Betrachtung einer Function mit Rücksicht auf das Dirichlet'sche Princip

Autor(en): **Graf, J.H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1891)**

Heft 1265-1278

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-319048

J. H. Graf.

Betrachtung einer Function mit Rücksicht auf das Dirichlet'sche Princip.

In seiner trefflichen Einleitung zu «*Das Dirichlet'sche Princip* in seiner Anwendung auf die *Riemann'schen Flächen*» *) sagt *Carl Neumann,* dass man bei der Bestimmung einer Function von mehreren Argumenten mittelst gewisser Eigenschaften oder durch gewisse ihr auferlegte Bedingungen auf zweierlei achten müsse, solle die Function innerhalb eines gewissen Gebietes existiren können. Erstens ist darauf zu sehen, dass jene Bedingungen nicht zu viel verlangen; denn sonst würde eine denselben entsprechende Function überhaupt nicht existiren; zweitens ist aber auch zu beachten, dass jene Bedingungen nicht zu wenig verlangen; denn sonst wird die Function durch dieselben nicht bestimmt sein. Kurz gefasst sind somit die Bedingungen, die man einer Function auferlegt, zu discutiren

1° in Bezug auf ihre *Verträglichkeit.*

2° in Bezug auf ihre *Vollständigkeit.*

In allen Fällen, wo es sich um die *Vollständigkeit* der Bedingungen handelt, kann man sich einer Methode bedienen, die *Green* und *Gauss* vielfach benutzten; die Frage der Verträglichkeit der Bedingungen kann aber mittelst einer Methode untersucht werden, deren Princip von *Dirichlet,* deren weitere Entwicklung und glänzende Anwendung aber *Riemann* zu verdanken ist.

Bekanntlich ist es das sogenannte *Dirichlet'sche Princip,* von dem *Riemann***) in seiner epochemachenden Abhandlung «Theorie der Abel'schen Functionen» ausgegangen und von dem aus er zu seinen glänzenden Untersuchungen gelangt ist.

---

*) Leipzig, G. B. Teubner 1865.

**) Siehe Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathem. Bd. 54, 1857 B. Riemann's gesammelte Werke und wissenschaftlicher Nachlass. Herausgegeben, unter Mitwirkung von R. Dedekind, von H. Weber. Leipzig 1876. S. 89 u. f. f.

Dieses wichtige Princip, welches nicht nur das Fundament jener eigenartigen Theorie der Integrale algebraischer Functionen bildet und das auch in andern Richtungen für die Entwicklung der mathematischen Wissenschaften von grosser Bedeutung ist, lautet:

Wenn man einer Function u, welche die reelle Componente einer Function u + i v ist, längs des Randes der einfach zusammenhangend gemachten Riemann'schen Fläche bestimmte Werthe giebt und ausserdem im Innern für jene ächte Function u + i v sämmtliche Unstetigkeiten, seien es algebraische oder logarithmische, genau verschreibt, so giebt es immer eine Function, die zu u gesetzt

$$\int\left[\left\{\frac{\delta u}{\delta x}-\frac{\delta \beta}{\delta y}\right\}^2+\left\{\frac{\delta u}{\delta y}-\frac{\delta \beta}{\delta x}\right\}\right] d\,x\,d\,y$$

zu einem Minimumswerth macht.

Mit andern Worten gesagt, oder möglichst kurz ausgedrückt: jene Function unter den gegebenen Bedingungen construirt, existirt und ist die einzige in ihrer Art.

