1852

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1896)**

Heft 1399-1435

1852. Schläfli an Steiner.

Mein lieber Lehrer und Freund!

Ihr letzter Brief vom 31. Juli 1851 hat mich herzlich gefreut; nur muss ich jetzt zu meiner Beschämung gestehen, dass ich an den darin angeregten schweren und schönen Sachen bis jetzt noch nicht gearbeitet habe, dass ich aber nun bald Fleiss darauf verwenden werde, darf ich jetzt um so mehr versprechen, weil ich unlängst (November) einen der für mich seltenen glücklichen Augenblicke im Studium der Mathematik erlebt habe. Entschuldigen Sie es mit meiner armseligen Lage, dem fast gänzlichen Mangel an geselligem Verkehr und der daraus hervorgehenden gedrückten Stimmung, dass ich fast den ganzen Sommer der morphologischen Botanik widmete. Wenn ich nur wüsste, die reine Mathematik mit objektiver Wirklichkeit zu verbinden! Es war früher mein Wunsch, mathematische Physik zu studiren; aber wenn man nicht die Mittel hat, um eigene Versuche (zu machen), so ist da kaum etwas zu leisten.

Nachdem ich meine Theorie der Elimination der Wiener Akademie übergeben hatte, war mein nächster Vorsatz, die Theorie der vielfachen Continuität so auszuarbeiten, dass sie mit Recht in den Wiener-Denkschriften erscheinen durfte. Nun war ich aber an der Verallgemeinerung der Theorie der orthogonalen Flächen stecken geblieben, immer glaubend, es müsse hier ein grosses Wunder verborgen sein, ohne jedoch dazu durchdringen zu können. Für drei Dimensionen nämlich giebt es eine einzige Bedingung, welcher die eine erste Flächenschaar darstellende Funktion der Coordinaten [f [x y z] = const.] genügen muss, damit diese Flächenschaar mit noch zweien andern Schaaren ein orthogonales System bilden können, wo in jedem Punkte des Raumes alle drei durchgehenden Flächen sich rechtwinklig durchschneiden; und diese einzige Bedingungsgleichung hat die merkwürdige Eigenschaft, dass sie in Beziehung auf die partiellen Differentialcoefficienten dritter Ordnung [es sind die höchsten] jener Funktion f *linear* ist. Ich vermuthete nun lange, diese Eigenschaft gelte auch für n Dimensionen überhaupt; und die $\frac{[n-1][n-2]}{2}$ wesentlichen Bedingungsgleichungen, denen eine einzige Funktion genügen muss, müssten auch in Beziehung auf die höchsten Differentialcoefficienten linear erscheinen. Erst nachdem ich von einem Herbstferienaufenthalt in Lausanne nach Bern zurückgekehrt war, gelang es mir, die Sache für drei Dimensionen so durchsichtig zu machen, dass ich nun begriff, warum hier jene Bedingungsgleichung linear wird, und dass diese Eigenschaft für mehr Dimensionen höchst wahrscheinlich nicht mehr besteht. Wie einmal dieser schwer auf meinem Herzen liegende Alp weggewälzt war, so wendete ich mich andern Partien der Continuitätstheorie zu und fand überraschende Sätze. Einen davon treibt es mich, Ihnen hier mitzutheilen, und es wird mich freuen, Ihr Urtheil darüber zu vernehmen.

Wenn das n-fache Integral

$$\int^n dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = S \text{ durch Bedingungen}$$

$$x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + \ldots + x_n^{\,2} < 1 \quad p_1 > o \quad p_2 > o \ldots, p_n > o$$

begränzt wird, wo p_1, p_2, ... p_n unter sich unabhängige lineare und homogene Polynome bezeichnen, so kann seine Berechnung für ein gerades n auf $\frac{n-2}{2}$ und für ein ungerades auf $\frac{n-3}{2}$ Integrationen zurückgeführt werden[1].

Um den Satz näher auszusprechen, muss ich mich einer der geometrischen ähnlichen Sprache bedienen. Die Gesammtheit aller Lösungen der Ungleichheit

$$x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + \ldots + x_n^{\,2} < a^2$$

nenne ich eine Polysphäre, a ihren Radius; diese Polysphäre ist also ein geschlossenes Stück des totalen n-fachen Continuums. Die Gesammtheit aller Lösungen einer linearen Gleichung nenne ich lineares [n—1] faches Continuum. Das Integral S ist ein Stück der Polysphäre, begränzt von n-linearen Continuen, die durchs Centrum gelegt sind, — *eine polysphärische Pyramide,* welche das Centrum zur Spitze hat, und deren Basis das entsprechende Stück des polysphärischen [n—1] fachen Gränzcontinuums ist. [Diese Pyramide ist gleich $\frac{1}{n}$ Radius $\times$ Basis.] Hat man die linearen Polynome p_1, p_2, ... so eingerichtet, dass in jedem die Summe der Quadrate der Coefficienten der Variabeln gleich 1 ist, so nenne ich die negative Summe der Produkte der gleichnamigen Coefficienten in zwei Polynomen p_1, p_2 den Cosinus des *Winkels* zwischen den entsprechenden linearen Continuen. Da nun die Funktion S oder der Inhalt der polysphärischen Pyramide nur von

