Interessante Notizen über den Aufenthalt in Vichy, August 1853 sowie Briefe Steiner's an Schläfli.

Im Jahr 1853 musste Steiner zum Kurgebrauch nach Vichy reisen. Er hatte sich vorher bei *Terquem* orientirt, um die Adressen der französischen Mathematiker zu erhalten. Terquem schrieb ihm unter dem 15. Juli 1853:

«*Mon cher géomètre !*

«Voici les adresses:

«Bertrand, rue d'Enfer 13;

«Sturm, place du Panthéon 9;

«Wertheim, cité d'Antin 4;

«Chasles, passage Ste-Marie 3;

«Lamé, rue Madame 48;

«Poncelet, rue Vaugirard, vis-à-vis la porte du Luxembourg.

«Je crois que ce sont les seuls personnes, que vous désirez voir.

«Votre tout affectionné

O. Terquem,
rue d'Enfer 48.»

Anschliessend folgen einige Notizen Steiner's, bei denen zugleich das Datum und der Ort notirt ist, wann er sie niedergeschrieben hat.

Paris. Juli 1853. Notizen.

«1. *Von Silvester.* Ein Engländer (Cayley) soll gefunden haben: «*dass f^3, im Allgemeinen, 27 G. enthält.* Nachzusehen wie viele ich «bei den schwierigen Polar-Betrachtungen gefunden habe. Bei einer «bestimmten $f_1{}^3$ zeigten sich früher nur 6 G; bei der Panpolare F^3 auf «$B(f^2)$ nur 11 G.

«2. *Serret jun. Mittels des Cirkels allein* auf der Zylinderfläche «einen Strahl zu finden?

«Ich frage: Wie findet man auf der Kugel den Hauptkreis, der «durch 2 gegebene p geht? d. h. irgend einen 3ten Punkt desselben. — «Wie zu p dessen Gegenpunkt p_1? — Sind 2p = a, b, so finden sich «leicht 2 Punkte c, d, wo ac = ad, bc = bd und sodann Punkte x, «wo xc = xd, also x im Hauptkreis durch a und b liegt, der die Orts-«linie für c und d ist. D. h. um a, b mit Radien α, β Kreise; ihre Schnitte «= c, d; um diese mit gleichem r Kreise, liegen die je 2 Schnitte «x, x in Hauptkreis ab.

«3. *Silvester* hat gefunden: «*Die f^3 hat 5 Grundebenen, der* «*Schnittpunkt P je 3er und die Schnittlinie L der je 2 übrigen sind* «*der Art conjugirt, dass die B. C. des Kegels aus P aus 2 ebenen* «*Curven C^3 besteht, deren Ebenen durch L gehen, und zu den Grund-* «*ebenen harmonisch sind.*»

«Dieser Satz muss in dem meinigen enthalten sein, wonach der «Ort des Pols P, dessen 1^{te} Polare f^2, in Bezug auf die gegebene f^3 «ein Kegel f^2_k ist, eine bestimmte F^4 ist. Denn die Silvester'schen «10 Punkte P_0 sind diejenigen, für welche f^2_k in $2\,f^1 = 2\,e$ zerfällt. «— In jeder L liegen 3 Punkte P_1 und diesen entsprechen $3\,L_1$, die «durch P gehen (der jener L entspricht).

«Da die 2^{te} Polare f^1 von P ebenfalls durch L geht, so muss von «jedem P in L sowohl die erste als 2^{te} Polare durch P gehen, also «die erste stets ein Kegel sein. Danach hätten also die 10 L eigen-«thümliche Bedeutung; sie lägen in jener Ortsfläche F^4; diese wird «von jeder der 5 Grundebenen E in 4 L geschnitten, welche eine «spezielle C^4 sind.

«Bewegt sich P in 1 freien E, so entspricht ihm eine $SS(f^2)$ mit «8 p (wovon der *eine nothwendig*) und sein Ort in dieser E, wo ihm «f^2_k oder dessen Scheitel Q entspricht, ist eine Curve C^4, welche durch «die 10 Schnitte π von E mit den 10 L geht; der Ort von Q aber «ist (nach Älterem) eine C^6_d, die durch die 10 P_0 geht. Einer 2^{ten} «E_1 entspricht eine andere Curve doppelter Krümmung C^6_{d1}, die mit «C^6_d, ausser den 10 P_0, noch 4 Q gemein hat, entsprechend der Schnitt-«linie G von E und E_1. Also gehen alle C^6_d durch die 10 P_0.

«Vorhin, bei P_1 in L_1 *bilden die Polaren f^2 einen solchen speziellen* «*Büschel $B(f^2) = B(f^2_k)$, dessen gemeins. Schnitt C^4_d aus 4 durch P* «*gehenden Geraden λ besteht;* nämlich die Schnittlinien der 3 Paar «Ebenen $f^2_k = 2\,e$, die durch die Kanten (3 L) der Ecke P gehen «und zu den Flächen derselben harmonisch sind.