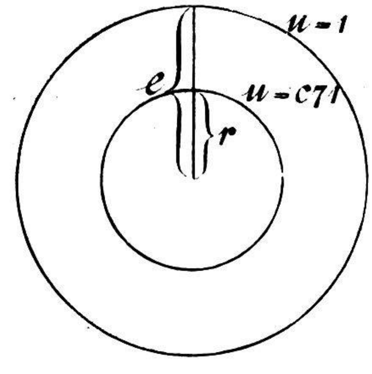
Es lässt sich nun zeigen, dass längs einer geschlossenen Curve von gewöhnlichem Zusammenhang die Bedingung für das Minimum sich reduzirt auf

$$\int\left(\frac{\delta u}{\delta y}\,d\,x-\frac{\delta u}{\delta x}\,d\,y\right)=0$$

und dass schliesslich

$$d\,(u+i\,v)=\left(\frac{\delta u}{\delta x}-i\,\frac{\delta u}{\delta y}\right)d\,(x+i\,y)$$

ist, woraus hervorgeht, dass die Function u + i v eine Function der complexen Variablen x + i y ist. Damit also u unser Integral zu einem Minimum mache, muss u reelle Componente einer f (x + i y) sein.



Legen wir uns nun ein einfaches Beispiel, das zu Bedenken Anlass geben kann*), vor. Ich denke mir einen Kranz gebildet von 2 concentrischen Kreisen; der eine Kreis, derjenige, welcher den äussern Rand zu bilden die Aufgabe hat, habe den Radius e, wo e die Basis des natürlichen Logarithmen-Systems bedeute. Der innere Kreis habe den Radius r.

*) Vergleiche auch Riemann's gesammelte Werke, S. 47.

Nun habe die reelle Componente u unserer zu construirenden und dann zu discutirenden Function längs des äussern Randes des Kranzes, also längs des Kreises mit dem Radius e den Werth 1, und längs des innern Randes den constanten Werth $c > 1$, dann erhellt sofort, dass die Logarithmus-Function diejenige ist, die allfällig diesen Ansprüchen genügen könnte. Nehmen wir dies einmal an und setzen wir den noch ziemlich rohen Ausdruck

$$A \, Log \, (x + i \, y) + B \tag{1.}$$

(wo A und B zu bestimmende Constanten sind) und zwar trachten wir A und B so zu bestimmen, dass die reelle Componente obigen Anforderungen genügt.

Beim äussern Rande wird, da

$$x + i \, y = \varrho \, e^{i \, \Theta}$$

gesetzt werden kann,

$$x + i \, y = e \, . \, e^{i \, \Theta} = e^{i \, \Theta + 1},$$

der Ausdruck (1.) geht somit hier über in

$$A \, \mathrm{Log} \left(e^{i \, \Theta + 1} \right) + B = A \, (i \, \Theta + 1) + B \tag{2.}$$

Die reelle Componente dieses Ausdrucks ist: $A + B$ und nach unserer Bedingung soll sie $= 1$ sein, also

$$A + B = 1. \tag{3.}$$

Beim innern Kreise ist $x + i \, y = r \, e^{i \, \Theta}$, weil $\varrho = r$, somit nimmt (1.) die Gestalt an

$$\begin{aligned} A \, \mathrm{Log} \, (x + i \, y) + B &= A \, \mathrm{Log} \, r \, e^{i \, \Theta} + B \\ &= A \, \mathrm{Log} \, r + i \, \Theta \, . \, A + B, \end{aligned}$$

die reelle Componente ist folglich $A \, \mathrm{Log} \, r + B$, sie soll $= c$ sein, also folgt an diesem Rande die Bedingung:

$$A \, Log \, r + B = c. \tag{4.}$$

Aus (3.) und (4.) erhalten wir, durch Subtraction,

$$A \, \mathrm{Log} \, r - A = c - 1$$

$$A = \frac{c - 1}{Log \, r - 1} \tag{5.}$$

$$B \, \mathrm{Log} \, r - B = \mathrm{Log} \, r - c$$

$$B \, (\mathrm{Log} \, r - 1) = \mathrm{Log} \, r - c$$

$$B = \frac{\mathrm{Log} \, r - c}{\mathrm{Log} \, r - 1} \tag{6.}$$

Setzen wir nun (5.) und (6.) in (1.) ein, so hat man

$$\frac{(c-1)\,\mathrm{Log}\,(x+iy)+\mathrm{Log}\,r-c}{\mathrm{Log}\,r-1}=\frac{\mathrm{Log}\,r+\mathrm{Log}\,e^{-c}\,(x+iy)^{c-1}}{\mathrm{Log}\,r-1}$$

als Ausdruck unserer zu suchenden Function.

