

Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Band: - (1896)
Heft: 1399-1435

Artikel: Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schäfli
Kapitel: 1850
Autor: Graf, J. H.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-319085>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 18.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

II. «Hat die x^{te} Polare eines Punktes P einen Doppelpunkt Q, «so hat umgekehrt die $n-x-1^{\text{te}}$ Polare von Q jenen Punkt P zum «Doppelpunkt.»

III. «Der Ort des Punktes P, dessen 1^{te} Polare, C^{n-1} , einen Doppelpunkt Q hat, ist eine Curve \mathfrak{P} vom $3(n-2)^2$ ten Grad; und der Ort von Q ist eine Curve \mathfrak{Q} vom $3(n-2)^{\text{ten}}$ Grad; der Ort der Geraden «PQ ist eine Curve \mathfrak{R} von der $3(n-1)(n-2)$ Klasse und von derselben Klasse ist auch die Curve \mathfrak{P} .»¹⁾

In einem 2^{ten} Concept spricht Steiner die Absicht aus, nach Beendigung seiner Cur in Rippoldsau, wohin er Ende Juli 1848 gekommen ist, nach der Schweiz zu reisen, wenn nicht sein Bruder *Hans Steiner* der aus Amerika in Utzenstorf zu Besuch sei, schon früher zurückkehre und ihn in Rippoldsau besuche. —

1850. Schläfli an Steiner.

Herr Professor!

Sie werden sich wohl mit mir freuen, dass ich jetzt etwas gearbeitet habe, das zu publiciren ich mich nicht schäme. Es ist die Theorie der Elimination zwischen algebraischen Gleichungen im allgemeinsten Sinne. Zum gegebenen System von n höhern Gleichungen mit n Unbekannten nehme ich noch eine lineare Gleichung mit literalen [unbestimmten] Coefficienten a, b, c, \dots hinzu und zeige, wie man auf diesem Wege, ohne je mit fremden Faktoren die Rechnung zu belästigen, zur ächten Resultante gelangen kann. Ist alles Uebrige numerisch gegeben, so muss diese Resultante in Faktoren zerlegbar sein, welche alle in Beziehung auf a, b, c, \dots linear sind. In jedem einzelnen dieser linearen Polynome sind dann die Coefficienten von a, b, c, \dots die zu *einer* Lösung gehörenden Werte der Unbekannten.

Ich beleuchte dann die von *Hesse* in seiner bekannten Abhandlung über die Resultante dreier quadratischer Gleichungen gegebene Bedeutung über ein allgemeines Eliminationsverfahren und zeige, dass dieses nicht zum Ziele führen kann. Ich untersuche ferner die Eigenschaften der Resultante eines Systems algebraischer Gleichungen überhaupt und finde eine Reihe von Sätzen, von denen die bekannten Sätze *Jakobi's* über die Determinante sich als spezielle Fälle ergeben. Ich gehe in mehrere besondere Fälle ein, die immer noch von beträchtlicher relativer Allgemeinheit sind, und unterwerfe namentlich die Resultante der acht abgeleiteten Gleichungen eines vierschichtig

¹⁾ Schläfli hat es Steiner etwas entgelten lassen, dass er die Aufgaben nicht ihm direkt zugesandt hat.

