Conforme Abbildung des Kreises auf das Innere einer Epicycloide

Autor(en): **Huber, G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1891)**

Heft 1265-1278

PDF erstellt am: **28.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-319044

Prof. Dr. G. Huber.

Conforme Abbildung des Kreises

auf das

Innere einer Epicycloide.

Vorgetragen in der Sitzung vom 21. Februar 1891.

Eine mehrdeutige Funktion $w = f(z)$ einer komplexen Variablen z, die von einem bestimmten Punkte z_0 der Variablen ausgeht, kann in einem andern Punkte z_1 nur dann verschiedene Werthe annehmen, wenn zwei von der Variablen durchlaufene Wege einen Verzweigungspunkt einschliessen. Um dieses zu verhindern, hat man nur durch Ziehen gewisser Linien, Querschnitte, die nicht überschritten werden dürfen, solche Wege unmöglich zu machen. Die Querschnitte grenzen ein bestimmtes Gebiet der Ebene ab, innerhalb dessen die Funktion eindeutig ist, da sie auf jedem Wege nur einen einzigen Werth erhält. Cauchy nannte diese Funktion in diesem Gebiete monodrom, Riemann hiess sie einändrig. Diese Eingrenzung der Ebene legt aber der Bewegung der Variablen eine Schranke auf, welche nicht immer eingehalten werden kann, da die Untersuchungen oft über dieses Gebiet hinausführen. Riemann hat daher ein anderes Mittel eingeführt, um sich von der n-Deutigkeit zu befreien, indem er statt der durch Linien abgegrenzten Ebene der Variablen, dieselbe aus n übereinander liegenden Schichten oder Blättern bestehend annahm, welche zusammen das Gebiet der Variablen bilden. Jedes der Blätter erstreckt sich nach allen Richtungen in das Unendliche, die einzelnen Blätter hängen in den sog. Verzweigungsschnitten zusammen, so dass der Variablen ein stetiger Uebergang von einem Blatte in das andere ermöglicht wird, wobei die Funktionswerthe kontinuirlich in einander übergehen. Ein solches Gebilde heisst eine Riemann'sche Fläche.

Von einigen Seiten wurde nun schon der Wunsch ausgesprochen, es möchte die Theorie dieser Riemann'schen Flächen durch Behandlung spezieller Funktionen noch weiter erläutert werden. Unter anderen hat Herr Prof. Amstein in Lausanne einige Funktionen behandelt und seine Untersuchungen im Bull. de la Soc. Vaud. d. Sc. nat. veröffentlicht. Die vorliegende Arbeit hat zum Gegenstande die konforme Abbildung des Innern des Einheitskreises auf das Innere einer Epicycloide mit 4 Spitzen und die damit zusammenhängende Riemann'sche Fläche.

Die Werthe einer komplexen Variablen z seien geometrisch dargestellt in einer Ebene (z) und diejenigen einer zweiten komplexen Variablen $w = f(z)$, einer Funktion von z, in einer zweiten von der ersten verschiedenen Ebene, der Funktionsebene (w).

Durchläuft die eine Variable in ihrer Ebene eine Kurve, so durchläuft die andere in ihrer Ebene die entsprechende Kurve, entsprechende Kurven in den beiden Ebenen schneiden sich unter denselben Winkeln und entsprechende Figuren sind in den kleinsten Theilen ähnlich; eine solche Abbildung heisst eine konforme und die bestehende geometrische Verwandtschaft eine isogonale. Ausnahme findet nur in den Verzweigungspunkten statt.

Die Funktion, welche im vorliegenden Falle die Abbildung vermittelt, ist

1) $$w = f(z) = 5z - z^5$$

Die Verzweigungspunkte der w Ebene erhält man für diejenigen Werthe von z, welche w', die erste Derivirte, zu Null oder unendlich machen, also aus

$$w' = 5 - 5z^4 = 0,$$

woraus $z = \sqrt[4]{5}$ folgt. Es geschieht dies somit für die 4 Werthe $z = \pm 1$ und $z = \pm i$, ferner ist $w' = \infty$ für $z = \infty$.

Die 5 Verzweigungspunkte der w Ebene sind also:

$$w = \pm 4,\ w = \pm 4i \text{ und } w = \infty,$$

wobei der letztere ein vierfacher Verzweigungspunkt ist.

Setzt man:

$$w = \xi + \eta i \text{ und } z = x + yi = r^{i\varphi}$$

so folgt aus Gleichung 1.) durch Einsetzen:

2) $$\begin{aligned} \xi &= 5r\cos\varphi - r^5\cos 5\varphi \\ \eta &= 5r\sin\varphi - r^5\sin 5\varphi \end{aligned}$$

Den Werthen $r =$ konstant, d. h. den Kreisen um den Nullpunkt der z Ebene entsprechen *Epitrochoiden*, Rollkurven, für welche der Radius des festen Kreises gleich 4 r, der des rollenden r und der

Abstand des erzeugenden Punktes vom Centrum des rollenden Kreises gleich r^5 ist.

Für $r < 1$ haben die Epitrochoiden nur einfache Punkte.

Für $r = 1$ stellen die Gleichungen eine *Epicycloide* dar, mit vier Spitzen auf den Coordinatenaxen in den Verzweigungspunkten $w = \pm 4$, $w = \pm 4\,i$. Diese Epicycloide entspricht dem Einheitskreise der z Ebene; sie hat die Gleichungen:

$$\xi = 5 \cos \varphi - \cos 5 \varphi = 4 \cos^3 \varphi \,(5 - 4 \cos^2 \varphi)$$

3) $$\eta = 5 \sin \varphi - \sin 5 \varphi = 4 \sin^3 \varphi \,(5 - 4 \sin^2 \varphi)$$

Durch Elimination von φ ergibt sich ihre Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten:

4) $$(\xi^2 + \eta^2 - 16)^3 \,(\xi^2 + \eta^2 + 9)^2 = 16.\, 5^5.\, \xi^2\, \eta^2.$$

In Polarkoordinaten:

$$(\varrho^2 - 16)^3 \,(\varrho^2 + 9)^2 = 16.\, 5^5.\, \varrho^4 \sin^2 2\,\psi.$$

Die Epicycloide ist also eine Kurve 10ten Grades, die unendlich fernen imaginären Kreispunkte der Ebene sind fünffache Punkte derselben.

