Über eine Eigenschaft einer Gammafunktion mit einer Potenz als Argument

Autor(en): **Eggenberger, J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1895)**

Heft 1373-1398

PDF erstellt am: **28.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-319076

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

J. Eggenberger.

Über eine Eigenschaft einer Gammafunktion mit einer Potenz als Argument.

(Eingereicht im Januar 1895.)

Das Euler'sche Integral II. Gattung sei definiert durch

1) $$\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-x} x^{y-1} dx. \quad (e = \text{Basis der nat. Logarithmen.})$$

Substituiert man darin x durch az, so folgt

$$\Gamma(y) = a^y \int_0^\infty e^{-az} z^{y-1} dz \text{ und für } y = 1$$

2) $$\Gamma(1) = a \int_0^\infty e^{-az} dz.$$

Weil aber nach 1):

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1,$$

so ergibt sich aus 2):

$$\frac{1}{a} = \int_0^\infty e^{-az} dz.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit da und integriert beiderseits zwischen 1 und a, so wird

3) $$\log a = \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z} dz.$$

Durch n-malige Multiplikation dieser Gleichung mit da und Integration zwischen den Grenzen 0 und a, erhalten wir rechts:

$$\int_0^a {}^{(1)} \log a \, da = a \log a - a$$

$$\int_0^a {}^{(2)} \log a \, da = \int_0^a a \log a \, da - \int_0^a a \, da$$

$$= \frac{a^2}{2} \log a - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2}$$

$$\int_0^a {}^{(3)} \log a \, da = \int_0^a \left(\frac{a^2}{2} \log a - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \right) da$$

$$= \frac{a^3}{3!} \log a - \frac{a^3}{3!\,3} - \frac{a^3}{3!\,2} - \frac{a^3}{3!}$$

$$\int_0^a {}^{(4)} \log a \, da = \frac{a^4}{4!} \log a - \frac{a^4}{4!\,4} - \frac{a^4}{4!\,3} - \frac{a^4}{4!\,2} - \frac{a^4}{4!}$$

— — — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — — —

$$\int_0^a {}^{(n)} \log a \, da = \frac{a^n}{n!} \log a - \frac{a^n}{n\,n!} - \frac{a^n}{(n-1)\,n!} - \frac{a^n}{(n-2)\,n!} -$$

$$- \cdots - \frac{a^n}{3\,n!} - \frac{a^n}{2\,n!} - \frac{a^n}{n!}$$

$$= \frac{a^n}{n!} \log a - \frac{a^n}{n!} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right]$$

α)
$$\int_0^a {}^{(n)} \log a \, da = \frac{a^n}{n!} \log a - \frac{a^n}{n!} \sum_{x=1}^{x=n} \frac{1}{x}$$

und links:

$$\int_0^a {}^{(1)} \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z} \, dz \, da = \int_0^\infty \left(a\, e^{-z} + \frac{e^{-az}}{z} - \frac{1}{z} \right) \frac{dz}{z}$$

$$\int_0^a {}^{(2)} \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z} \, dz \, da = \int_0^\infty \left(\frac{a^2\, e^{-z}}{2!} - \frac{e^{-az}}{z^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{a}{z} \right) \frac{dz}{z}$$

$$\int_0^a \overset{(3)}{} \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z} dz\, da = \int_0^\infty \left(\frac{a^3 e^{-z}}{3!} + \frac{e^{-az}}{z^3} - \frac{1}{z^3} + \frac{a}{z^2} - \frac{a^2}{2!\, z} \right) \frac{dz}{z}$$

$$\int_0^a \overset{(4)}{} \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z} dz\, da = \int_0^\infty \left(\frac{a^4 e^{-z}}{4!} - \frac{e^{-az}}{z^4} + \frac{1}{z^4} - \frac{a}{z^3} + \frac{a^2}{2!\, z^2} - \frac{a^3}{3!\, z} \right) \frac{dz}{z}$$

$$\int_0^a \overset{(5)}{} \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z} dz\, da = \int_0^\infty \left(\frac{a^5 e^{-z}}{5!} + \frac{e^{-az}}{z^5} - \frac{1}{z^5} + \frac{a}{z^4} - \frac{a^2}{2!\, z^3} + \frac{a^3}{3!\, z^2} - \frac{a^4}{4!\, z} \right) \frac{dz}{z}$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\beta) \int_0^a \overset{(n)}{} \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z} dz\, da = \int_0^\infty \left(\frac{a^n e^{-z}}{n!} + \frac{(-1)^{n+1} e^{-az}}{z^n} + \frac{(-1)^n}{z^n} + \frac{(-1)^{n-1} a}{z^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-2} a^2}{2!\, z^{n-2}} + \cdots + \frac{(-1)^3 a^{n-3}}{(n-3)!\, z^3} + \frac{(-1)^2 a^{n-2}}{(n-2)!\, z^2} - \frac{a^{n-1}}{(n-1)!\, z} \right) \frac{dz}{z}$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{a^n}{n!} e^{-z} - \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \frac{1}{z} + \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} \frac{1}{z^2} - \cdots + \frac{(-1)^{n-2}}{z^{n-2}} \frac{a^2}{2!} + \frac{(-1)^{n-1}}{z^{n-1}} a + \frac{(-1)^n}{z^n} + \frac{(-1)^{n+1}}{z^n} e^{-az} \right] \frac{dz}{z}.$$