linearen Polynoms mit je zwei Variablen in jeder Schicht und mit 16 Coefficienten einer genauen und ausführlichen Untersuchung, wobei mehrere schon an sich interessante Hilfssätze gebraucht werden. Diese Resultante erreicht den 24. Grad und wird zuletzt als ein Aggregat von Produkten von vier vollständigen Hyperdeterminanten dargestellt, welche resp. vom 2., 6., 8. und 12. Grade sind. *Cayley* hatte [Crelle XXX] die Resultante als vom 6. Grade angegeben. Ich zeige aufs Bestimmteste, dass sie nothwendig vom 24. Grade ist. Endlich behandle ich die Construction der *reciproken* oder *Classengleichung* zu einer ihrem Grade nach freigegebenen algebraischen Gleichung im allgemeinsten Sinne, und zeige, wie die Coefficienten der Classengleichung durch eine Art von Differentiation aus einander abgeleitet werden können, so dass der schwierigste Teil der Aufgabe nur auf die Berechnung eines einzigen Coefficienten in Funktion der ursprünglichen Elemente zurückgeführt ist, was auf die Berechnung der Resultante der abgeleiteten Gleichungen des ursprünglichen Polynoms, nachdem man darin eine Variable gleich Null gesetzt hat, hinauskömmt. Hievon mache ich eine Anwendung auf Flächen und Curven und insbesondere auf die Curve dritten Grades. Als Anhang theile ich noch jenen zur Determinantentheorie gehörenden allgemeinen Satz mit, von dem ich Ihnen schon gesprochen habe. Das Manuscript zählt 16 Bogen und mag etwa 6 Druckbogen geben. Ich war bereits im Begriffe dasselbe abzusenden, und erkundigte mich noch bei *Bernhard Studer*¹⁾ über die Art, wie dieses geschehen könnte. Er hielt es für gewagt, beim gegenwärtigen Kriegslärm eine Arbeit an die Wiener Academie zu schicken: die würde wahrscheinlich unbeachtet liegen bleiben. Es sei auch noch ungewiss, ob die Akademie sich nicht auflösen werde. Anfangs erbötig, an Herrn *Boué*²⁾ in Wien, ein ihm befreundetes Mitglied der Akademie, welcher zugleich Burger von Burgdorf ist, zu schreiben und gesonnen, die Antwort, die etwa in 14 Tagen erfolgen würde, abzuwarten, fand er bald einen anderen Weg für besser, den ich aber lieber nicht befolge, weil er mich nach einer Seite hin verpflichten würde, wo ich durchaus keine Verbindlichkeit eingehen mag, Bevor ich nun das Manuscript absende, möchte ich vor allem aus

¹⁾ Der bekannte Geologe, von welchem wir leider immer noch keine Biographie besitzen.

²⁾ Boué, Ami (16. III. 1794 † 21. XI. 1881 in Wien), studirte in Genf, Paris, Edinburg und Berlin, Geologe, Dr. med. und war Mitglied der K. Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. (Vgl. geolog. Jahrbuch Vol. 32. 1882.)

Ihren Rat hören. Sie können vielleicht an einen Ihrer Freunde in Wien schreiben, um meiner Arbeit eine günstige Aufnahme zu verschaffen, und mir dann Jemanden bezeichnen, an den ich die Zusendung zu adressiren hätte. In meinem Briefe würde ich auch jedenfalls erwähnen, dass Sie mir Aussicht auf ein Honorar gegeben hätten, und versprechen, im Falle der Zusicherung eines solchen die Eingabe fortzusetzen. Doch möchte ich Sie noch fragen, ob ich wirklich ein Honorar verlangen, und wie viel ich verlangen, oder ob ich den Betrag desselben der Akademie überlassen soll.

Da mir nun noch Zeit übrig bleibt, so werde ich meiner Arbeit noch einen die Theorie der Curven dritten Grades betreffenden Satz beifügen, den mir *Hesse*¹⁾ und *Aronhold*²⁾ übersehen zu haben scheinen. Die Hauptsache darin macht eine Curve dritter Classe [$\Psi(p, q, r) = 0$] aus, welche die 9 Wendungstangenten der ursprünglichen Curve dritten Grades $V(x, y, z) = 0$ berührt. Das Polynom Ψ jener Curven spielt eine doppelte Rolle, einestheils bei der Darstellung der Classengleichung, andererseits in der analytischen Lösung der Aufgabe, die Wendungspunkte einer C_3 zu finden.

Ist nämlich $216W$ die Funktionaldeterminante des ursprünglichen Polynoms V und wiederum w die Funktionaldeterminante von W , so ist nach *Hesse*:

$$\frac{1}{2}w = 4\alpha^2 V + \beta W \quad [1]$$

der Faktor λ , der $W + \lambda V$ in drei lineare Faktoren zerlegbar macht, ist durch die biquadratische Gleichung

$$27\lambda^4 + 18\alpha\lambda^2 + \beta\lambda - \alpha^2 = 0$$

bestimmt. Nun hat freilich *Aronhold* die Funktionen α und β unmittelbar aus den ursprünglichen Elementen von V construirt. Für die numerische Anwendung wird es aber leichter sein, α und β aus [1] herzuleiten. Nur schade, dass da α^2 vorkömmt, weshalb das Vorzeichen von α ungewiss bleibt. Durch meine Formel wird diese Ungewissheit beseitigt. Sie ist

$$\Psi = \alpha V^2 + W^2 \quad [2]$$

wenn in $\Psi[p, q, r]$ für die reciproken Variablen p, q, r die durch 3 dividirten Differentialcoefficienten des ursprünglichen Polynoms V substituirt werden. Wenn