Für $1 < r < \sqrt[4]{5}$ hat die Epitrochoide vier Schleifen, die den Nullpunkt ausschliessen, und je zwei Doppelpunkte auf den Axen und auf den die Axenwinkel halbirenden Geraden $\pm \frac{\pi}{4}$

Für $r = \sqrt[4]{5}$ gehen die vier Schleifen durch den Nullpunkt, und berühren die Axen, derselbe ist ein vierfacher Punkt der Kurve; die Gleichungen dieser Epitrochoide sind:

5) $$\xi = 5 \sqrt[4]{5} \,(\cos \varphi - \cos 5 \varphi) = 10 \sqrt[4]{5} \sin 3 \varphi \sin 2 \varphi$$

$$\eta = 5 \sqrt[4]{5} \,(\sin \varphi - \sin 5 \varphi) = - 10 \sqrt[4]{5} \cos 3 \varphi \sin 2 \varphi$$

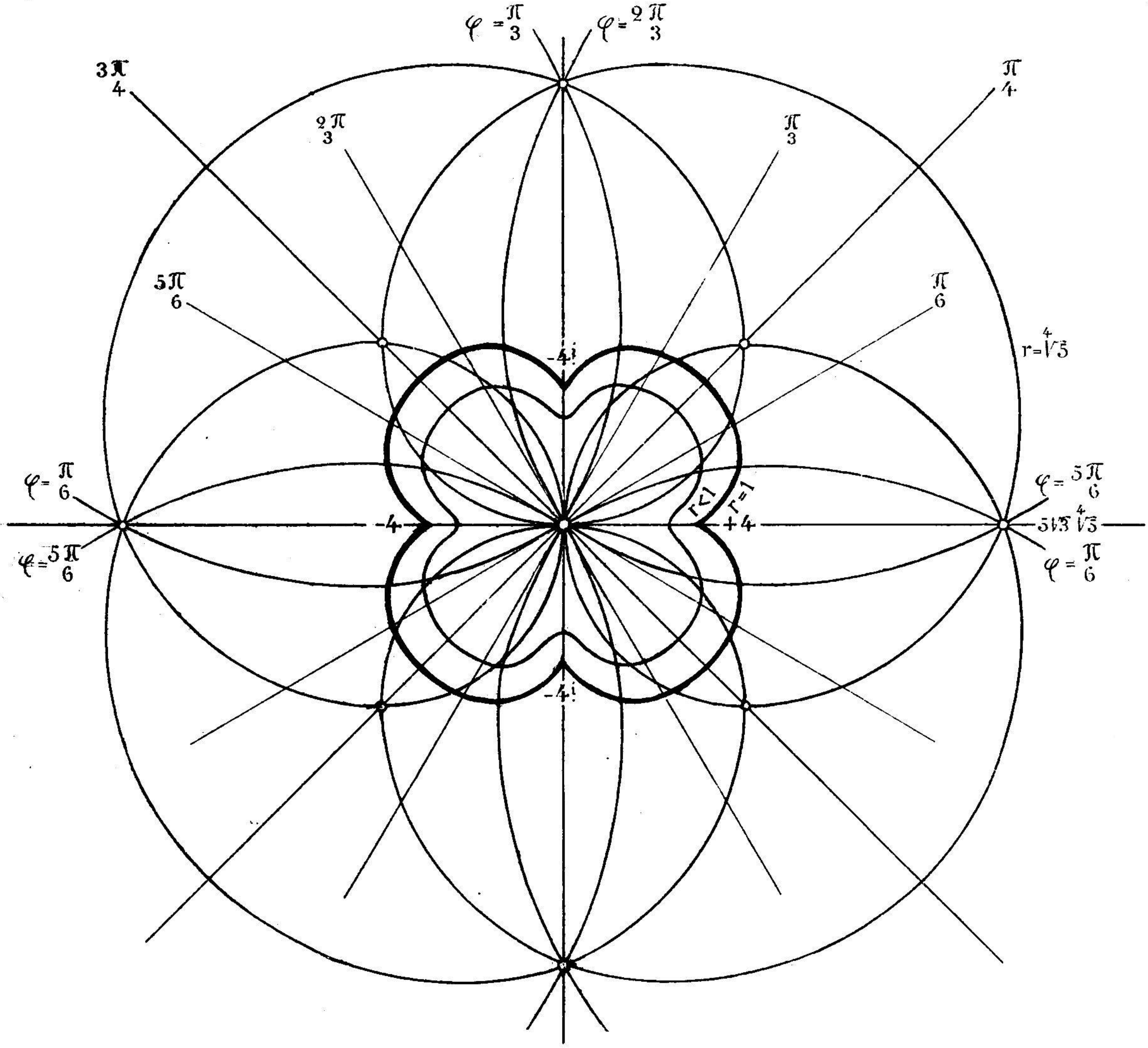
Durch Elimination von φ ergibt sich die Gleichung der Kurve in rechtwinkligen Coordinaten:

6) $$\left(\xi^2 + \eta^2\right)^3 \left(\xi^2 + \eta^2 - 75 \sqrt{5}\right)^2 = 16.\, 5^7.\, \sqrt{5}.\, \xi^2\, \eta^2$$

Die Polargleichung lautet:

7) $$\varrho \left(\varrho^2 - 75 \sqrt{5}\right) = 250 \sqrt[4]{125} \sin 2\,\psi$$

Die Epitrochoide ist eine Kurve 10ten Grades; die zwei Doppelpunkte auf jeder der Axen liegen im Abstande $5 \sqrt{3} \sqrt[4]{5}$ vom Nullpunkte und die vier Doppelpunkte auf den Winkelhalbirenden $\pm \frac{\pi}{4}$ im Abstande $5 \sqrt[4]{5}$ (Tafel I.)


$\varphi = \frac{\pi}{3}$
$\varphi = \frac{2\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$
$r = \sqrt[4]{5}$
$-4i$
$\varphi = \frac{\pi}{6}$
$\varphi = \frac{5\pi}{6}$
$r<1$
$r=1$
-4
$+4$
$5\sqrt{3}\sqrt[4]{3}$
$\varphi = \frac{5\pi}{6}$
$\varphi = \frac{\pi}{6}$
$-4i$

Für $r > \sqrt[4]{5}$ schliessen die vier Schleifen den Nullpunkt ein, die Epitrochoide hat 16 Doppelpunkte, auf jeder der Axe und auf jeder der Winkelhalbirenden $\pm \frac{\pi}{4}$ je vier, dieselben liegen viermal zu je vieren auf Kreisen um den Nullpunkt.

In den Grenzfällen $r = 0$ u. $r = \infty$ wird die Epitrochoide zu einem Kreis mit unendlich kleinem resp. unendlich grossem Radius.

Ist $\varphi =$ konstant, so erhält man diejenigen Kurven in der w Ebene, welche den Strahlen des Büschels der Geraden um den Nullpunkt der z Ebene von der betreffenden Neigung φ entsprechen. Diese Kurven bilden die Orthogonalschaar zu den Epitrochoiden.