[1]) Siehe die Bemerkung am Schluss dieses Briefes, welche die vorliegende Darstellung noch näher beleuchtet.

den $\frac{n\,[n-1]}{2}$ Winkeln zwischen je zweien linearen Continuen abhängt, so nenne ich ferner diese Winkel die *Argumente* von S. Der auf das Argument $\measuredangle\ [p_1\ p_2] = [12]$ bezügliche z. B. ist der n^{te} Theil der $[n-2]$ sphärischen Pyramide, welche durch den Durchschnitt der linearen Continuen $p_1 = 0$ und $p_2 = 0$ gebildet wird, also eine mit S ganz ähnliche Funktion von $\frac{[n-2]\,[n-3]}{2}$ Argumenten, welche aus den ursprünglichen Argumenten durch die bekannten Relationen der sphärischen Trigonometrie gefunden werden. Denkt man sich z. B. die ursprünglichen Argumente [23], [13], [12] als Winkel eines gewöhnlichen Kugeldreiecks und bezeichnet die entsprechenden Seiten mit $[\overline{1},\ 23]$ $[\overline{2},\ 13]$ $[\overline{3},\ 12]$, fasst dann wiederum z. B. $[\overline{1},\ 34]$ $[\overline{1},\ 24]$ $[\overline{1},\ 34]$ als Winkel und $[\overline{12},\ 34]$, $[13,\ 24]$ $[14,\ 23]$ als entsprechende Seiten eines neuen Kugeldreiecks auf, so ist $[\overline{12},\ 34]$ z. B. das Argument $\measuredangle\ (p_3\ p_4)$ der $(n-2) =$ sphärischen Pyramide, deren n^{ter} Theil dem auf das ursprüngliche Argument (12) bezüglichen Differentialcoefficienten von S gleich war.

Für $n = 2$ ist S ein Kreisausschnitt vom Radius 1, sein Argument ist der Mittelpunktswinkel α und $\frac{dS}{d\alpha}$ die Hälfte des Inhalts des nullfachen Continuums, welches die zwei Radien gemein haben, oder des Centrums. Da nun die analytische Consequenz es erfordert, dass als Inhalt eines Punktes immer die Einheit angenommen werde, so ist $\frac{dS}{d\alpha} = \frac{1}{2}$, $S = \frac{1}{2}\,\alpha$ und die Basis des Ausschnitts, der Kreisbogen $= \alpha$.

Für $n = 3$ ist S eine Kugelpyramide, ihre Argumente α, β, γ sind die Winkel zwischen den begränzenden Ebenen oder die Winkel des Kugeldreiecks [der Basis]; die drei Differentialcoefficienten sind $\frac{1}{3}$ der bezüglichen Kanten oder Radien, welche je zweien Ebenen gemein sind; also $dS = \frac{1}{3}\,[d\alpha + d\beta + d\gamma]$, und wenn man die Integrationskonstante richtig bestimmt, $S = \frac{1}{3}\,[\alpha + \beta + \gamma - \pi]$, die Basis oder das Kugeldreieck also $= \alpha + \beta + \gamma - \pi$.

Da ich die den regulären Polyedern entsprechende Untersuchung für n-Dimensionen durchgeführt habe — für $n = 4$ giebt es nämlich 6 einfache reguläre Polyscheme und 2 überschlagene, die ich durch folgende leicht verständliche Charaktere kurz bezeichnen kann (3, 3, 3) (3, 3, 4), (3, 3, 5), (3, 4, 3), (4, 3, 3), (5, 3, 3) resp. umschlossen von 5, 16, 600 Tetraedern, 24 Oktaedern, 8 Hexaedern, 120 Dodekaedern; endlich noch $(3, 3, \frac{5}{2})$ von 600 Tetraedern, $(\frac{5}{2}, 3, 3)$ von 120 überschlagenen Dodekaedern umschlossen, beide mit 191 mal umgeschlungener Begränzung; für $n \geqq 5$ immer nur drei, welche dem Tetraeder, Oktaeder und Hexaeder entsprechen, und bei denen die Begränzung resp. aus $n + 1$, 2^n, $2n$ Stücken besteht — so kenne ich auch alle möglichen symmetrischen Theilungen der Tetrasphäre, Pentasphäre etc. und gelange dadurch zu merkwürdigen bestimmten Integralformeln, unter denen mich diese zwei

$$\int_{\sin x = \sqrt{\frac{1}{3}}}^{x = \frac{\pi}{5}} \arccos \frac{\sin x}{\sqrt{4 \sin^2 x - 1}} \, . \, dx = \frac{\pi^2}{3600};$$

$$\int^{x = \frac{2\pi}{5}} \arccos \frac{\sin x}{\sqrt{4 \sin^2 x - 1}} \, dx = \frac{191\, \pi^2}{3600}$$

die meiste Arbeit gekostet. [1])

Der Beweis jenes allgemeinen Satzes ist sehr einfach. Er beruht auf einem Hülfssatz, der auf $n = 3$ beschränkt so lautet:

«In einem Kugeldreieck ist eine Seite als *Basis* angenommen und darauf aus dem entsprechenden Eck ein grösster Kreisbogen senkrecht gezogen, welcher *Höhe* heissen soll. Wird nun jedes Element des Kugeldreiecks mit dem Cosinus seines sphärischen Abstandes von der Spitze multiplizirt, so erhält man als Summe aller solchen Produkte das halbe Produkt der Basis und des Sinus der Höhe.»

