

# 1848

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): - **(1896)**

Heft 1399-1435

PDF erstellt am: **14.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

J. H. Graf.

# Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli.

Festgabe der Bernischen Naturforschenden Gesellschaft an die  
Zürcherische Naturforschende Gesellschaft anlässlich der Feier des 150-  
jährigen Bestehens der Letzteren im August 1896.

Der Briefwechsel der beiden grossen Mathematiker wurde eingeleitet nach dem Besuche Steiner's in Bern 1843 und beginnt mit einem Brief Steiner's an den gemeinschaftlichen Freund Steiner's und Schläfli's, den Professor der Philosophie *Ris* in Bern. Der Brief ist ohne Datum, aber sehr wahrscheinlich vom August 1848 <sup>1)</sup> und geschrieben aus Rippoldsau, wo Steiner zum Kurgebrauch sich aufhielt. Der Brief ist nur im Concept von Steiner's Hand vorhanden und wurde von mir aus drei andern Concepten zum einheitlichen Ganzen zusammengefasst.

## 1848. Steiner an Ris (Schläfli).

*Verehrter Freund!*

«Das ist e *seltsame* Brief; es ist seit länger als Jahr und Tag  
«der 3te den ich schreibe, aber vor meiner Abreise von Berlin nahm  
«ich mir vor, von hier aus einige Zeilen an Sie zu richten — ich  
«eile mein Gelübde zu halten, ehe ich ganz matt gewässert bin.

«Aus Ihren Berichten — für deren freundliche Zusendung ich  
«Ihnen bestens danke — habe ich ersehen, dass Sie in fortgesetzter  
«Thätigkeit für die Wissenschaft sind und dass Sie auch Schläfli zu ani-  
«miren wissen. Er hat einige nette Sachen gemacht, aber mit seiner  
«grossen Kraft könnte er noch weit mehr leisten, wenn er bei guter

<sup>1)</sup> Siehe eine bezügliche Stelle in Steiner's Brief vom 31. Juli 1851.

«Stimmung wäre. Seine Versetzung an die Universität ist wohl nicht  
«erfolgt, weil die Zeitumstände zu ungünstig waren. Es thut mir  
«leid! —

«Mein Anliegen an Sie wär' öppe das: Den Thuner Mathematiker  
«zu veranlassen (wofern Sie es für geeignet erachten), sich mit nach-  
«stehenden Sätzen und Aufgaben zu befassen, welche mir von meinen  
«letzten Bemühungen (während des Revolutions-Gewühls) noch halb  
«unverdaut im Magen sitzen.

«Eine Curve 4ten Grads  $C^4$  und ein Kegelschnitt  $K^2$  können ein-  
«ander in 4 Punkten berühren.

«1. «Wird in einer Curve  $C^4$  ein Punkt  $a$  angenommen, so  
«gibt es im Allgemeinen 63 Kegelschnitte  $K^2$ , welche dieselbe in  
« $a$  und ausserdem in noch irgend drei andern Punkten berühren.»  
«(Mein Beweis ist schwach und unsicher.)

«Im weitem Verfolg dieses Satzes wurde ich auf folgende Dio-  
«phantische Aufg. geführt:

«2. «Man denke sich beliebig liegende Punkte; ihre unbestimmte  
«Anzahl sei  $= x$ . Von welcher Form muss die Zahl  $x$  sein, damit  
«die Punkte den Forderungen genügen:

«a) dass sie sich zu 3 und 3 so zu Dreiecken  $E_3$  verbinden  
«lassen, dass je 2 Punkte, die man beliebig wählt, allemal  
«Ecken *eines*, aber *nur eines einzigen* Dreiecks  $E_3$  sind;

«b) dass je 3 Punkte, die man wählt, Ecken eines, aber nur  
«eines Vierecks  $E_4$  sind, wobei jedoch von den 4 Ecken  
«jedes  $E_4$  keine drei die Ecken eines der vorigen (a) Drei-  
«ecke  $E_3$  sein dürfen;