Durch Elimination des variablen r aus den Gleichungen 2.) ergibt sich ihre Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten:

8) $(\xi \sin 5\,\varphi - \eta \cos 5\,\varphi)^5 = 5^5. \sin^4 4\,\varphi\,(\xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi)$ und in Polarkoordinaten, indem man $\xi = \varrho \cos \eta$ und $\eta = \varrho \sin \psi$ setzt:

9) $$\varrho^4 = 5^5 \sin^4 4\,\varphi \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin^5(5\,\varphi - \psi)}$$

Es sind diese Kurven *Parabeln fünfter Ordnung* mit einem vierfachen Punkt im Unendlichen in der Richtung $\frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg} 5\,\varphi$, derselbe ist eine Spitze von der besonderen Art, dass die unendlich fernen Gerade als Tangente in demselben die Kurve in fünf aufeinander folgenden Punkten schneidet. Sämmtliche Parabeln gehen durch den Nullpunkt, und jede hat in demselben eine Inflexionstangente $\frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg} \varphi$, mit 5 zusammenfallenden Berührungspunkten, sie hat dieselbe Neigung, wie der entsprechende Strahl der z Ebene. Jede Parabel besteht aus einem ununterbrochenen, nach 2 Seiten sich ins Unendliche erstreckenden Zweige, dessen Punkte symmetrisch zum Nullpunkt liegen. Die Abschnitte derselben auf den Axen sind dem absoluten Werthe nach gleich oder grösser als 4.

Für $\varphi = 0$ oder $= \pi$ wird nach Gleichung 8):

$\eta^5 = 0$, d. h. der reellen Axe der z Ebene entspricht die fünffach gelegte reelle Axe ξ der w Ebene.

Für $0 < \varphi < \frac{2\pi}{10}$ schneiden die Parabeln die ξ Axe zwischen ± 4 und $\pm \infty$.

Für $\varphi = \frac{\pi}{10}$ ist der unendlich ferne Punkt der η Axe vierfacher Punkt der Curve, die Parabel schneidet die ξ Axe in den Punkten $\xi = \pm 5{,}235$.

Für $\varphi = \frac{2\pi}{10}$ ist der unendlich ferne Punkt der ξ Axe vierfacher Punkt der Parabel.

Ist $\frac{2\pi}{10} < \varphi < \frac{3\pi}{10}$ so schneidet die Parabel keine der Axen.

Für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ fällt sie mit der Winkelhalbirenden $\psi = \frac{\pi}{4}$ zusammen.

Für $\varphi = \frac{3\pi}{10}$ ist der unendlich ferne Punkt der η Axe vierfacher Punkt.

Für $\frac{3\pi}{10} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ schneiden die Kurven die η Axe zwischen $\pm \infty$ und ± 4.

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wird $\xi^5 = 0$, d. h. der imaginären Axe der z Ebene entspricht die 5fach gelegte imaginäre Axe η der w Ebene.

Bewegt sich φ von $\frac{\pi}{2}$ bis π, so wiederholen sich der Reihe nach dieselben Parabeln, nur sind sie um 90^0 gedreht, und man erhält sämmtliche Parabeln der Schaar, wenn φ alle Werthe annimmt von 0 bis π.

Der Strahl, $\frac{\eta}{\xi} = \text{tg. } 5\,\varphi$, welcher die Richtung des vierfachen unendlich fernen Punktes der Parabeln 5. Ordnung angibt, dreht sich mit der fünffachen Geschwindigkeit der Inflexionstangente $\frac{\eta}{\xi} = \text{tg. } \varphi$ im Nullpunkt. Macht also der Strahl φ einen Umlauf um den Nullpunkt von 0^0 bis 360^0, so macht jener Richtungsstrahl fünf Umläufe um denselben, die w Ebene erscheint daher fünffach von der Parabelschaar überdeckt.

In Tafel I sind gezeichnet eine Epitrochoide $r < 1$, die Epicycloide $r = 1$, die Epitrochoide $r = \sqrt[4]{5}$ und die Parabeln fünfter Ordnung $\varphi = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$, und $\frac{5\pi}{6}$ mit ihren Inflexionstangenten im Nullpunkte, sowie die Axenwinkelhalbirenden $\pm \frac{\pi}{4}$ als Grenzfälle von Parabeln.

Wir betrachten nun umgekehrt die Funktionsebene w als Originalebene und legen um den Nullpunkt derselben die concentrische Kreisschaar mit dem veränderlichen Radius R und durch den Nullpunkt das orthogonale Strahlbüschel, dessen Strahlen mit der pos. reellen ξ Axe den veränderlichen Winkel γ bilden.

Jedem Punkte der w Ebene entsprechen, mit Ausnahme der Verzweigungspunkte, fünf verschiedene Punkte der z Ebene, so dem Nullpunkte der w Ebene die fünf verschiedenen Punkte:

$$z = 0,\ z = \pm \sqrt[4]{5} \text{ und } z = \pm i \sqrt[4]{5},$$

es sind dies die sog. *Wurzelpunkte* W_0, W_1, W_2, W_3, W_4 der Funktion. Da nun sämmtliche Kreise der concentrischen Schaar den Nullpunkt $w = 0$ zum Mittelpunkt haben, so umgeben die ihnen entsprechenden Kurven, die *Isotimen*, diese fünf Wurzelpunkte.

Die Gleichung der Isotimen erhält man aus der Funktion w, indem man dieselbe in folgender Form schreibt:

$$w = \xi + \eta i = z\left(z - \sqrt[4]{5}\right)\left(z + \sqrt[4]{5}\right)\left(z - i\sqrt[4]{5}\right)\left(z + i\sqrt[4]{5}\right)$$

wo $\sqrt[4]{5}$ positiv und reell zu nehmen ist. Oder:

$$10)\quad \xi + \eta i = (x + y i)\left(x + y i - \sqrt[4]{5}\right)\left(x + y i + \sqrt[4]{5}\right)\left(x + y i - i\sqrt[4]{5}\right)\left(x + y i + i\sqrt[4]{5}\right)$$

$$\xi - \eta i = (x - y i)\left(x - y i - \sqrt[4]{5}\right)\left(x - y i + \sqrt[4]{5}\right)\left(x - y i - i\sqrt[4]{5}\right)\left(x - y i + i\sqrt[4]{5}\right)$$

Durch Multiplikation beider Gleichungen folgt:

$$11)\quad \xi^2 + \eta^2 = R^2 = \left\{x^2 + y^2\right\}\left\{\left(x - \sqrt[4]{5}\right)^2 + y^2\right\}\left\{\left(x + \sqrt[4]{5}\right)^2 + y^2\right\}\left\{x^2 + \left(y - \sqrt[4]{5}\right)^2\right\}\left\{x^2 + \left(y + \sqrt[4]{5}\right)^2\right\}$$

wo R der Radius eines Kreises der Schaar ist.