Es hat mich sehr befremdet, dass ich bis jetzt noch gar keine Nachricht aus Wien erhalten habe.

---

[1]) **In einem Concept führt Schläfli noch folgende Formeln an:**

$$\int^{x = \frac{\pi}{4}} \arccos \frac{\sin x}{\sqrt{4 \sin^2 x - 1}} \, dx = \frac{\pi^2}{96}, \qquad \int^{x = \frac{\pi}{3}} = \frac{\pi^2}{30},$$

$$\int^{x = \frac{\pi}{2}} \arccos \frac{\sin x}{\sqrt{4 \sin^2 x - 1}} \, dx = \frac{\pi^2}{12}.$$

Gegen das Ende Dezember habe ich dorthin geschrieben,[1] um Auskunft über das Schicksal meiner eingesandten Arbeit bittend und die Vermuthung aussprechend, dass mein letzter Brief, worin ich meine Einwilligung zu den gestellten Bedingungen ausspreche, nicht an den Ort seiner Bestimmung gelangt sein möchte; zugleich habe ich um Aufnahme einer neuen Arbeit über die Theorie der vielfachen Continuität angefragt, indem ich Bedeutung und Wichtigkeit einer solchen Theorie durch Andeutung einiger Resultate und des Umfangs der Untersuchungen, über welche sie sich erstreckt, hervorzuheben suchte. Den schönen Satz, denn ich Ihnen hier mittheile und den Sie einstweilen für sich behalten mögen, habe ich nicht eröffnet, sondern nur davon gesprochen, wohl aber die bestimmten Integrale, welche daraus herfliessen, hingestellt. Es nimmt mich nun Wunder, ob das Stillschweigen brechen wird.

$$\int_{\sin x = \sqrt{\frac{2}{3}}}^{x = \frac{\pi}{3}} \arccos\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}\sin x}{\sqrt{2\sin^2 x - 1}}\right) dx = \frac{\pi^2}{288};$$

$$\int_{\cos x = \frac{1}{4}}^{x = \frac{\pi}{2}} \arccos\left(\frac{\cos x}{1 - 2\cos x} - \frac{\pi}{3}\right) dx = \frac{\pi^2}{120}$$

$$\int_{\cos x = \frac{1}{3}}^{x = \frac{\pi}{2}} \arccos\left(\frac{\cos x}{1 - 2\cos x}\right) \cdot \arccos\left(\frac{\cos x}{1 + 2\cos x}\right) \cdot dx = \frac{7\pi^3}{360}$$

$$\int_{\cos x = \frac{1}{4}}^{x = \frac{\pi}{2}} \arccos\left(\frac{\cos x}{1 + 2\cos x}\right) \cdot \left(\arccos\frac{\cos x}{1 - 2\cos x} - \frac{\pi}{3}\right) dx = \frac{\pi^3}{252}$$

$$\int_{\cos x = \frac{1}{4}}^{x = \frac{\pi}{2}} \arccos\frac{1}{1 + 2\cos x} \cdot \left(\arccos\frac{\cos x}{1 - 2\cos x} - \frac{\pi}{3}\right) \cdot dx = \frac{\pi^3}{720}.$$

[1]) Siehe den nachfolgenden Brief.

Wenn man meine Continuitätstheorie in Wien nicht annimmt, so möchte ich sie als Privatschrift publiciren, und da Sie mir schon so viel Wohlwollen und Freundschaft bewiesen haben, so möchte ich Sie vorläufig anfragen, ob Sie mir etwa in Berlin einen Verleger wüssten, von dem ich ein Honorar bekäme.

Grüssen Sie mir *Dirichlet, Borchard, Crelle, Aronhold.* Ueber den jungen *Henzi* kann ich Ihnen nichts Weiteres sagen, als dass ich ihn bisweilen in den Versammlungen der naturf. Gesellschaft sehe, und dass mir seine ganze Erscheinung wohl gefällt, weil sie geistige Lebendigkeit ausdrückt. Mit *Gerber* habe ich leider so wenig Verkehr als mit *Wolf.*

Wenn Sie mir bald antworten, so wird es mich sehr freuen. Ich hoffe, Ihnen etwa auch bald wieder schreiben zu können.

