{(A+u)(B+u)u}}\cdot du.$$