Die einzelnen Klammerfaktoren rechts bezeichnen die Leitstrahlen p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, welche von den 5 Wurzelpunkten $z = 0$, $\pm \sqrt[4]{5}$, $\pm i \sqrt[4]{5}$ nach einem Punkt (x, y) der Isotime gehen, die Gleichung derselben kann also geschrieben werden:

$$12)\quad p_0\, p_1\, p_2\, p_3\, p_4 = R$$

Jedem Werthe von R entspricht eine bestimmte Isotime; dieselbe ist somit der Ort aller Punkte, für welche das Produkt der Abstände von den 5 Wurzelpunkten konstant ist.

Durch Ausrechnung der Gleichung 11) erhält man die Gleichung der Isotime in rechtwinkligen Coordinaten:

13) $$(x^2 + y^2)\left\{\left[\left(x^2 + y^2\right)^2 - 5\right]^2 + 80\, x^2 y^2\right\} = R^2,$$

Dieselbe ist eine Kurve 10. Ordnung, symmetrisch zu den Axen, die unendlich fernen imaginären Kreispunkte der Ebene sind 3fache Punkte derselben.

Aus 13) oder 2) ergibt sich die Polargleichung der Isotime:

14) $$r^{10} - 10\, r^6 \cos 4\varphi + 25\, r^2 = R^2$$

Zur Bestimmung der Schnittpunkte mit den Axen $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ erhält man die Gleichung:

$$r\,(r^4 - 5) = \pm R$$

Für $R = 0$ reducirt sich die Isotime auf die 5 Wurzelpunkte.

Für $R < 4$ besteht sie aus 5 kleinen Ovalen, je eines um einen der Wurzelpunkte. Diese sind in Tafel II wegen ihrer Kleinheit nicht eingezeichnet.

Für $R = 4$ erhält man die Isotime mit 4 Doppelpunkten, Knoten, in den 4 Punkten $z = \pm 1, \pm i$, die Kurve bildet in denselben 4 Schleifen, welche die Punkte $z = \pm \sqrt[4]{5}$, $\pm i \sqrt[4]{5}$ und 4 der oben genannten Ovalen umgeben.

Für $R > 4$ besteht die Isotime aus einem einzigen Zweige der alle 5 Wurzelpunkte einschliesst und ganz im Endlichen liegt. Tafel (II).

Dem Kreise $R = \infty$ entspricht als Grenzfall ebenfalls ein Kreis mit unendlich grossem Radius.

Alle Strahlen des Büschels gehen durch den Nullpunkt der w Ebene, somit laufen die denselben entsprechenden Kurven, die *Isophasen*, durch die 5 Wurzelpunkte, und da sämmtliche Strahlen durch den unendlich fernen Punkt der w Ebene gehen, so erstrecken sich die Isophasen nach 5 verschiedenen Richtungen ins Unendliche, jede derselben hat 5 Asymptoten durch den Nullpunkt.

Um die Gleichung derselben zu erhalten, bildet man aus den Gleichungen 10) durch Division und Logarithmirung:

$$\mathrm{Lg}\frac{\xi + \eta i}{\xi - \eta i} = \mathrm{Lg}\frac{x + y i}{x - y i} + \mathrm{Lg}\frac{x - \sqrt[4]{5} + y i}{x - \sqrt[4]{5} - y i} + \mathrm{Lg}\frac{x + \sqrt[4]{5} - y i}{x + \sqrt[4]{5} + y i}$$

$$+ \operatorname{Lg} \frac{x + \left(y - \sqrt[4]{5}\right) i}{x - \left(y + \sqrt[4]{5}\right) i} + \operatorname{Lg} \frac{x + \left(y + \sqrt[4]{5}\right) i}{x - \left(y + \sqrt[4]{5}\right) i}$$

Durch Division mit 2 i folgt:

15) $$\operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi} = \operatorname{artcg} \frac{y}{x} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x - \sqrt[4]{5}} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x + \sqrt[4]{\;}}$$
$$+ \operatorname{arctg} \frac{y - \sqrt[4]{5}}{x} + \operatorname{arctg} \frac{y + \sqrt[4]{5}}{x}$$

als Gleichung der Isophase. Oder:

16) $$\gamma = \varDelta_0 + \varDelta_1 + \varDelta_2 + \varDelta_3 + \varDelta_4 \quad .$$

wo γ der Neigungswinkel des Strahls in der w Ebene mit der ξ Axe ist und $\varDelta_0$, $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\varDelta_3$ und $\varDelta_4$ die Neigungswinkel sind, welche die Radien vectoren von einem Punkt x, y der Isophase nach den 5 Wurzelpunkten $z = 0, \pm \sqrt[4]{5}, \pm i \sqrt[4]{5}$ mit der x Axe bilden. Die Gleichung 16) zeigt, dass die Summe dieser Neigungswinkel für ein und dieselbe Isophase konstant ist, gleich dem Winkel des entsprechenden Strahles.

In Polarkoordinaten erhält man die Gleichung der Isophase aus den Gleichungen 2):

$$\frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg} \gamma = \frac{5 r \sin \varphi - r^5 \sin 5 \varphi}{5 r \cos \varphi - r_5 \cos 5 \varphi} \text{ oder:}$$

17) $$r^4 = \frac{5 \sin (\varphi - \gamma)}{\sin (5 (\varphi - \gamma)}$$

Die Kurven, deren sämmtliche man erhält für $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$, sind von der 5. Ordnung und gehen sämmtlich durch den Nullpunkt, ihre 5 Asymptoten erhält man aus $\sin (5 \varphi - \gamma) = 0$, also für

$$\varphi = \frac{\gamma + k \pi}{5}, \ (k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

sie folgen sich im Winkelabstande $\frac{\gamma + \pi}{5}$. Die Isophasen bestehen aus 5 getrennten unendlichen Zweigen, von denen je einer durch einen der 5 Wurzelpunkte geht, es sind 4 hyperbolische Aeste, zweimal je 2 zwischen 2 Asymptoten symmetrisch zum Nullpunkt, der 5. geht durch den Nullpunkt, symmetrisch zu demselben und hat in ihm die Inflexionstangente $\varphi = \gamma$ mit 5 zusammenfallenden Berührungspunkten. Dieser 5. Ast wird viermal zu einer Geraden durch den Nullpunkt, fällt also mit seiner Asymptote zusammen mit den Neigungen $\varphi = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ für die Werthe $\gamma = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$.

Diejenigen Geraden des Büschels, welche durch die Verzweigungspunkte $w = \pm 4$, $w = \pm 4\,i$ der w Ebene gehen, also die Coordinatenaxen $\gamma = 0$ oder $= \pi$ und $\gamma = \frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2}$, liefern Isophasen mit Knotenpunkten in den entsprechenden Punkten der z Ebene, in $z = \pm 1$, $z = \pm i$; diese 4 Knotenpunkte heissen nach Klein die *Kreuzungspunkte* der z Ebene. Die durch dieselben gehende Isotime, welche dem Kreise mit dem Radius $R = 4$ entspricht, hat ihre Doppelpunkte ebenfalls in diesen Kreuzungspunkten und halbirt die Winkel der Isophasen mit Knoten. (Tafel II.)