Ihnen für das angetretene Jahr viel Glück und gute Gesundheit wünschend, grüsst Sie herzlich

Ihr dankbarer Schüler und Freund,

Bern, den 3. Jan. 1852. *L. Schläfli, Docent.*

Bemerkung. In einem unter Schäfli's Papieren gefundenen Conzept zu diesem Briefe findet sich an oben angemerkter Stelle noch folgender Abschnitt eingeschaltet, der dem Briefe fehlt:

«Um die Art, wie dies geschieht näher zu erklären, bedarf ich einer kleinen Vorbereitung. Wenn z. B. $n = 4$ ist, und es kommen nur Werthe der Variabeln w, x, y, z in Betracht, welche die Polynome

$$p = aw + bx + cy + dz, \quad p' = a'w + b'x + c'y + d'z$$

positiv machen, so nenne ich die konstante Grösse

$$-\frac{aa' + bb' + cc' + dd'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2}}$$

den Cosinus des Winkels der beiden Polynome p, p' [cos $\measuredangle$ (pp')], wo die Quadratwurzeln immer positiv zu verstehen sind. Im obigen allgemeinen Falle kommen also $\frac{n\,[n-1]}{2}$ *Winkel* zwischen je zweien der gegebenen Gränzpolynome $p_1, p_2 \ldots p_n$ in Betracht; ich nenne sie die *Argumente* der Funktion S, weil der Werth des durch S bezeichneten n-fachen Integrals in der That nur von diesen Argumenten abhängt.

Nun sind die ersten in Beziehung auf diese unter sich unabhängigen Argumente genommenen Differentialcoefficienten der Funktion S selbst wiederum solche Funktionen, wo die Dimensionszahl n auf n — 2 herunter gesunken ist. Das n-fache des auf $\sphericalangle$ (p_1 p_2) bezüglichen Differentialcoefficienten z. B. wird erhalten, indem man zuerst die alten Variabeln $x_1 \dots . x_n$ durch solche homogene und lineare Funktionen der neuen Variabeln $y_1 \dots y_n$ ersetzt, dass

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + \dots + x_n{}^2 = y_1{}^2 + y_2{}^2 + \dots y_n{}^2$$

und die Polynome p_1, p_2 nur die zwei neuen Variabeln y_1, y_2 enthalten, dann zweitens das [n — 2]-fache Intregal

$$\int^{n-2} dy_3,\ dy_4 \dots dy_n$$

für die Gränzbedingungen

$$y_3{}^2 + y_4{}^2 + \dots + y_n{}^2 < 1 \quad p_3 > 0 \quad p_4 > 0 \dots p_n > 0$$

berechnet, nachdem in diesen Polynomen $y_1 = y_2 = 0$ gesetzt worden ist.

Für n = 2 ist S der Inhalt eines Kreisausschnittes vom Radius 1, $p_1 = 0$ und $p_2 = 0$ sind die Gleichungen der Radien, welche diesen Ausschnitt begränzen, und das einzige Argument der Funktion S ist der Winkel α, den diese zwei Radien einschliessen. Eine Transformation der Variabeln ist nicht nöthig, weil deren nur zwei sind. Der doppelte Differentialcoefficient von S in Beziehung auf S ist der Inhalt des Centrum, in welchem die zwei Radien sich schneiden. Da nun als Inhalt eines Punktes im Gebiete von 0 Dimensionen nur die Einheit gelten kann, so ist $2 \frac{dS}{d\alpha} = 1$, also $S = \frac{1}{2} \alpha$.

Für n = 3 ist S der Inhalt einer Kugelpyramide vom Radius 1, $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$ sind die Gleichungen der diametralen Elemente, welche dieselben begränzen, und die drei Argumente

$$\alpha = \sphericalangle (p_2\ p_3),\ \beta = \sphericalangle (p_1\ p_3)\ \ \gamma = \sphericalangle (p_1\ p_2)$$

sind die Winkel des Kugeldreiecks, der Basis der Pyramide S. Um $3 \frac{dS}{d\alpha}$ zu erhalten, muss man zuerst rechtwinklige Coordinaten so in neue rechtwinklige transformiren, dass p_2, p_3 nur y, z enthalten, d. h. dass die durch diese Polynome dargestellten Ebenen in der Axe der x sich schneiden.

Setzt man dann $y = 0$, $z = 0$, so reduzirt sich die Gränzbedingung $p_1 > 0$ auf $x > 0$ und man hat das Integral $\int dx$ für die Gränze $x^2 < 1$, $x > 0$ zu berechnen, was

$$3 \frac{dS}{d\alpha} = 1, \text{ also } S = \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \text{ giebt.}$$

Concept des Briefes Schläfli's an den Secretär der k. k. Akademie der Wissenschaften in Wien vom Dez. 1851.

«Es ist nun ein Jahr verflossen, seit ich der kaiserl. Akademie «der Wissenschaften eine Abhandlung «über die Resultante eines Systems «mehrerer algebr. Gleichungen» zugeschickt habe. Ich erhielt unterm «18. Jan. 1851 die Zusicherung, dass die Abhandlung in die Denk«schriften würde aufgenommen werden, wenn ich mein Manuscript unter «der Bedingung überlassen wollte, dass es erst nach drei Monaten ge«druckt würde. Hierauf antwortete ich sogleich, dass ich zufrieden sei, «wenn meine Abhandlung so bald unter die Presse komme, und dass ich «sie unter dieser Bedingung überlasse. Da ich nun nach Verfluss eines «Jahres noch gar keine Nachricht über das Schicksal dieser Frucht «meiner Arbeit erhalten habe, so fürchte ich fast, mein letzter Brief «möchte nicht an seine Bestimmung gelangt sein. Ich muss daher «dringend bitten, mir über diese Sache Aufschluss zu geben.