Aus den Gleichungen α) und β) folgt:

$$4) \quad \frac{a^n}{n!} \log a = \frac{a^n}{n!} \cdot \sum_{x=1}^{x=n} \frac{1}{x} + \int_0^\infty \left[\frac{a^n}{n!} e^{-z} - \frac{a^{n-1}}{(n-1)!\, z} + \frac{a^{n-2}}{(n-2)!\, z^2} - \mp \cdots + \frac{(-1)^{n-2} a^2}{z^{n-2}\, 2!} + \frac{(-1)^{n-1} a}{z^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{z^n} + \frac{(-1)^{n+1} e^{-az}}{z^n} \right] \frac{dz}{z}.$$

Setzt man in Gleichung 4) der Reihe nach a = 1, 2, 3 . . . a — 2, a — 1 und addiert sämtliche Gleichungen, so ergibt sich, wenn man zur Abkürzung

$$1^{1^n} \cdot 2^{2^n} \cdot 3^{3^n} \ldots (a-2)^{(a-2)^n} (a-1)^{(a-1)^n} = \Gamma(a^{a^n})$$

als **neue Funktion** setzt:

$$5) \quad \frac{\log \Gamma(a^{a^n})}{n!} = \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=a-1} x^n \sum\limits_{x=1}^{x=n} \frac{1}{x}}{n!} + \int_0^\infty \left[\frac{e^{-z} \sum\limits_{x=1}^{x=a-1} x^n}{n!} - \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=a-1} x^{n-1}}{(n-1)!\, z} + \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=a-1} x^{n-2}}{(n-2)!\, z^2} - \mp \ldots + \frac{(-1)^{n-2} \sum\limits_{x=1}^{x=a-1} x^2}{2!\, z^{n-2}} + \frac{(-1)^{n-1} \sum\limits_{x=1}^{x=a-1} x}{z^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{z^n} + \frac{(-1)^{n+1} \sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=a-1} e^{-\alpha z}}{z^n} \right] \frac{dz}{z}.$$

Ebenso für ein um die Einheit kleineres Argument:

$$6) \quad \frac{\log \Gamma((a-1)^{(a-1)^n})}{n!} = \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=a-2} x^n \sum\limits_{x=1}^{x=n} \frac{1}{x}}{n!} + \int_0^\infty \left[\frac{e^{-z} \sum\limits_{x=1}^{x=a-2} x^n}{n!} - \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=a-2} x^{n-1}}{(n-1)!\, z} + \frac{\sum\limits_{x=1}^{x=a-2} x^{n-2}}{(n-2)!\, z^2} \mp \ldots + \frac{(-1)^{n-2} \sum\limits_{x=1}^{x=a-2} x^2}{2!\, z^{n-2}} + \frac{(-1)^{n-1} \sum\limits_{x=1}^{x=a-2} x}{z^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{z^n} + \frac{(-1)^{n+1} \sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=a-2} e^{-\alpha z}}{z^n} \right] \frac{dz}{z}.$$

Durch Subtraktion der Gleichung 6) von 5) und unter Berücksichtigung folgender Thatsachen:

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=a-1} e^{-\alpha z} = \frac{1 - e^{-(a-1)z}}{e^z - 1},$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=a-2} e^{-\alpha z} = \frac{1 - e^{-(a-2)z}}{e^z - 1},$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=a-1} e^{-\alpha z} - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=a-2} e^{-\alpha z} = e^{-(a-1)z}$$ und

$$\sum_{x=1}^{x=a-1} x^n - \sum_{x=1}^{x=a-2} x^n = (a-1)^n$$

erhält man:

$$(7 \quad \frac{\log \Gamma(a^{a^n})}{n!} - \frac{\log \Gamma((a-1)^{(a-1)^n})}{n!} = \frac{(a-1)^n \sum_{x=1}^{x=n} \frac{1}{x}}{n!} +$$

$$\int_0^\infty \left[\frac{(a-1)^n e^{-z}}{n!} - \frac{(a-1)^{n-1}}{(n-1)!\, z} + \frac{(a-1)^{n-2}}{(n-2)!\, z^2} \mp \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{n-2}(a-1)^2}{z^{n-2}\, 2!} + \frac{(-1)^{n-1}(a-1)}{z^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{z^n} + \frac{(-1)^{n+1} e^{-(a-1)z}}{z^n} \right] \frac{dz}{z}.$$

Nach Gleichung 4) ist aber die rechte Seite von Gleichung 7)

$$= \frac{(a-1)^n \log (a-1)}{n!}.$$

Diesen Ausdruck substituiert, ergibt:

$$8) \quad \frac{\log \Gamma(a^{a^n})}{n!} - \frac{\log \Gamma((a-1)^{(a-1)^n})}{n!} = \frac{(a-1)^n \log (a-1)}{n!}$$

oder

$$9) \quad \Gamma(a^{a^n}) = (a-1)^{(a-1)^n}\, \Gamma((a-1)^{(a-1)^n}).$$

Für $n = o$ folgt aus dieser Gleichung die bekannte Beziehung:

$$\Gamma(a) = (a-1)\, \Gamma(a-1).$$

Die in Gleichung 5) gegebene Funktion genügt somit der ersten Eigenschaft einer Gammafunktion. Der o-Punkt ist für dieselbe ein Unstetigkeitspunkt.