¹⁾ *Hesse*, Ludwig Otto, geb. 22. IV. 1811, Professor in Königsberg, Halle Heidelberg und München, † 4. VIII. 1874.

²⁾ *Aronhold*, Siegfried Heinrich, geb. 16. VII. 1819, Prof. in Berlin, † 13. III. 1884.

$$V = ax^3 + 3d x^2 y + 3e x^2 z + 3g x y^2 + 6 k x y z + 3h x z^2 + b y^3 \\ + 3f y^2 z + 3j y z^2 + c z^3$$

das Polynom der C_3 ist, so ist

$$\Psi = p^3 e^{\frac{-9 \mathfrak{M} + r \mathfrak{N}}{p}} \begin{vmatrix} g & k & h \\ b & f & j \\ f & j & e \end{vmatrix}$$

nach abgekürzter Schreibweise der Taylor'schen Formel, wo \mathfrak{M} und \mathfrak{N} resp. die ableitenden Operationen bezeichnen, wo die Differentiale der Elemente a resp. in o und in o

$$\begin{array}{ccc} d & e & a \quad o \quad o \quad a \\ g & k & h \quad 2d \quad e \quad o \quad od \quad 2e \\ b & f & j \quad c \quad 3g \quad 2k \quad h \quad o \quad o \quad g \quad 2k \quad 3h \end{array}$$

umgesetzt werden.

Es würde mir lieb sein, wenn Sie mir sagen könnten, ob die Relation [2] schon gegeben worden ist. Verzeihen Sie mir übrigens, dass ich für einen Augenblick solchen Gräuel¹⁾ vorgeführt habe.

Ist die Correspondenz mit der Wiener Akademie einmal eingeleitet, so hoffe ich, werde es mir wenigstens in der nächsten Zeit an Stoff zu interessanten Arbeiten nicht fehlen.

Doch die Zeit verfliegt rasch, und es gilt zu verhüten, dass einem Andere nicht vorkommen. Ich kann Ihnen schliesslich nicht genug danken für die Aufmunterung und die wohlwollende Sorge für mein Auskommen, womit Sie als ein Mann, der für die Förderung der Wissenschaft so kräftig gewirkt hat, mich beehrt haben, und erkläre mich Ihnen zu steter treuer Freundschaft für verpflichtet.

In der Erwartung, dass Sie diese Zeilen in bestem Wohlsein empfangen werden, grüsst Sie von ganzem Herzen.

Bern, den 4. Dez. 1850.

Länggasse No. 214.

Ihr Freund und Verehrer,

Ludwig Schläfli, Docent.

Steiner an Schläfli.

«Mein lieber Freund!

«Gewiss freue ich mich mit Ihnen, wenn Sie wirklich was Stichtaltes gemacht haben. In meinem trägen Zustande bin ich indess unfähig, die Sache gehörig zu beurtheilen. Ich glaube jedoch fest, dass

¹⁾ Die analytischen Auseinandersetzungen bezeichnete Steiner vorzugsweise mit «Greuel».

«etwas dran sein wird. Aronhold, mit dem allein ich näher verkehre,
«durfte ich Ihre Resultate nicht mittheilen, weil er sich selbst mit
«der Elimination beschäftigt hat und stets auf Determinanten herum-
«reitet. Er würde Ihre Sachen rasch verstehen, aber auch eben so
«flux für sich benutzen, sie zu den seinigen machen, wie es vielfach
«mit meinen Resultaten über algebraische Curven, etc., geschehen ist.
«So habe ich auch jene Curve 3. Klasse, K^3 , welche die Wendungs-
«tangente der C^3 berührt, schon 1847 u. 48 betrachtet u. ihm Vieles
«darüber mitgetheilt; trotzdem werde ich überall sorgfältig ignorirt¹⁾).