«Ich ergreife diese Gelegenheit, um wegen der Aufnahme einer «neuen Arbeit anzufragen, von der ich glaube, dass sie den Denk«schriften nicht zur Unehre gereichen wird. Sie behandelt einen «Gegenstand, der meines Wissens bis jetzt nur nach einzelnen unter«geordneten Momenten ist berührt worden, dessen Begriff man aber «noch nirgends offen ausgesprochen u. möglichst allzeitig zu entwickeln «gestrebt hat, ich meine die *Theorie der vielfachen Continuität.* Ich «will versuchen, mit einigen Worten dieses neue Feld der Analysis «näher zu bezeichnen. Unstreitig gewährt die geometrische Anschauung «der Analysis, in manchen Fällen, wo nur zwei oder drei Variabeln in «Betracht kommen, wesentliche Dienste, denn sie ist gleichsam eine «schon fertige im Gefühl ruhende Analysis. Wollen wir uns nun ähn«liche Vortheile für analytische Gegenstände, bei denen mehr als drei «Variabeln auftreten, verschaffen, so müssen wir den Begriff eines durch «diese Variabeln dargestellten vielfachen Continuums in ähnlicher Weise «entwickeln, wie es mit dem Begriff des zwei- und dreifachen Conti«nuums in der Geometrie geschieht.

«Wenn man will, kann man schon in Laplace's Mécanique céleste «eine in die Theorie der vielfachen Continuität gehörende Aufgabe behan-«delt finden; nämlich die Theorie der seculären Störungen kömmt, analy-«tisch betrachtet, auf die Aufgabe zurück, im totalen nfachen Conti-«nuum die Hauptaxen eines durch seine allgemeine Gleichung gegebenen «(n—1) fachen Continuums zweiten Grades zu bestimmen. Hieher «gehört es auch, wenn man n fache Integrale so behandelt hat, wie es «dem Uebergang vom Ellipsoid zur Kugel und von rechtwinkligen zu «Polarcoordinaten entspricht; wie denn überhaupt die Verwandlung «vielfacher Integrale eine leichte Consequenz der diesem Gebiete eigen-«thümlichen Betrachtungen ist. Dieses Feld muss aber noch reichlichere «Früchte tragen, wenn man es nicht nur gelegentlich und zufällig, sondern «mit der eigentlichen Absicht bearbeitet, auf rein analytischem Gebiete «etwas der Geometrie Vergleichbares, und worin diese vollkommen «aufgeht, zu leisten. Ich hoffe nun durch das Wenige, was meinen «schwachen Kräften hier gelungen ist, wenn anders die kais. Akad. «es in ihre Denkschriften aufzunehmen geneigt ist, dem mathematischen «Publicum eine günstige Ansicht von der Fruchtbarkeit dieses Zweiges «beizubringen. Damit die hochpreisl. Akad. im Voraus darüber urtheilen «könne, führe ich einige Resultate an.

«Ich unterscheide lineare und höhere Gebilde, je nachdem zu «ihrer Definition lineare Gleichungen hinreichen oder nicht. Hat nun das «totale Continuum n Dimensionen, so nenne ich (n—m) faches lineares «Continuum die Gesammtheit aller Lösungen eines Systems vom m «linearen und unter sich unabhängigen Gleichungen mit n Variabeln. «Sind nun in jenem totalen Continuum zwei partielle lineare Continua, «ein pfaches und ein qfaches beliebig gegeben, so entsteht die Auf-«gabe, ihre gegenseitige Lage auf die kleinste Zahl von Daten zurück-«zuführen. Ich zeige nun, dass wenn $p + q > n$, diese Aufgabe auf «eine andere zurückkömmt, wo die beiden partiellen Continua resp. «nur $n - q$ und $n - p$ Dimensionen zählen, oder, wenn wir wieder «p, q als Dimensionszahlen gebrauchen, auf den Fall, wo $p + q < n$. «[In diesem Falle sind aber, wie ich ferner zeige, aus dem totalen «Continuum $n - (p + q)$ Dimensionen wegzulassen, wodurch die «Aufgabe auf $p + q = n$ zurückgeführt ist.] Ist $p \overline{\overline{<}} q$, so «[kann man im totalen Continuum wieder $q - p$ Dimensionen unter-«drücken, und] kömmt die Aufgabe endlich dahin zurück, dass man die «gegenseitige Lage zweier p-fachen linearen Continua im 2pfachen «totalen Continuum durch das Minimum von Bestimmungsstücken an-

«geben soll. Dieses geschieht durch eine algebraische Gleichung p^{ten} «Grades, deren Wurzeln immer sämmtlich reell sind. Darf man sich «der geom. Sprache bedienen, so sind jetzt in jedem der zwei linearen «Continua p unter sich senkrechte Axen gefunden, und die Wurzeln «jener algebr. Gleichung sind die Cosinus der Winkel, welche jede «Axe des einen Continuums mit der gleichnamigen des andern bildet, «während sie auf allen übrigen dieses letzten Continuums senkrecht steht. «Im wirklichen Raume kann p nur 1 sein, d. h. die gegenseitige Lage «irgend zweier linearen Continua ist immer durch einen einzigen «Winkel bestimmt, wie in der Ebene.

