Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1895)

Heft: 1373-1398

Artikel: Über eine Eigenschaft einer Gammafunktion mit einer Potenz als Argument

Autor: Eggenberger, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319076

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

J. Eggenberger.

Über eine Eigenschaft einer Gammafunktion mit einer Potenz als Argument.

(Eingereicht im Januar 1895.)

Das Euler'sche Integral II. Gattung sei definiert durch

1) $$\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-x} x^{y-1}\, dx. \quad (e = \text{Basis der nat. Logarithmen.})$$

Substituiert man darin x durch az, so folgt

$$\Gamma(y) = a^y \int_0^\infty e^{-az} z^{y-1}\, dz \text{ und für } y = 1$$

2) $$\Gamma(1) = a \int_0^\infty e^{-az}\, dz.$$

Weil aber nach 1):

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1,$$

so ergibt sich aus 2):

$$\frac{1}{a} = \int_0^\infty e^{-az}\, dz.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit da und integriert beiderseits zwischen 1 und a, so wird

3) $$\log a = \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z}\, dz.$$

Durch n-malige Multiplikation dieser Gleichung mit da und Integration zwischen den Grenzen 0 und a, erhalten wir rechts:

$$\int_0^{a\,(1)} \log a\, da = a \log a - a$$

$$\int_0^{a\,(2)} \log a\, da = \int_0^a a \log a\, da - \int_0^a a\, da$$

$$= \frac{a^2}{2} \log a - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2}$$

$$\int_0^{a\,(3)} \log a\, da = \int_0^a \left(\frac{a^2}{2} \log a - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \right) da$$

$$= \frac{a^3}{3!} \log a - \frac{a^3}{3!\,3} - \frac{a^3}{3!\,2} - \frac{a^3}{3!}$$

$$\int_0^{a\,(4)} \log a\, da = \frac{a^4}{4!} \log a - \frac{a^4}{4!\,4} - \frac{a^4}{4!\,3} - \frac{a^4}{4!\,2} - \frac{a^4}{4!}$$

— — — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — — —

$$\int_0^{a\,(n)} \log a\, da = \frac{a^n}{n!} \log a - \frac{a^n}{n\,n!} - \frac{a^n}{(n-1)\,n!} - \frac{a^n}{(n-2)\,n!} -$$

$$- \cdots - \frac{a^n}{3\,n!} - \frac{a^n}{2\,n!} - \frac{a^n}{n!}$$

$$= \frac{a^n}{n!} \log a - \frac{a^n}{n!} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right]$$

α)
$$\int_0^{a\,(n)} \log a\, da = \frac{a^n}{n!} \log a - \frac{a^n}{n!} \sum_{x=1}^{x=n} \frac{1}{x}$$

und links:

$$\int_0^{a\,(1)} \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z}\, dz\, da = \int_0^\infty \left(a\, e^{-z} + \frac{e^{-az}}{z} - \frac{1}{z} \right) \frac{dz}{z}$$

$$\int_0^{a\,(2)} \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z}\, dz\, da = \int_0^\infty \left(\frac{a^2\, e^{-z}}{2!} - \frac{e^{-az}}{z^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{a}{z} \right) \frac{dz}{z}$$

$$\int_0^a{}^{(3)} \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z} dz\, da = \int_0^\infty \left(\frac{a^3 e^{-z}}{3!} + \frac{e^{-az}}{z^3} - \frac{1}{z^3} + \frac{a}{z^2} - \frac{a^2}{2!\, z} \right) \frac{dz}{z}$$

$$\int_0^a{}^{(4)} \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z} dz\, da = \int_0^\infty \left(\frac{a^4 e^{-z}}{4!} - \frac{e^{-az}}{z^4} + \frac{1}{z^4} - \frac{a}{z^3} + \frac{a^2}{2!\, z^2} - \frac{a^3}{3!\, z} \right) \frac{dz}{z}$$

$$\int_0^a{}^{(5)} \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z} dz\, da = \int_0^\infty \left(\frac{a^5 e^{-z}}{5!} + \frac{e^{-az}}{z^5} - \frac{1}{z^5} + \frac{a}{z^4} - \frac{a^2}{2!\, z^3} + \frac{a^3}{3!\, z^2} - \frac{a^4}{4!\, z} \right) \frac{dz}{z}$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\beta) \int_0^a{}^{(n)} \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z} dz\, da = \int_0^\infty \left(\frac{a^n e^{-z}}{n!} + \frac{(-1)^{n+1} e^{-az}}{z^n} + \frac{(-1)^n}{z^n} + \frac{(-1)^{n-1} a}{z^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-2} a^2}{2!\, z^{n-2}} + \cdots + \frac{(-1)^3 a^{n-3}}{(n-3)!\, z^3} + \frac{(-1)^2 a^{n-2}}{(n-2)!\, z^2} - \frac{a^{n-1}}{(n-1)!\, z} \right) \frac{dz}{z}$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{a^n}{n!} e^{-z} - \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \frac{1}{z} + \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} \frac{1}{z^2} - \cdots + \frac{(-1)^{n-2}}{z^{n-2}} \frac{a^2}{2!} + \frac{(-1)^{n-1}}{z^{n-1}} a + \frac{(-1)^n}{z^n} + \frac{(-1)^{n+1}}{z^n} e^{-az} \right] \frac{dz}{z}.$$