«Unsere Verabredung scheinen Sie ganz vergessen zu haben.
«Sie sollten sich ja an die Gesandtschaft wenden. Honorar hat man
«nicht zu fordern, sondern es bekommt jeder, dessen Arbeit aufge-
«nommen wird, und zwar alle gleich viel, nämlich 40 fl. Münze für
«den Druckbogen (1 fl. Mz = 3 Zwanziger = 18 Batzen; in Bank-
«scheinen jetzt viel schlechter, aber hoffentlich werden Ausländer in
«Silber bezahlt). Ich will Ihnen meine Ansicht auf's Neue kund thun
«und Ihnen etwa wie folgt rathen :

«Sie sagen im Begleitschreiben: Sie hätten mir, als ich diesen
«Herbst auf einer Reise über Wien, Sie in Bern besuchte, einige
«Ihrer Resultate mitgetheilt und mir dieselben für das Crelle'sche
«Journal nach Berlin mitgeben wollen, worauf ich erwiedert: «ich
«hielte dieselben für würdig, in die Schriften der K. K. Akademie zu
«Wien aufgenommen zu werden, was für Sie, ausser der Ehre, noch
«den Vortheil eines sehr anständigen Honorars gewähren würde.»
«Durch dieses günstige Urtheil ermuthigt beehren Sie sich nun einer
«Hochpreisslichen K. K. Akademie Ihre Arbeit ergebenst zu über-
«reichen. Im Falle dieselbe zur Aufnahme nicht geeignet erachtet
«würde, so erbitten Sie sich das Manuscript zu anderer Verwendung
«zurück²⁾. Sie können auch bemerken, dass bereits kleinere Aufsätze
«von Ihnen im Crelle'schen Journal (?) so wie in den Berichten der
«naturf. Gesellschaft in Bern gedruckt sind. Im Begleitschreiben geben
«Sie auch eine gedrängte Uebersicht vom Inhalte Ihrer Arbeit, in
«der Weise, wie Sie es in meinem Briefe gethan haben, citiren Sie
«die andern Helden (*Jacobi, Cayley, Hesse,...*) und lassen Ihre That
«darüber stehen, wie es sich in der Abhandlung selbst herausstellt.
«Denn solcher Brief liest sich leichter und wird lieber gelesen, als
«der Gräuel in 16 Bogen, und die Herrn sehen sogleich, woran sie

¹⁾ Vergl. die Note S. 74.

²⁾ Von hier an existirt ein Concept.

«sind. — Wollen Sie (als Cima bue¹) an Ihren Burgdorfer (Secunda) «*Boué* adressiren, so habe ich nichts dagegen; sonst brauchen Sie «nur «an die Kaiserlich-Königliche Hochpreissliche Akademie der «Wissenschaften in Wien» zu adressiren, auch selbst in dem Falle, «wenn Sie sich in einem einliegenden Briefe an Boué wenden. Spedirt «die Gesandtschaft Ihr Paquet nicht, so können Sie dasselbe unfrankirt «an die Akademie schicken; (es wird nicht nöthig sein, darauf zu «schreiben: «Wissenschaftliche Abhandlungen» oder «zum Druck be- «stimmt», ich glaube nicht, fragen Sie auch darüber die Gesandtschaft).

«Mag auch die Freiheit in Oestreich einen starken Stoss er- «halten, so wird doch die Akademie bleiben, da sie ja vor 1848 ge- «gründet worden; der Patrizier Studer ist kein Politiker. Also frisch «gewagt, aber doch nicht übereilt, ich hoffe und wünsche, dass es «gehe. Amen.

«Leider bin ich nicht der Mann, der sagen kann, ob Ihre «Gleichung neu ist. Wenn Sie übrigens Crelle's (u. Liouvilles) Journal «ganz gefressen haben, so wird keine Gefahr sein. Wohl schreiben «Cayley und ein anderer Engländer noch in englischen Journalen «(Transaktionen, etc.), aber was sie publicirt haben, kann ich Ihnen «auch nicht verrathen. — In den «Monats-Berichten» der Berl. Akad. «August-Heft 1848 finden sich einige Andeutungen über mein Treiben «in Rücksicht auf algeb. Curven, was Sie später auch einmal ansehen «können. Hr. *Aronhold*, dem die einzelnen Sätze schon zuvor mitge- «theilt worden, hat seine Rechnungen daran vervollkommnet und er- «weitert u. ergänzt.