«Wenn im wirklichen Raume eine beliebige Zahl von Ebenen «frei gegeben sind, so kann man nach der Zahl der geschlossenen «und offenen Stücken des Raumes fragen. Ich habe diese Aufgabe für «das nfache Continuum gelöst.

«Ich habe ferner dem *Euler'schen Satze über Polyeder,* dass «nämlich die Zahlen der Ecken sammt der Zahl der Flächen diejenige «der Kanten immer um 2 übertreffe, eine Form gegeben, worin er «auch für n Dimensionen gilt.

«Ich habe die der Frage nach der Existenz regulärer, convexer «Polyeder analoge Frage für alle Dimensionen gelöst. Für 4 Dimen- «sonen existiren nämlich deren 6, für alle folgenden Dimensionen «immer nur drei.

«Zu sphärischen Gebilden übergehend, habe ich nicht nur «das Maass

$$\int^{n} dx_1 \, dx_2 \, . \, . \, . \, dx_n$$

«des von der Gleichung $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = a^2$ umschlossenen «n fachen Continuums und des durch diese Gleichung dargestellten «(n — 1) fachen Continuums bestimmt, was wahrscheinlich unter der «Form eines bestimmten nfachen Integrals bereits geschehen ist, «sondern ich habe die der Kugelpyramide oder, was auf eins hinaus- «kömmt, dem Kugeldreieck analoge Aufgabe allgemein gelöst. Wenn «nämlich $p_1, p_2, \ldots p_n$ homogene lineare Polynome der Variabeln «$x_1, x_2, \ldots x_n$ bezeichnen, und das Integral

$$\int^{n} dx_1, \, dx_2 \, . \, . \, . \, dx_n$$

«durch die Bedingungen

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2 < 1, \quad p_1 > 0, \quad p_2 > 0, \ldots \, p_n > 0$$

«begränzt ist, so habe ich die Zahl der nothwendigen Integrationen auf $\frac{n-2}{2}$ oder $\frac{n-3}{2}$, je nachdem n gerade oder ungerade ist, herunter-«gebracht, wobei Kreisbogen, deren Cosinus bekannt sind, nicht als Integra-«tionen gezählt werden. Wir werden dadurch mit einer neuen Art trans-«cendenter Functionen von $\frac{n(n-1)}{2}$ Argumenten bekannt, welche «durch Integralformeln ausgedrückt sind, in denen lauter Kreisbogen «erscheinen, deren Sinus oder Cosinus gegenseitig in algebraischer «Relation stehen. In einzelnen Fällen können die Werthe dieser «Integrale in finiter Form angegeben werden. Für

$$n = 4 \text{ z. B. sei } \cos y = \frac{\cos\alpha \sin x}{\sqrt{\sin^2 x - \cos^2\beta}}$$

«so ist

$$S = \int_{y=0}^{x=\gamma} y\, dx$$

«eine der besprochenen Funktionen, welche jetzt nur drei explicite Argu-«mente α, β, γ zeigt, indem man jedes den drei übrigen gleich $\frac{\pi}{2}$ gesetzt «hat. Man wird sich leicht überzeugen, dass diese Funktion ihren Werth «nicht ändert, wenn man auch die Argumente α und γ vertauscht. «Sind nun m, n, p, ganze positive Zahlen und setzt man

$$\alpha = \frac{\pi}{m},\ \beta = \frac{\pi}{n},\ \gamma = \frac{\pi}{p},\ S = \frac{\pi^2}{f(m, n, p)},$$

«so habe ich gefunden:

$$f(3, 3, 3) = 30,\ f(3, 3, 4) = 96,\ f(3, 3, 5) = 3600,$$
$$f(3, 4, 3) = 288.$$

«Für ein beliebiges n kann man 6 finite Werthe bestimmter «Intregrale angeben, wovon ich nur eines anführen will. Wenn

$$\cos x_m = \frac{\cos x}{1 - 2m \cos x}$$

«gesetzt wird, so ist

$$\int_{\cos x = \frac{1}{2n-1}}^{x=\frac{\pi}{2}} dx \int dx_1 \int dx_2 \ldots \int dx_{n-1} = \frac{\pi^n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (2n-1) \,.\, 2n}$$

«Ich glaube den erwähnten allgemeinen Satz nicht zu überschätzen, «wenn ich ihn dem Schönsten, was in der Geometrie geleistet worden «ist, an die Seite stelle.