Ueber die gegenseitige Beziehung der Doppeltangenten der Curve 4^{ten} Grads.

Für M. *Terquem.* (Paris 1. Aug. 53.)

«1. Ist ein Kegelschnitt A^2 einer Curve 4^{ten} Grads C^4 einge-«schrieben, d. h. berührt er diese in 4 Punkten a, so kann A^2 sich «stetig bewegen und so ändern, dass er stets die Curve C^4 in 4 «Punkten berührt, und zwar liegen die neuen Berührungspunkte $4a_1$, «stets mit den anfänglichen 4a in irgend einem Kegelschnitte C^2, so «dass umgekehrt jeder durch die 4 Punkte a gelegte Kegelschnitt C^2 «die Curve C^4 in 4 solchen Punkten a_1 schneidet, in welchem sie von «einem zweiten Kegelschnitte A_1^2 berührt wird, der durch stetige Be-«wegung und Aenderung in den ersten Kegelschnitt A^2 übergehen «kann. Dabei erscheint die Curve C^4 als Enveloppe der Schaar Kegel-«schnitte A^2, A_1^2, . . . , die wir durch S (A^2) bezeichnen wollen.

«*Eine beliebige Curve 4ten Grads, C^4, ist im Allgemeinen, als «Enveloppe von 63 verschiedenen Schaaren Kegelschnitte, S(A^2), an-«zusehen.*» Oder: «*Soll die gegebene Curve C^4 in einem auf ihr ge-«gebenen Punkte a_0 und nebstdem in irgend drei andern Punkten a «von irgend einem Kegelschnitte berührt werden, so giebt es 63 Lös-«ungen.*»

Besser: «*Soll ein Kegelschnitt A^2 gefunden werden, welcher die «gegebene Curve C^4 in einem auf ihr gegebenen Punkte a_0 und nebst-«dem in noch irgend drei andern Punkten a berührt, so finden 63 «Lösungen statt.*»

Vichy, Freit. 12. Aug. 1853.
(Ankunft in Vichy 5. August wahrscheinlich.)

«1. H. *Schläfli hat den Satz über die conjug. Durchmesser der «C^3 zu kontrolliren.*

«2. H. *Terquem* die geeigneten Sätze in der von Dr. Hirst über-«setzten 2 Abhandl. zuzustellen. Auch andere, im Crelle'schen Journ. «gegebene Sätze, damit zu verbinden. Auch neue Sätze beizufügen.

«3. *Schläfli.* Die Lamé'sche Untersuchung der Wellenfläche, in «Rücksicht eines Systems mit ihr concentrischer Kugeln und Ellipsoide «(mit proportionalen Axen) — zu erzählen und darauf zu hetzen. «Desgleichen auf die Sätze von *Sylvester* und *Cayley* über f^3: dass «diese 27 Gerade und 5 Grundebenen enthält.[1])

«4. *Liouville* oder *Terquem* die Sätze und Aufgaben über höhere «Berührung der Curven, welche schon im vorigen Jahre in Bern «Schläfli mitgetheilt worden, und wozu die 63 Schaaren S(C^2) in C^4 «ein schönes Beispiel sind.

«Desgl. die Bestimmung der Curven im Raum (Doppel-Krüm-«mung), als Schnitte von Flächen, wobei von diesen ein Theil des Schnitts «gegeben ist. Cayley hat schon drein gepfuscht; zu citiren.»

«*Was im Winter 1853/4 auszuarbeiten ist.* (Paris 3. August 1853.)

«I. *Im Grossen*: *Entweder:* 1) die Abhandlung von 1848; oder «2) die populären Kegelschnitte: oder 3) 2ter Theil der Gestalten.

---

[1]) Hier bemerkt Steiner: «Gethan».

«II. *Im Kleinen, für Liouville:* 1) Gauss-Jacobischen Satz, Rück-«sicht auf Schumachers Astronomische Nachrichten. Ueber die Evolut-«Fläche, die Monge'schen Sätze, die 1837 gemacht (und vielleicht durch das «Stadtvogtei-Mensch zerstört worden sind); sie entstanden, weil Nudel «mich täuschte. 2) Den Satz wie zu zwei gegebenen C^2 die Basis zu «finden ist; was schon im Dez. 1845, vor Ausbruch der Nudelei ge-«macht worden und 1846 in der Akademie bereits angeführt. 3) Der «2 bis n Sprung bei A_1 auf A, und B_1 auf B; und der famöse 3 Sprung «bei E_1 auf E. 4) Aufwärmen der Polyeder-Sätze, um *Brin* und *August* «zu eliminiren. 5) Die statischen Sätze (Joggeli Schweins), ...; Vir-«tuelle Geschwindigkeit. — Ferner: 6) Das Trippel-Strahlsystem, wenn «der Scheitel in f^2 (Römer-Notizen); 7) Die Polarität auf f^2 und auf «$B(f^2)$. Bei (6.) das System Trippel-Netze von $B(f^2)$, und B B (f^2).