«Von jener Aufgabe, die Sie vor 2 Jahren lösen sollten, die «Zahl x der Punkte zu bestimmen, damit sie sich zu 3 Ecken, 4 «Ecken, etc. verbinden lassen, hat jetzt H. *Eisenstein*²) den ersten «Fall, bloss die 3 Ecken betreffend, gelöst. Er zieht daraus schon Schlüsse «für die Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

¹) Titel, mit dem Steiner Schläfli oft, wenn er in guter Laune war, regalarite.

²) Gotthold Eisenstein, geb. 16. IV. 1823 zu Berlin, wurde als Student im 3. Semester von der philosophischen Fakultät der Breslauer Hochschule zum Doctor phil. honoris causa promovirt und zwar wegen seiner ausgezeichneten mathematischen Arbeiten, Mitglied der K. Akademie zu Berlin, starb leider 29-jährig am 11. X. 1852. Vergleiche die Arbeit von Prof. Dr. *F. Rudio* «Eine Autobiographie von Gotth. Eisenstein» und «Briefe von G. Eisenstein an M. A. Stern» herausgegeben von *A. Hurwitz* und *F. Rudio*. Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. VII, S. 145 u. ff.

«Sollte Ihre Sache in Wien nicht sogleich gehen, so sinken Sie
«nicht sofort zusammen, sondern thun es mir zu wissen, damit wir
«dem Schicksal Trotz bieten.

«Und der *Blösch* !¹⁾ hat der noch nichts gethan? Gehn Sie doch
«selbst einmal zu ihm und erinnern Sie ihn mit einem Gruss von
«mir, sind Sie nicht blöde, er stösst ja nicht. Sie können ihm so
«nebenher auch erzählen, ich hätte Sie getrieben einige Arbeiten der
«Wiener Akad. zu überreichen, deren Schriften auch Fremden geöffnet
«(die der Berliner nicht); aber von Honorar brauchen Sie nicht zu
«sprechen.

«Hier ist die Witterung bis jetzt mild, immer noch 1°—3°
«Wärme, dagegen die Politik ist erschrecklich tief unter Null.

«Vorwärts für Freiheit und Wissenschaft! es wird schon gehen.

«Berlin, 15. Decemb. 1850.

«Ihr Freund,

«*J. Steiner.*»

1851. Schläfli an Steiner.

Mein lieber Freund!

Ich kann nicht anders, als Ihnen die freudige Nachricht mitteilen, die ich am 31. Jan. von Wien erhalten habe, dass nämlich auf den günstigen Bericht der Beurteilungskommission hin die mathematisch-naturwissenschaftliche Classe beschlossen habe, meine Abhandlung in ihre Denkschriften aufzunehmen und dass das festgesetzte Honorar für den Druckbogen 40 fl. Conk. Münze betrage. Der Brief ist vom 18. Januar datirt, und meine Einsendung ist am 7. Jan. in Wien eingetroffen. Sie sehen hieraus, wie schnell die Beurtheilung erfolgt ist. Es wird mir dann ferner mitgetheilt, dass meine Arbeit nicht vor drei Monaten zum Drucke gelangen könne, weil die chronologische Ordnung beobachtet werden müsse, und ich werde daher angefragt, ob ich unter dieser Bedingung mein Manuscript der Akademie überlassen wolle.

Die diese Frage wie natürlich bejahende Antwort habe ich nun vorgestern zugleich mit einer Fortsetzung der Abhandlung über die Classengleichung der Curve dritten Grades abgeschickt. Ich fand nämlich seither, dass die Polynome $F[p, q, r]$ und $\Psi[p, q, r]$ resp. vom 6. und 4. Grade, welche gleich Null gesetzt die ursprüngliche

¹⁾ Regierungspräsident, damals Leiter des bern. Erziehungsdepartements. Vergl. auch die bezügliche spätere Bemerkung.