Die Gleichungen dieser Isophasen erhält man aus Gleichung 17).

1. Für $\gamma = 0$ oder $\gamma = \pi$:

$$r^4 \sin 5\,\varphi = 5 \sin \varphi$$

Asymptoten: $\varphi = 0, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}$ und $\frac{4\pi}{5}$.

Die obige Gleichung zerfällt in:

$$\sin \varphi = 0 \text{ also } \varphi = 0$$

d. h. der 5te Ast fällt mit seiner Asymptote, der reellen Axe x der z Ebene zusammen. Und:

18) $$r^4 (16 \cos^4 \varphi - 12 \cos^2 \varphi + 1) = 5.$$

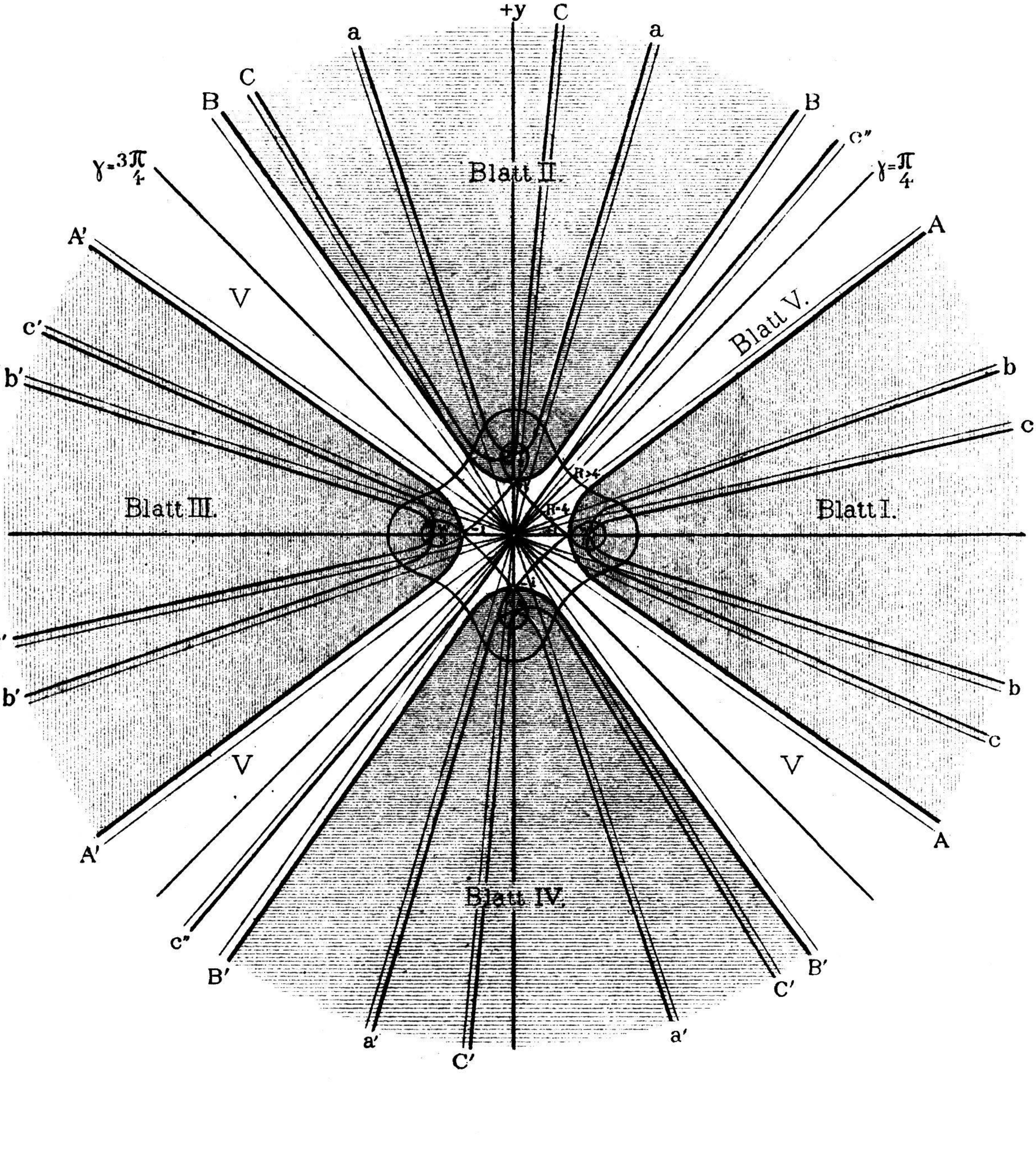
Diese Gleichung liefert 4 hyperbolische Aeste, zwei derselben A und A′ zwischen den Asymptoten $\varphi = \frac{\pi}{5}$ und $\varphi = \frac{4\pi}{5}$ liegend, gehen resp. durch die Kreuzungspunkte $z = \pm 1$, welche Doppelpunkte sind, die durch den Schnitt der Zweige A, A′ mit dem 5. Zweig, der x Axe, entstehen, die beiden andern Zweige a und a′, zwischen den Asymptoten $\varphi = \frac{2\pi}{5}$ und $\varphi = \frac{3\pi}{5}$ liegend, gehen resp. durch die Wurzelpunkte $z = \pm i \sqrt[4]{5}$.