«c) dass wenn man 4 Punkte wählt, dieselben Ecken eines Fünf-  
«ecks  $E_5$  sind, und dessen fünfte Ecke nothwendig bestim-  
«men, aber es sollen von den fünf Ecken jedes  $E_5$  weder 4  
«die Ecken eines der vorigen  $E_4$ , noch 3 die Ecken eines  
«der vorigen  $E_3$  sein;

«d) dass sie sich ebenso zu Sechsecken  $E_6$  verbinden lassen,  
«aber dass je fünf Ecken jedes  $E_6$  nur zu einem einzigen  
« $E_6$  gehören, und dass keine 5, 4, 3 Ecken eines dieser  
« $E_6$  zugleich die Ecken eines der vorhergehenden  $E_5$ ,  $E_4$ ,  
« $E_3$  sein dürfen, und eben so für  $E_7$ ,  $E_8$  . . . .

«Wie gross ist dabei die Anzahl der  $E_3$ ,  $E_4$ ,  $E_5$ ,  $E_6$ , . . . . ?»

«Ich fand: Für die Anzahl der Dreiecke  $E_3 = \frac{x(x-1)}{2 \cdot 3}$ . Ein

«natürlicher Grund bedingt, dass  $x$  ungerad, und daher eine Zahl von  
«einer der zwei Formen

« $6n + 1$  oder  $6n + 3$  sein muss.

«Die Zahl der  $E_4$  ist  $= \frac{x(x-1)(x-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ . Dies verbunden mit dem

«Vorigen, bedingt für  $x$  die vier Formen:

« $12n + 1$ ;  $12n + 3$ ;  $12n + 7$ ;  $12n + 9$ .

«Die kleinste Anzahl Punkte, welche diesen beiden Fällen genügt,  
«ist  $x = 7$ , und giebt 7  $E_3$  und 7  $E_4$ .

«Ich hoffe und erwarte, Herr Schläfli werde das weitere, das  
«allgemeine Gesetz, allein bewältigen.

«Beide Sätze (1.) und (2.) haben Bezug auf die 28 Doppeltan-  
«genten dt der Curve  $C_4$ . Diese 28 dt gruppieren sich zu 12 und 12  
«in 63 Systeme, wovon jedes die nämlichen bestimmten Eigenschaften  
«hat. — Wenn es Herrn Schläfli gelingt, diesen 28 dt mit der Rech-  
«nung beizukommen, so wird er auch finden, dass ihre 56 Berührungs-  
«punkte zu 4 und 4 in Geraden liegen; — wie oft? und welche Lage  
«haben diese Geraden gegen einander? <sup>1)</sup>

«Wenn der begabte Mathematiker aufgelegt ist, so kann er sich  
«auch an nachfolgenden Sätzen üben, mit deren Anfang wir uns in  
«Rom gemeinschaftlich beschäftigt haben.

«E r k l ä r u n g: Legt man aus einem beliebigen Punkte  $P$  Tan-  
«genten an eine Curve  $n^{\text{ten}}$  Grads  $C^n$ , so liegen die  $n(n-1)$  Berührungs-  
«punkte in einer Curve von  $n-1^{\text{ten}}$  Grads  $C^{n-1}$ ; an diese aus  $P$  wie-  
«derum Tangenten, liegen die  $(n-1)(n-2)$  Berührungspunkte in einer  
«Curve  $C^{n-2}$ , an diese wieder Tangenten, giebt  $C^{n-3}$ ; u. s. w. Diese  
«neuen Curven  $C^{n-1}$ ,  $C^{n-2}$ , . . . . .  $C^{n-x}$ , . . . . ,  $C^2$ ,  $C^1$  heissen (bei  
«mir) nach der Reihe die 1<sup>te</sup>, 2<sup>te</sup> . . . . .  $x^{\text{te}}$ , . . . . ,  $n-2^{\text{te}}$ ,  $n-1^{\text{te}}$   
«Polare des Punktes  $P$  in Bezug auf die Basis  $C^n$ .

I. «Bewegt sich der Pol  $P$  in einer gegebenen Curve  $C^r$ , so ist  
«die Enveloppe seiner  $x^{\text{ten}}$  Polare,  $C^{n-x}$ , eine Curve vom

« $r(r + 2x - 3)(n - x)^{\text{ten}}$  Grad.»