Untersuchen wir nun, ob diese Function unsern Anforderungen genügt; nach dem Dirichlet'schen Princip existirt sie und ist sie die einzige Function, die denselben genügt.

Bei dem äussern Kreis ist $x+iy=e^{i\Theta+1}$, somit geht dort die Function über in

$$\frac{\mathrm{Log}\,r+\mathrm{Log}\,e^{-c}\left(e^{i\Theta+1}\right)^{c-1}}{\mathrm{Log}\,r-1}$$

Wir greifen die reelle Componente heraus: sie ist

$$\frac{\mathrm{Log}\,r+\mathrm{Log}\,e^{-c}\,.\,e^{c-1}}{\mathrm{Log}\,r-1}=$$

$$\frac{\mathrm{Log}\,r-c+c-1}{\mathrm{Log}\,r-1}=\frac{\mathrm{Log}\,r-1}{\mathrm{Log}\,r-1}=1.$$

Unsere construirte Function genügt somit der ersten Anforderung, dass ihre reelle Componente längs des äussern Randes $=1$ sei. Beim innern Kreis: $x+iy=r\,e^{i\Theta}$, somit geht die Function über in

$$\frac{\mathrm{Log}\,r+\mathrm{Log}\,e^{-c}\left(r\,e^{i\Theta}\right)^{c-1}}{\mathrm{Log}\,r-1}$$

Die reelle Componente ist $=$

$$\frac{\mathrm{Log}\,r+\mathrm{Log}\,e^{-c}\,.\,r^{c-1}}{\mathrm{Log}\,r-1}=\frac{\mathrm{Log}\,r-c+c\,\mathrm{Log}\,r-\mathrm{Log}\,r}{\mathrm{Log}\,r-1}$$

$$=\frac{c\,\mathrm{Log}\,r-c}{\mathrm{Log}\,r-1}=\frac{c\,(\mathrm{Log}\,r-1)}{\mathrm{Log}\,r-1}=\mathbf{c}$$

Die zweite Anforderung, dass unsere Function längs des innern Randes den Werth c zur reellen Componente habe, ist ebenfalls erfüllt, somit ist der Beweis geleistet, dass unsere Function nach den gestellten Bedingungen construirt ist.

Wir wollen nun ϱ beliebig variren lassen:

I. Es sei $\varrho = 1$, dann $x + i\,y = e^{i\,\Theta}$ also die Function

$$\frac{\mathrm{Log}\ r + \mathrm{Log}\ e^{-c}\left(e^{i\,\Theta}\right)^{c-1}}{\mathrm{Log}\ r - 1},$$

somit die reelle Componente

$$\frac{\mathrm{Log}\ r + \mathrm{Log}\ e^{-c}}{\mathrm{Log}\ r - 1} = \frac{\mathrm{Log}\ r - c}{\mathrm{Log}\ r - 1}$$

Nun aber ist $r < e$, also $\mathrm{Log}\ r < 1$. Der Nenner ist somit negativ, c ist nach Voraussetzung > 1, also auch der Zähler negativ und entwickelt man, so ist

$$\frac{\mathrm{Log}\ r - c}{\mathrm{Log}\ r - 1} \text{ absolut } > c.$$

Da aber Zähler und Nenner negativ, so ist $\frac{\mathrm{Log}\ r - c}{\mathrm{Log}\ r - 1}$ ein positiver unächter Bruch $> c$. Wir wissen somit, dass für $\varrho = 1$ $u > c$ ist.

II. Setzt man $\varrho = \frac{1}{2}$, so wird u noch grösser und für $\varrho = \delta$, wo δ unendlich nahe bei 0, ist $u = \infty$.