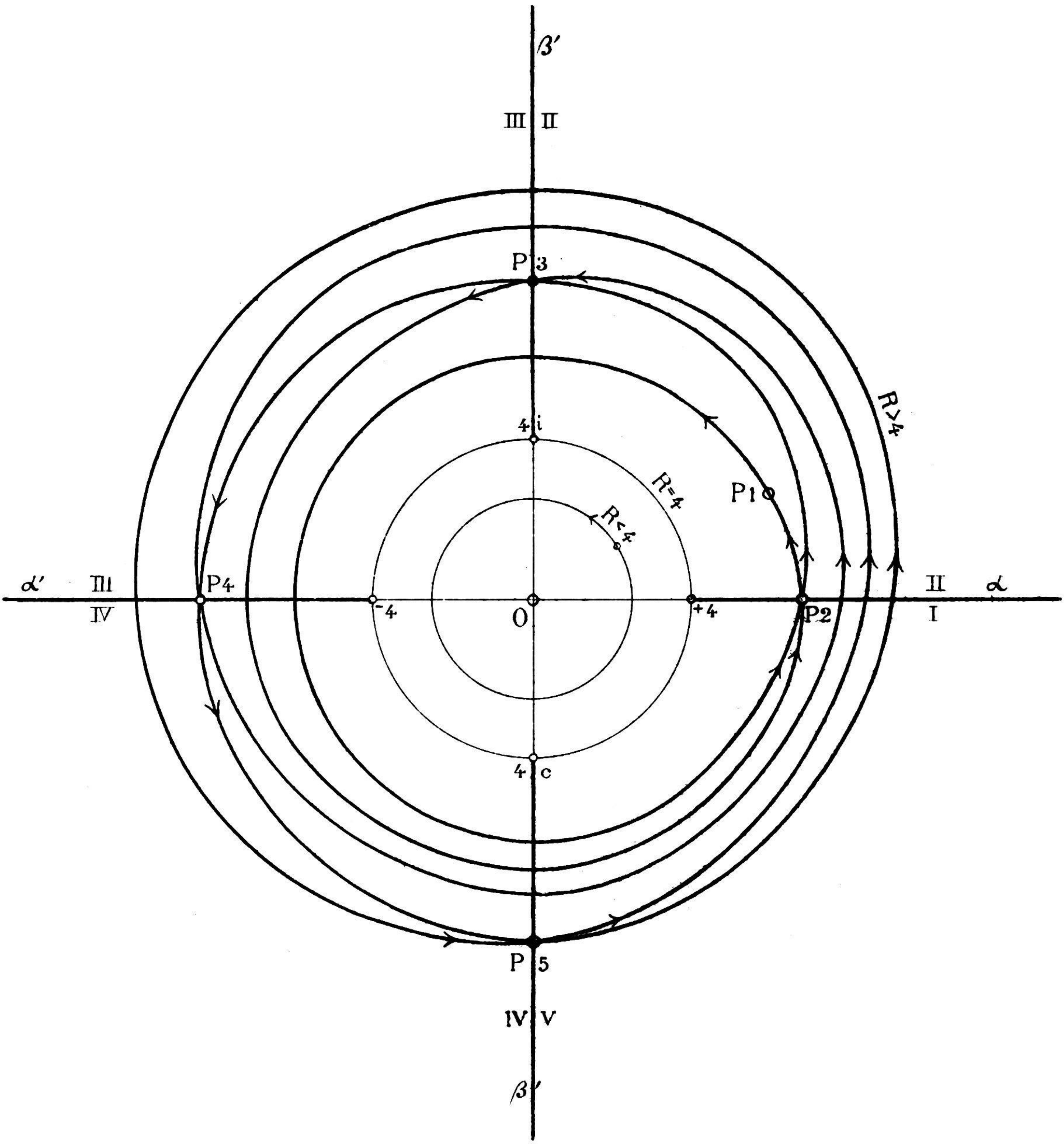
2. Für $\gamma = \frac{\pi}{2}$ oder $\gamma = \frac{3\pi}{2}$ erhält man aus 17) die zweite Isophase mit Knoten:

$$r^4 \cos 5\,\varphi = 5 \cos \varphi$$

z Ebene.

Taf. II.




β'
III II
P 3
R>4
4 i
R=4
P1
R<4
α' III P4 II α
IV -4 0 +4 P2 I
4 c
P 5
IV V
β'

Sie zerfällt in $\cos\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ d. h. der 5. Ast fällt mit der imaginären Axe der z Ebene zusammen, und

19) $$r^4 (16 \sin^4 \varphi - 12 \sin^2 \varphi + 1) = 5.$$

Ersetzt man φ durch $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$, so geht diese Gleichung über in Gleichung 18), es liefert also diese Gleichung dieselben 4 hyperbolischen Aeste wie 18), nur um 90^0 gedreht. Zwei der Aeste B und B′ gehen resp. durch die Kreuzungspunkte $z = \pm i$, die beiden andern b und b′ resp. durch die Wurzelpunkte $z = \pm \sqrt[4]{5}$.

Die Tafel II enthält daneben noch die Isophase $\gamma = \frac{\pi}{3}$, mit den Zweigen C, C′, c, c′ und c″.

w ist eine eindeutige Funktion von z, während z eine fünfdeutige Funktion von w ist, $w = F(z)$ 1, denn jedem Werthe von w entsprechen in der z Ebene 5 verschiedene Werthe z, Ausnahme findet nur in den Verzweigungspunkten $w = \pm 4$, $w = \pm 4i$ und $w = \infty$ statt. In den 4 ersten fallen je zwei der 5 entsprechenden z Werthe zusammen und für $w = \infty$ fallen alle 5 in $z = \infty$ zusammen.

Um z ebenfalls als eindeutige Funktion von w darzustellen, verwendet man die w Ebene in eine *fünfblättrige Riemann'sche Fläche.* Die 5 Blätter liegen unendlich benachbart übereinander und jedes erstreckt sich über die ganze unendliche Ebene. Jedem arithmetischen Werthe von w entsprechen 5 übereinander liegende Punkte dieser Riemann'schen Fläche und diese sind die Repräsentanten der 5 entsprechenden Werthe z.

Die Verzweigungsschnitte werden zwischen den Verzweigungspunkten folgender Weise gelegt:

Von $w = \pm 4$ aus längs der positiven resp. negativen reellen Axe ins Unendliche, α und α' Taf. III.

Von $w = \pm 4i$ aus längs der positiven resp. negativen reellen Axe ins Unendliche, β und β'.

Um der Variablen w einen stetigen Uebergang von einem Blatte ins andere zu ermöglichen, heftet man je zwei der Blätter längs eines Verzweigungsschnittes zusammen und zwar längs

$(4, \infty) = \alpha$	das 1. und 2. Blatt,
$(4i, \infty i) = \beta$	» 2. » 3. »

$(-4, -\infty) = \alpha'$ das 3. und 4. Blatt,
$(-4i, -\infty i) = \beta'$ » 4. » 5. »

Im Punkte $w = \infty$ hängen alle 5 Blätter zusammen, derselbe ist ein Windungspunkt 4. Ordnung.

Jedem Punkte dieser fünfblättrigen Riemann'schen Fläche entspricht nur ein einziger Punkt der z Ebene und zwar jedem Blatte ein bestimmter Theil derselben, das gegenseitige Entsprechen lässt sich folgenderweise festsetzen:

Den Verzweigungsschnitten entsprechen als Isophasen, wie gesehen, die Kurven 18) und 19) und zwar entspricht dem Verzweigungsschnitte:

$\alpha = (4, \infty)$ der hyperbolische Ast rechts, $= A$, durch den Kreuzungspunkt $z = 1$ (Tafel II)

$\alpha' = (-4, -\infty)$ der hyperbolische Ast links, $= A'$ durch den Kreuzungspunkt $z = -1$

$\beta = (4i, \infty i)$ der hyperbolische Ast oben $= B$ durch den Kreuzungspunkt $z = i$

$\beta' = (-4i, -\infty i)$ der hyperbolische Ast unten $= B'$ durch den Kreuzungspunkt $z = -i$.