«Wenn ich ferner die allgemeine Gleichung zweiten Grades mit «n Variabeln betrachte, so ergeben sich leicht alle die Eigenschaften «wieder, die aus der Geom. von den Flächen zweiten Grades bekannt «sind; nur in der verallgemeinerten Theorie der confocalen Flächen «glaube ich etwas anführen zu können, das auch für n = 3 neu ist. «Diese Theorie giebt mir dann auch ein Mittel zu einer sehr allge-«meinen Form der Darstellung arbiträrer Funktionen von n Variabeln, «was mit den Laplace'schen Coefficienten Aehnlichkeit hat. — Auch «die Theorie der orthogonalen Flächen überhaupt kann auf n Dimensio-«nen übertragen werden; nur ist für n > 3 die Zahl der Bedingungen «grösser als die Zahl der Funktionen, über die man verfügen kann. «Für n = 3 dagegen hat man nur eine partielle Differentialgleichung «dritter Ordnung und ersten Grades in Beziehung auf die höchsten «Differential-Coefficienten zu erfüllen. — Der Begriff der Krümmung, auf «beliebige Gleichungen mit n Variabeln angewandt, führt auf gleiche Resul-«tate wie in der Geometrie. — Durch Verallgemeinerung des Begriffs des «Potentials habe ich merkwürdige Transformationen vielfacher Integrale «bekommen.

«Diese Andeutungen mögen zeigen, dass jene Arbeit reichhaltig «genug ist, um für sich allein im Buchhandel zu erscheinen; und wenn «die hochpreisl. Akad. für die Ehre in ihren Denkschriften aufgenom-«men zu werden, versagen würde, wäre ich Willens, sie als Privat-«schrift zu veröffentlichen.

«Obschon nun einzelne geometrische Theorien schon längst in diesem «Sinne verallgemeinert worden sind — man denke z. B. an gewisse «allgemeine Transformationen vielfacher Integrale, welche dem Ueber-«gang vom Ellipsoid zur Kugel oder von rechtwinkligen zu Polar-«coordinaten analog sind, an die Theorie der seculären Störungen, «welche in ihren letzten Ergebnissen als verallgemeinerte Aufgabe, die «Hauptaxen einer Fläche zweiten Grades zu bestimmen, erscheint «u. s. w. — so muss dieses Feld doch noch . . .[1])

«Verehrter Herr Secretär, ich bitte Sie noch einmal, mir recht «bald mitzutheilen, was aus meinem vor einem Jahr eingesandten «Manuscripte geworden ist, und ob man meine neue Abhandlung unter «ähnlichen Bedingungen annehmen wird.

«Hochachtungsvoll verharrt «Ihr ergebenster

---

[1]) Hier bricht das Concept ab und es folgt bloss noch der Schlusssatz.

Im Juni 1852 machte Steiner einen Aufenthalt in Bönigen am Brienzersee und in Interlaken.

1852. Schläfli an Steiner.

Lieber Freund!

Ich habe versucht den Grad der Aufgabe zu bestimmen, wenn eine C^3 durch 6 gegebene Punkte gehen, einen Doppelpunkt haben und die zwei Tangenten a, b in diesem Punkte durch zwei gegebene Punkte A, B gehen sollen (a durch A, b durch B). Ich kann nun algebraisch hievon den Fall nicht trennen, wenn beide Punkte A, B auf derselben Tangente a liegen. So aufgefasst führt die Aufgabe auf 6 doppelschichtige Gleichungen, alle homogen und linear in Bezug auf die 3 Variablen der 2ten Schichte (die Coordinaten des Doppelpunkts). Combinirt man je 5 Gleichungen, um die Variablen der ersten Schichte zu eliminiren, so ergeben sich für die 3 Variablen der 2ten Schichte wieder homogene Gleichungen, eine 5ten und fünf 6ten Grades. Da nun 2 Gleichungen zur Bestimmung der Coordinaten des Doppelpunktes hinreichen, so ist diese Aufgabe höchstens vom 30sten Grade. Ob sie noch niedriger ist, kann ich nicht beurtheilen, da ich nicht im Stande bin, den Grad der Resultante mehrerer doppelschichtiger Polynome anzugeben, wenn jedes mehr als 2 Variabeln enthält. — Nun ist die in der vorigen eingeschlossene Aufgabe, durch 6 gegebene Punkte eine C^3 zu legen, welche einen Doppelpunkt hat, dessen eine Tangente a ebenfalls gegeben ist, sicher vom 5ten Grade. Es giebt daher *höchstens* 30 — 5 = 25 C^3, welche Ihrer Forderung genügen.

Vor einer Woche habe ich aus Wien eine Anweisung auf 370 Gulden CM[1]) an die Hauptcasse des Ministeriums des Innern erhalten, wofür ich die Quittung durch den Banquier Marcuard übersandte. Man sagte mir, dieser Gulden sei Papiergeld und wäre eigentlich in neuem Gelde 2 Fr. 50 Cts., habe aber nur den Kurs von etwa 2 Fr.

Wenn ich wüsste, Sie noch sicher anzutreffen, würde ich Ihnen gerne in Bönigen einen Besuch machen. Ich hoffe immerhin, Sie noch in Bern wiederzusehen.

Wenn Sie mir nicht selbst schreiben wollen, können Sie mir ja durch einen andern einige Zeilen über Ihr Befinden und die Dauer Ihres Aufenthaltes zukommen lassen.

Sie freundschaftlich grüssend

Ihr dankbarer und ergebener

Bern, den 14. Juni 1852. *L. Schläfli.*

---

[1]) Conkord.-Münze.