Aus den Gleichungen α) und β) folgt:

$$4) \quad \frac{a^n}{n!} \log a = \frac{a^n}{n!} \cdot \sum_{x=1}^{x=n} \frac{1}{x} + \int_0^\infty \left[\frac{a^n}{n!} e^{-z} - \frac{a^{n-1}}{(n-1)!\, z} + \frac{a^{n-2}}{(n-2)!\, z^2} - \mp \cdots + \frac{(-1)^{n-2} a^2}{z^{n-2}\, 2!} + \frac{(-1)^{n-1} a}{z^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{z^n} + \frac{(-1)^{n+1} e^{-az}}{z^n} \right] \frac{dz}{z}.$$

Setzt man in Gleichung 4) der Reihe nach $a = 1, 2, 3 \ldots a - 2, a - 1$ und addiert sämtliche Gleichungen, so ergibt sich, wenn man zur Abkürzung

$$1^{1^n} \cdot 2^{2^n} \cdot 3^{3^n} \cdots (a-2)^{(a-2)^n} \cdot (a-1)^{(a-1)^n} = \Gamma(a^{a^n})$$

als neue Funktion setzt:

$$5) \qquad \frac{\log \Gamma(a^{a^n})}{n!} = \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=a-1} x^n \sum\limits_{x=1}^{x=n} \frac{1}{x}}{n!} + \int_0^\infty \Bigg[\frac{e^{-z} \sum\limits_{x=1}^{x=a-1} x^n}{n!}$$

$$- \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=a-1} x^{n-1}}{(n-1)!\, z} + \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=a-1} x^{n-2}}{(n-2)!\, z^2} - \mp \cdots$$

$$+ \frac{(-1)^{n-2} \sum\limits_{x=1}^{x=a-1} x^2}{2!\, z^{n-2}} + \frac{(-1)^{n-1} \sum\limits_{x=1}^{x=a-1} x}{z^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{z^n} + \frac{(-1)^{n+1} \sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=a-1} e^{-\alpha z}}{z^n} \Bigg] \frac{dz}{z}.$$

Ebenso für ein um die Einheit kleineres Argument:

$$6) \qquad \frac{\log \Gamma((a-1)^{(a-1)^n})}{n!} = \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=a-2} x^n \sum\limits_{x=1}^{x=n} \frac{1}{x}}{n!} + \int_0^\infty \Bigg[\frac{e^{-z} \sum\limits_{x=1}^{x=a-2} x^n}{n!}$$

$$- \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=a-2} x^{n-1}}{(n-1)!\, z} + \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=a-2} x^{n-2}}{(n-2)!\, z^2} \mp \cdots$$

$$+ \frac{(-1)^{n-2} \sum\limits_{x=1}^{x=a-2} x^2}{2!\, z^{n-2}} + \frac{(-1)^{n-1} \sum\limits_{x=1}^{x=a-2} x}{z^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{z^n} + \frac{(-1)^{n+1} \sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=a-2} e^{-\alpha z}}{z^n} \Bigg] \frac{dz}{z}.$$

Durch Subtraktion der Gleichung 6) von 5) und unter Berücksichtigung folgender Thatsachen:

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=a-1} e^{-\alpha z} = \frac{1 - e^{-(a-1)z}}{e^z - 1},$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=a-2} e^{-\alpha z} = \frac{1 - e^{-(a-2)z}}{e^{z} - 1},$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=a-1} e^{-\alpha z} - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=a-2} e^{-\alpha z} = e^{-(a-1)z}$$ und

$$\sum_{x=1}^{x=a-1} x^{n} - \sum_{x=1}^{x=a-2} x^{n} = (a-1)^{n}$$

erhält man:

$$(7 \quad \frac{\log \Gamma(a^{a^{n}})}{n!} - \frac{\log \Gamma((a-1)^{(a-1)^{n}})}{n!} = \frac{(a-1)^{n} \sum_{x=1}^{x=n} \frac{1}{x}}{n!} +$$

$$\int_{0}^{\infty} \Big[\frac{(a-1)^{n} e^{-z}}{n!} - \frac{(a-1)^{n-1}}{(n-1)!\, z} + \frac{(a-1)^{n-2}}{(n-2)!\, z^{2}} \mp \cdots$$

$$+ \frac{(-1)^{n-2} (a-1)^{2}}{z^{n-2}\, 2!} + \frac{(-1)^{n-1} (a-1)}{z^{n-1}} + \frac{(-1)^{n}}{z^{n}} + \frac{(-1)^{n+1} e^{-(a-1)z}}{z^{n}} \Big] \frac{dz}{z}.$$

Nach Gleichung 4) ist aber die rechte Seite von Gleichung 7)

$$= \frac{(a-1)^{n} \log (a-1)}{n!}.$$

Diesen Ausdruck substituiert, ergibt:

$$8) \qquad \frac{\log \Gamma(a^{a^{n}})}{n!} - \frac{\log \Gamma((a-1)^{(a-1)^{n}})}{n!} = \frac{(a-1)^{n} \log (a-1)}{n!}$$

oder

$$9) \qquad \Gamma(a^{a^{n}}) = (a-1)^{(a-1)^{n}}\, \Gamma((a-1)^{(a-1)^{n}}).$$

Für $n = o$ folgt aus dieser Gleichung die bekannte Beziehung:

$$\Gamma(a) = (a-1)\, \Gamma(a-1).$$

Die in Gleichung 5) gegebene Funktion genügt somit der ersten Eigenschaft einer Gammafunktion. Der o-Punkt ist für dieselbe ein Unstetigkeitspunkt.