Diese vier Aeste schliessen die Aeste durch die Wurzelpunkte aller andern Isophasen ein und sämmtliche Zweige durch den Nullpunkt aus.

Der Zusammenhang der 5blättrigen Riemann'schen Fläche, der w, und der z Ebene sei nur der, dass dem ersten Blatte das Innere des Zweiges A der z Ebene, dem 2ten Blatte das Innere des Zweiges B der z Ebene, dem 3ten Blatte das Innere des Zweiges A' der z Ebene, dem 4ten Blatte das Innere des Zweiges B' der z Ebene entspreche und dem 5. Blatte das noch übrig bleibende Gebiet der z Ebene, das den Nullpunkt enthält.

Macht die Variable w in irgend einem Blatte einen Umlauf um den Nullpunkt auf einem Kreise mit dem Radius $R < 4$, so schliesst derselbe keinen Verzweigungspunkt ein, der Kreis ist also eine in sich zurücklaufende wirklich geschlossene Linie, demselben entspricht also in seiner Abbildung in der z Ebene ebenfalls eine geschlossene Kurve, nämlich, je nach dem Blatte in welchem der Kreis liegt, eines der 5 Ovale, aus welchen die Isotime in der z Ebene für $R < 4$ besteht.

Anders verhält es sich, wenn w den Nullpunkt umläuft auf einem Kreise, für den der Radius $R > 4$ ist.

Seien z_1, z_2, z_3, z_4 und z_5 die 5 einem Werthe von w entsprechenden Werthe der aus der Gleichung $w = 5z - z^5$ hervorgehenden Umkehrungsfunktion $z = F(w)$. Das erste Blatt sei der Ort der Variablen w für die Funktionswerthe z_1, das 2te Blatt derjenige für die Werthe z_2 u. s. w. Die rechte und linke Seite eines Blattes werde nach der rechten und linken Seite eines Beobachters bezeichnet, der im Nullpunkt sich befindet und nach den Verzweigungsschnitten hinsieht.

Bewegt sich nun w auf einem Kreise Radius > 4, so ist die Linie nur dann wirklich geschlossen, wenn sie 5 Umläufe macht, bevor sie wieder zum Ausgangspunkte zurückkommt, denn erst dann nimmt die Funktion z wieder ihren ursprünglichen Werth an. Dass dies bei der getroffenen Zusammenheftung der Blätter wirklich der Fall ist, lässt sich leicht zeigen:

Geht man z. B. mit w in positiver Richtung auf der linken Seite des ersten Blattes von einem Punkte P_1 aus, dem ein bestimmter Funktionswerth z_1 entspricht, und lässt in einem die Verzweigungspunkte umschliessenden Kreise, $R > 4$ im ersten Blatte die Funktion $z_1 = F(w)$ sich stetig ändern. Beim Ueberschreiten des Verzweigungsschnittes α im Punkte P_2 geht der Funktionswerth z_1 in z_2 über, es muss daher die Variable w beim Ueberschreiten desselben stetig in das 2te Blatt übergehen, welches der Ort der Variablen w für die Funktionswerthe z_2 ist. Beim Ueberschreiten des Verzweigungsschnittes β in P_3 geht w in's 3te Blatt über, beim Verzweigungsschnitt α' in P_4 in das 4te Blatt und beim Verzweigungsschnitt β' bei P_5 auf die linke Seite des 5ten Blattes. (Tafel III.) Die Variable w macht nun im 5ten Blatte einen ganzen Umlauf, zurück zu demselben Punkte P_5 auf der rechten Seite des Verzweigungsschnittes β'.

Beim Ueberschreiten dieses Verzweigungspunktes geht z_5 in z_4 über, somit geht w ins vierte Blatt zurück, macht in demselben einen Umlauf bis P_4, geht dort in das dritte Blatt zurück, läuft dort bis P_3, geht ins 2te Blatt zurück, bewegt sich in diesem bis P_2 im Verzweigungsschnitt α, geht ins erste Blatt zurück und kommt nach 5 Umläufen wieder zum Ausgangspunkt P_1 zurück, die Kurve ist eine wirklich geschlossene, also auch die entsprechende Isotime in der z Ebene.

Durch obige Festsetzung des Entsprechens der 5blätterigen Riemann'schen Fläche und der z Ebene, liegt die Epicycloide mit Spitzen und sämmtliche Epitrochoiden, die den Kreisen der z Ebene entsprechen, für welche r $<$ 1, *ganz* im 5ten Blatte. Von den Epitrochoiden, für die r $>$ 1 ist, liegen nur die Theile ohne die Schleifen im 5ten Blatte, also 4 Bogen, symmetrisch in den 4 Quadranten zwischen den Axen, mit 4 Spitzen auf denselben, die eine ähnliche Figur bilden wie die Epicycloide. (s. Taf. IV.)