Steiner an Schläfli.

«*Lieber Schläfli!*

«Gott sei Dank, dass die Wiener Sache endlich so weit gekommen «ist! Dass das Honorar in Bankscheinen bezahlt wird, war mir be-«kannt; der gegenwärtige niedrige Curs derselben und der hohe Curs «des französischen Geldes bringen Ihnen viel Verlust, circa 22—23 «Prozent.

«Da ich in meiner Pension in Bönigen allein war, zudem die «Wege schmutzig sind, so bin ich nach Interlaken, in's Hotel d'Inter-«laken gezogen. Es wohnt hier auch ein Berliner Stadtrath, der, wie «Sie, alle Berge abgrast, nebenbei auch Käfer und Steine frisst, aber «nicht Kenner ist, sondern nur für Freunde sammelt. Er steigt rings «herum auf die höchsten Schöpf (Cima); auf die niedrigen begleite «ich ihn zuweilen. Ich habe ihm von Ihnen gesprochen, er freut sich «auf Ihre Bekanntschaft und Ihre Hülfe. Also brechen Sie auf und «kommen Sie auf 8 oder 14 Tage her, das donnstigs Wetter wird fortan «besser werden.

«Grüssen Sie Frau und Herrn Professor Ries, und dann marsch! «hieher zu Ihrem

J. Steiner.»

Interlaken, 20. Juni 1852.

Auf der Rückseite des Steiner'schen Briefes stehen folgende Notizen Schläfli's, die sich auf die Arbeit über die vielfache Continuität [1]) beziehen:

«Es ist bekannt, mit welchem Erfolg in der Statik die Begriffe «des Differentialparameters und Potentials von Gauss, Lamé, Liouville «u. a. eingeführt und angewandt worden sind. Die meisten hier ein-«schlagenden Sätze sind aber durchaus nicht auf den Raum beschränkt, «sondern gelten für jede beliebige Totalität. Dieses nachzuweisen, ist «der Zweck der folgenden §§. Ein Satz oder eine Methode, in «spezieller Fassung vorgetragen, erscheint zwar oft schon in seiner «ganzen Schönheit und Trefflichkeit und gewinnt durch Verallge-«meinerung kaum noch etwas. Ich bin daher weit davon entfernt «von den folgenden §§ mir ein Verdienst beizulegen, allein erstens «glaube ich die Verallgemeinerung jener Begriffe in einer Theorie «der vielfachen Continuität nicht übergehen zu dürfen und zweitens «wird auch das Interesse daran wachsen, wenn gegen das Ende dieses

[1]) Biographie pag. 57, No. 243.

«Abschnittes Schwierigkeiten sich lösen werden, welche die beim «Raum vorkommenden beträchtlich übersteigen.

«Wenn darin auch das meiste bloss als generalisirende Nach-«ahmung der genialen Arbeiten der erwähnten Analysten erscheinen «muss, so wird sich doch am Ende dieses Abschnitts eine sehr allge-«meine Form der Entwicklung arbiträrer Functionen von beliebig «vielen Variablen in Reihen von periodischer Natur finden und über-«dies glaube ich Dinge, die mit der Theorie der vielfachen Continuität «in so engem Zusammenhang stehen, hier nicht übergehen zu sollen.» ——

Schläfli an Steiner.

Mein hochgeschätzter Freund!

Obschon die Lösung der bekannten Aufgabe, die Curven vierten Grades betreffend, noch nicht weit gediehen ist, so erlaube mir doch die Bemerkung, dass dieselbe in einer noch allgemeinern Aufgabe enthalten ist, welche ganz dieselben combinatorischen Beziehungen zwischen ihren Lösungen darbietet. Nämlich, wenn eine Curve $2n^{ten}$ Grades als Basis gegeben ist, wie viele [n—1] fachen Schaaren von Curven $(2n-2)^{ten}$ Grades giebt es, welche jene in $2n(n-1)$ Punkten berühren? Oder, wenn auf der Basis $n-1$ Punkte gegeben sind, wie viele Curven $(2n-2)^{ten}$ Grades berühren jene in den gegebenen Punkten und ausserdem noch in $(2n-1)(n-1)$ Punkten? Aus combinatorischen Gründen folgt, dass die verlangte Zahl eine um 1 verminderte Potenz von 2 sein muss. Um zum Ziele zu gelangen, scheint es mir vor der Hand das Rathsamste, die Bedingungen zu studiren, unter denen die Resultante zum vollständigen Quadrat wird, und bin gesonnen, mit einigen speziellen Fällen anzufangen, wie z. B. wenn ein Kegelschnitt durch 3 gegebene Punkte gehen und einen gegebenen Kegelschnitt zweimal berühren soll, was 4 Lösungen giebt.

Unglücklicher Weise liess ich mich durch das noch am Montag Morgen regnerisch aussehende Wetter abhalten, nach Sitten zu gehen. Wenn Sie die Güte haben wollen, mit einigen Zeilen mir zu antworten, so wird es mich freuen.

Sie freundschaftlich grüssend

Ihr dankbarer Schüler

Bern, den 18. Aug. 1852.

L. Schläfli, Docent.