<sup>1)</sup> Die Aufgabe wurde von Schläfli nicht gelöst, vergl. Brief Steiner an Schläfli vom 15. Dezember 1850. Nach der gleichen Quelle besuchte Steiner Schläfli in Bern im Herbst 1850 anlässlich einer Reise nach Wien.

Der Satz, dass die 56 Berührungspunkte der dt zu 4 und 4 in Geraden liegen, ist falsch. Immerhin ist es möglich, dass Steiner, als er den Brief schrieb, an seine Richtigkeit glaubte. Er fehlt in der gedruckten Arbeit über die dt der  $C_4$ . (Bemerkung von H. Prof. Dr. C. F. Geiser.)

II. «Hat die  $x^{\text{te}}$  Polare eines Punktes P einen Doppelpunkt Q, «so hat umgekehrt die  $n-x-1^{\text{te}}$  Polare von Q jenen Punkt P zum «Doppelpunkt.»

III. «Der Ort des Punktes P, dessen  $1^{\text{te}}$  Polare,  $C^{n-1}$ , einen Doppelpunkt Q hat, ist eine Curve  $\mathfrak{P}$  vom  $3(n-2)^2$ ten Grad; und der Ort von Q ist eine Curve  $\mathfrak{Q}$  vom  $3(n-2)^{\text{ten}}$  Grad; der Ort der Geraden «PQ ist eine Curve  $\mathfrak{R}$  von der  $3(n-1)(n-2)$  Klasse und von derselben Klasse ist auch die Curve  $\mathfrak{P}$ .»<sup>1)</sup>

In einem 2<sup>ten</sup> Concept spricht Steiner die Absicht aus, nach Beendigung seiner Cur in Rippoldsau, wohin er Ende Juli 1848 gekommen ist, nach der Schweiz zu reisen, wenn nicht sein Bruder *Hans Steiner* der aus Amerika in Utzenstorf zu Besuch sei, schon früher zurückkehre und ihn in Rippoldsau besuche. —

### 1850. Schläfli an Steiner.

*Herr Professor!*

Sie werden sich wohl mit mir freuen, dass ich jetzt etwas gearbeitet habe, das zu publiciren ich mich nicht schäme. Es ist die Theorie der Elimination zwischen algebraischen Gleichungen im allgemeinsten Sinne. Zum gegebenen System von  $n$  höhern Gleichungen mit  $n$  Unbekannten nehme ich noch eine lineare Gleichung mit literalen [unbestimmten] Coefficienten  $a, b, c, \dots$  hinzu und zeige, wie man auf diesem Wege, ohne je mit fremden Faktoren die Rechnung zu belästigen, zur ächten Resultante gelangen kann. Ist alles Uebrige numerisch gegeben, so muss diese Resultante in Faktoren zerlegbar sein, welche alle in Beziehung auf  $a, b, c, \dots$  linear sind. In jedem einzelnen dieser linearen Polynome sind dann die Coefficienten von  $a, b, c, \dots$  die zu *einer* Lösung gehörenden Werte der Unbekannten.

Ich beleuchte dann die von *Hesse* in seiner bekannten Abhandlung über die Resultante dreier quadratischer Gleichungen gegebene Bedeutung über ein allgemeines Eliminationsverfahren und zeige, dass dieses nicht zum Ziele führen kann. Ich untersuche ferner die Eigenschaften der Resultante eines Systems algebraischer Gleichungen überhaupt und finde eine Reihe von Sätzen, von denen die bekannten Sätze *Jakobi's* über die Determinante sich als spezielle Fälle ergeben. Ich gehe in mehrere besondere Fälle ein, die immer noch von beträchtlicher relativer Allgemeinheit sind, und unterwerfe namentlich die Resultante der acht abgeleiteten Gleichungen eines vierschichtig

<sup>1)</sup> Schläfli hat es Steiner etwas entgelten lassen, dass er die Aufgaben nicht ihm direkt zugesandt hat.