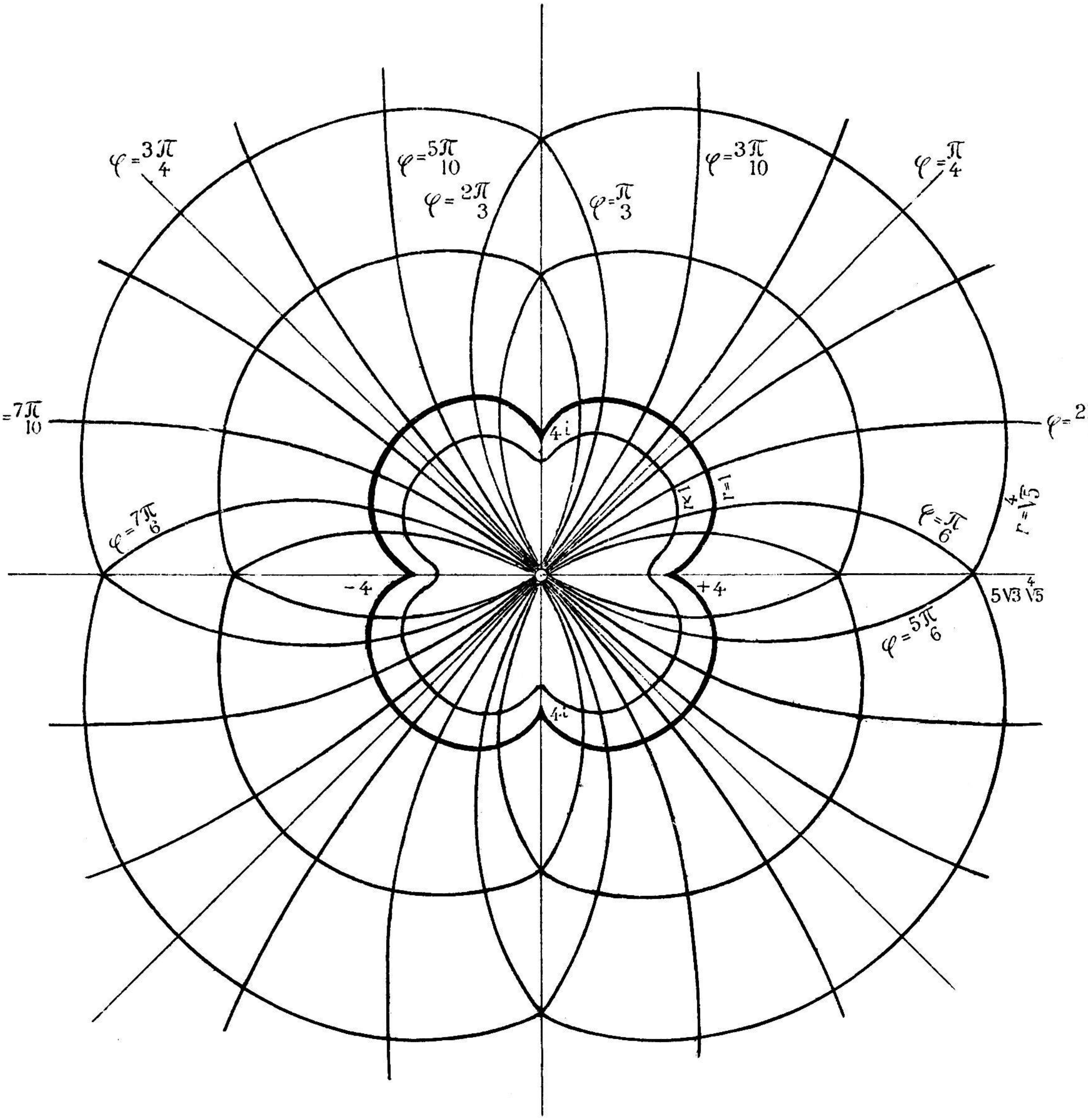
Von den Parabeln 5ter Ordnung liegen diejenigen ihrer ganzen Ausdehnung nach im 5ten Blatte, welche den Geraden zwischen $\varphi = \frac{2\pi}{10}$ und $\varphi = \frac{3\pi}{10}$ und zwischen $\varphi = \frac{7\pi}{10}$ und $\varphi = \frac{8\pi}{10}$ der z Ebene entsprechen, von den übrigen nur der Theil vom Nullpunkt, bis zum Schnittpunkt mit einer der Axen. Diese bilden mit der vorigen Schaar von Epitrochoiden und Theilen derselben ein *isothermisches Kurvensystem.*

Ist der Radius des Kreises r $>$ 1, so liegen die Epitrochoiden in allen 5 Blättern und zwar haben die Kreisbogen innerhalb der 4 hyperbolischen Aeste A, B, A$'$, B$'$ (Taf. I) als Bilder die 4 Schleifen der Epitrochoiden. Die zwei Schnittpunkte des Kreises mit jedem der hyperbolischen Aeste, welche den Coordinatenaxen entsprechen, sind die Bilder je eines der Doppelpunkte auf den Axen, und die Schnittpunkte desselben mit den hyperbolischen Aesten, welche den Geraden $\pm \frac{\pi}{4}$ entsprechen, sind die Bilder der Doppelpunkte auf den Winkelhalbirenden $\pm \frac{\pi}{4}$ der w Ebene.

Elektrodynamisch kann nur das fünfte Blatt gedeutet werden. Macht man die Epicycloide mit Spitzen zur Einströmungselektrode und leitet die Elektricität im Nullpunkte oder im unendlich fernen Bereiche ab, so sind die Epitrochoiden und Theile derselben, welche im fünften Blatte liegen, Aequipotentialniveaulinien und die Kurven der Orthogonalschaar, die Parabeln 5ter Ordnung und Theile derselben, sind die Strömungslinien.

Durchläuft z einen der Kreise r $=$ konst. seiner Ebene, so durchläuft der entsprechende Punkt w eine Epitrochoide. Ein *eindeutiges* Entsprechen der Punkte des Kreises und der Epitrochoide findet aber nur dann statt, wenn die letzere keine vielfachen Punkte hat, d. h. für die Epitrochoiden, welche ganz im 5ten Blatte liegen, für welche r $<$ 1 ist, die Grenze derselben bildet die Epicycloide r $=$ 1.

Vtes Blatt der w Ebene. Taf. IV.



Innerhalb des Einheitskreises $r = 1$ der z Ebene entspricht jedem Punkte nur ein einziger Punkt innerhalb der Epicycloide, es wird daher durch die Funktion:

$$w = 5z - z^5$$

das Innere des Einheitskreises der z Ebene konform auf das Innere der Epicycloide mit 4 Spitzen in der w Ebene abgebildet. In der z Ebene bilden die Isophasen die Orthogonalschaar zu der Isotimenschaar. Nehmen in der w Ebene die Radien R der den Isotimen entsprechenden Kreise in einer geometrischen und die Neigungswinkel γ der Strahlen des Büschels um den Nullpunkt in einer arithemischen Reihe zu, so bilden die Isotimen und Isophasen ein isothermisches Kurvensystem. Es geschieht dies, wenn man die Gleichung 12) der Isotimenschaar schreibt:

$$p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 = R = e^c \text{ oder:}$$

$$\mathrm{Lg} \prod_{k=0}^{k=4} p_k = \sum_{k=0}^{k=4} \mathrm{Lg}\, p_k = c = \text{konstant.}$$

Und die der Isophasenschaar Gleichung 15):

$$\sum_{k=0}^{k=4} \operatorname{arctang} \frac{y - \beta_k}{x - \alpha_k} = \operatorname{arctang} \frac{\eta}{\xi} = \gamma = \text{konstant,}$$

wo $\alpha_k + \beta_k i$ für $k = 0, 1, 2, 3, 4$ je einen der 5 Wurzelpunkte $z = 0, (\alpha_0 = 0, \beta_0 = 0), z = \pm\sqrt[4]{5}, \left(\alpha_1 = \sqrt[4]{5}, \alpha_2 = \sqrt[4]{5}, \beta_1 = \beta_2 = 0\right)$ und $z = \pm i\sqrt[4]{5} \left(\alpha_3 = \alpha_4 = 0, \beta_3 = i\sqrt[4]{5}, \beta_4 = - i\sqrt[4]{5}\right)$ darstellt.

Die isothermischen Parameter c und γ folgen arithmetischen Reihen.

Ist immer $c = \gamma$, so erhält man die Eintheilung der z Ebene in kleine Quadrate.

Es hat keine Schwierigkeiten, das Innere des Einheitskreises auf das Innere einer Epicycloide mit beliebig vielen Spitzen abzubilden, die Untersuchungen bleiben im Wesentlichen dieselben.