III. Suchen wir nun den Radius ϱ, für welchen die reelle Componente $= 0$ ist. ϱ habe da den Werth α, dann ist die Function $=$

$$\frac{\mathrm{Log}\ r + \mathrm{Log}\ e^{-c}\left(\alpha\, e^{i\,\Theta}\right)^{c-1}}{\mathrm{Log}\ r - 1}$$

und die reelle Componente $=$

$$\frac{\mathrm{Log}\ r + \mathrm{Log}\left(e^{-c}\,.\,\alpha^{c-1}\right)}{\mathrm{Log}\ r - 1} = \frac{\mathrm{Log}\ r - c + (c-1)\ \mathrm{Log}\ \alpha}{\mathrm{Log}\ r - 1}$$

Die Bedingung ist nun

$$\frac{\mathrm{Log}\ r - c + (c - 1)\ \mathrm{Log}\ \alpha}{\mathrm{Log}\ r - 1} = 0$$

$$\text{Log } r - c + (c - 1) \text{ Log } \alpha = o$$

$$\text{Log } \alpha = \frac{c - \text{Log } r}{c - 1}$$

$$\alpha = e^{\frac{c - \text{Log } r}{c - 1}}$$

Für den Radius $\alpha = e^{\frac{c - \text{Log } r}{c - 1}}$ hat somit die reelle Componente unserer Function den Werth 0.

Aber Log $r < c$, $c > 1$, somit $\frac{c - \text{Log } r}{c - 1}$ ein positiver unächter Bruch, da $c - \text{Log } r > c - 1$, weil

$$\text{Log } r < 1$$

somit $\alpha > e$ an dieser Stelle.

IV. Lassen wir nun ϱ noch grösser werden als α, z. B.

$$\varrho = e^{\frac{c}{c-1}}, \text{ dann die Function}$$

$$\frac{\text{Log } r + \text{Log } e^{-c} \left(e^{\frac{c}{c-1}} e^{i\Theta}\right)^{c-1}}{\text{Log } r - 1}$$

die reelle Componente

$$\frac{\text{Log } r - c + \frac{c}{c-1}\, c - 1}{\text{Log } r - 1} = \frac{\text{Log } r}{\text{Log } r - 1}$$

was negativ ist, denn Log $r < 1$.

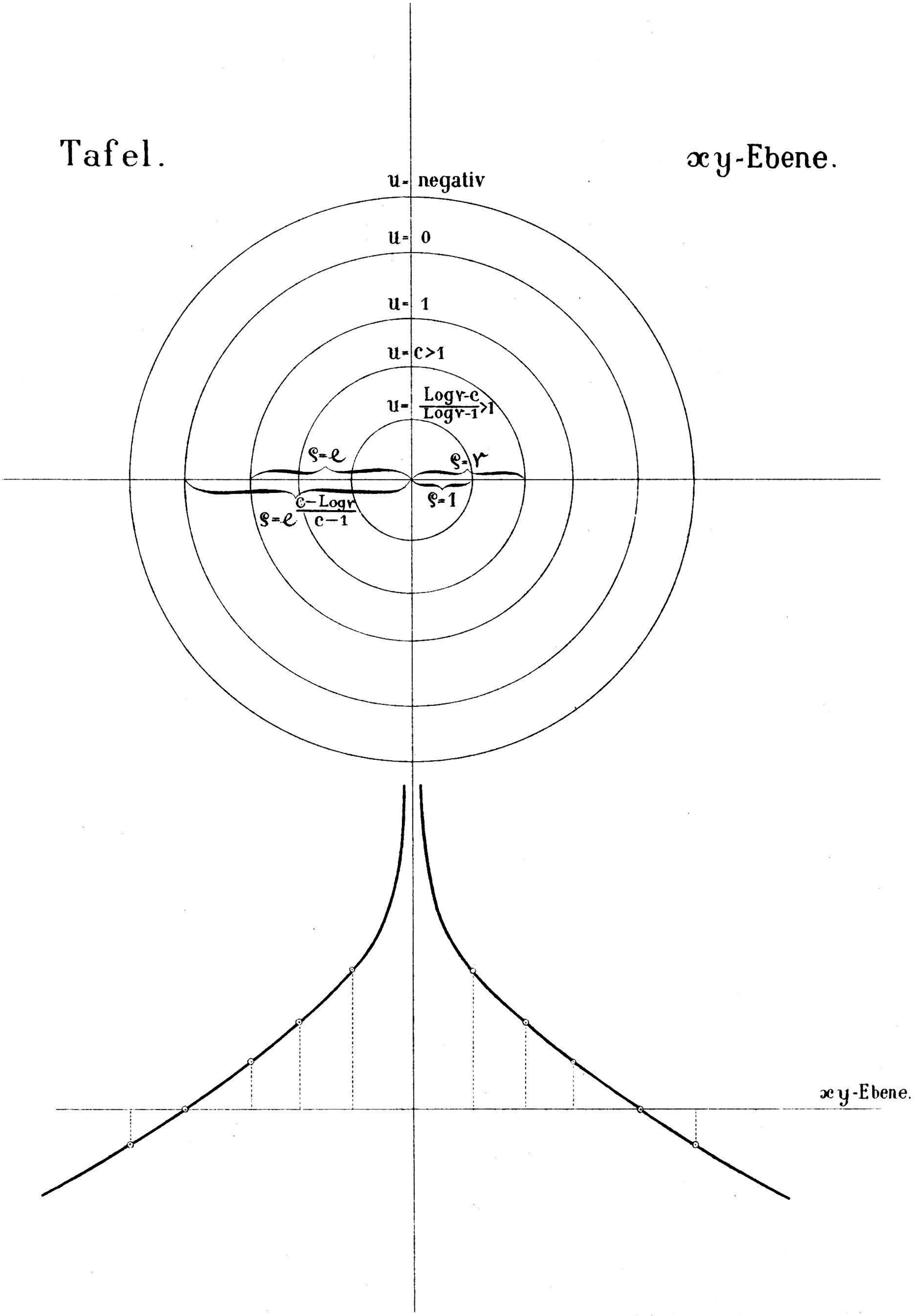
Wird ϱ noch grösser, so bleibt u stets negativ und wird schliesslich unendlich gross.

In allgemeiner Form lässt sich *unsere betrachtete Function* so schreiben:

$$\frac{\text{Log } r - c + \text{Log} \left(\varrho\, e^{i\Theta}\right)^{c-1}}{\text{Log } r - 1}$$

Tafel.

xy-Ebene.



und die reelle Componente

$$\frac{\text{Log } r - c + (c - 1) \text{ Log } \varrho}{\text{Log } r - 1} = \text{Constante} + \text{Constante} \times \text{Log } \varrho.$$

Betrachten wir nach diesen Darlegungen die Werthe der reellen Componente als dritte Abmessung senkrecht zur x y-Ebene abgetragen, so hat man folgende Tabelle für ϱ und u:

	ϱ	u
1)	∞	∞
2)	$e^{\frac{c}{c-1}}$	$\frac{\text{Log } r}{\text{Log } r - 1}$ negativ
3)	$e^{\frac{c - \text{Log } r}{c-1}}$	0
4)	e	1
5)	r	$c > 1$
6)	1	$\frac{\text{Log } r - c}{\text{Log } r - 1} > c$
7)	δ	∞

Aus der Tabelle und zugehörigen Zeichnung (siehe die Tafel) geht hervor, dass die Funktion u sich zwischen den Grenzwerthen des Kranzes 1 und c continuirlich verhält, dass sie aber, je mehr ϱ sich δ nährt, wo δ unendlich klein, nadelförmig aufschiesst und discontinuirlich wird. Dasselbe findet statt, wenn wir den äussern Rand sich gegen den Horizont ausdehnen lassen. In beiden Fällen hört die betrachtete Function auf stetig sich zu verhalten, der Functionsbegriff wird zerstört. —