«III. Avec M. P o l q u é s eine Géométrie déscriptive».

Vichy, Sonntag 21. Aug. 53.

«*Betrachtung der f^3* [1]*; 1. Die 2^te^ Polare einer E ist eine φ^3(Fläche);* «denn sie wird von jeder G in 3 Punkten geschnitten, weil für P in «G ein Büschel $B(f^2)$ entsteht, wovon nur 3 die E berühren. Also «ist auch die Enveloppe aller Durchmesser-Ebenen der gegebenen f^3 «eine φo^3. Ist sie auch der Asymptotenfläche der f^3 eingeschrieben, «und wo berührt sie dieselbe? Ist auch φo^3 der Ort aller P_o, deren «innere Polaren $f_i{}^2$ oder $J_f{}^2$ Zylinder sind? Es scheint. — Wenn für «P in f^3 auch $J_f{}^2 = K^2$ (Kegel) wird: so muss die Schnittcurve $C_\varphi{}^9$ «von f^3 und φo^3 ausgezeichnete $P_o = Q_\varphi$ enthalten; deren $J_f{}^2$ sich auf «ein Gerade ab $= S_1$, 2 E in ab ihr Schnitt reduciren. Giebt es P, «für welche $J_f{}^2$ aus E $\#$ E [2]) besteht? Die Sylvesterschen 10 P_o.

«2. Der aus jedem P an f^3 gehende Kegel ist 6^{ten} Grads, aber «wievielter 12^{ter} Klasse? d. h. wieviele Berührungs-Ebenen der f^3 «gehen durch eine G? 12.

«3. Die φo^3 ist 4^{ter} Klasse, durch jede G gehen vier Berührungs-«Ebenen; denn die Polaren $B(f^2)$ von P in G haben eine $C_d{}^4$, welche «E in 4p trifft, deren 2^{te} Polaren jene 4 Berührungs-Ebenen sind.

---

[1]) Steiner würde wohl sehr unzufrieden sein, wenn er wüsste, dass diese seine Notiz über die f^3 gedruckt wird. Es geht daraus nämlich unzweifelhaft hervor, dass er die Hauptresultate von Cayley und Sylvester kannte, die er doch in seiner Arbeit vom Jahr 1854 nicht citirt. Herr Geiser fügt dieser Bemerkung noch bei, dass ihm dieses eigenthümliche Verschweigen schon längst bekannt gewesen sei.

[2]) Sollte vielleicht E + E geschrieben sein, da diese Steiner'sche Bezeichnung ein Ebenenpaar bedeutet.

«4. So ist die Enveloppe φ_0 der Durchmesser-Ebenen der f^4 «vom 12^{ten} Grad und von der 9^{ten} Klasse. — Von f^n ist $\varphi_0 = 3(n-2)^2{}_{ten}$ «Grad und $(n-1)^2{}_{ter}$ Klasse. — —»

Steiner reiste dann über Genf nach Bern (siehe nachfolgenden Brief) und hat daselbst die Notizen fortgesetzt.

Bern, 11. Sept. (Fortsetzung von Vichy.)

«5. *Schläfli.* 1) Ob bei f^3 (u. f^n) auch $A_f{}^2$ und $J_f{}^2$ jedes Punktes «P die E_∞ in derselben Curve $C^2{}_\infty$ schneiden? *Ja! Ja!* 2) *Von «wievielter Klasse ist* f^3*? oder ihr Berührungs-Kegel* $P_k{}^6$*, in Rück«sicht jeder durch den Pol P gehenden Geraden?* 12^{ten} Ist 1) ja: so «ist für P in $\varphi_0{}^3$ richtig $J_f{}^2$ ein Zylinder. *Ja.*

«6. Auch bei f^n haben $A_f{}^{n-1}$ und $J_f{}^{n-1}$ mit E_∞ die Schnittcurve «gemein. Denn für jede Ebene durch P haben ihre 3 Schnitte C^n, «A^{n-1} und J^{n-1} mit jenen 3 Flächen die Eigenschaft, dass A^{n-1} und J^{n-1} «mit G_∞ die Schnitte gemein haben, daher auch die Flächen $A_f{}^{n-1}$ und «$J_f{}^{n-1}$. Bei f^3 schneiden sich also $A_f{}^2$ und $J_f{}^2$ in einer andern ebenen «Curve R^2 $(= C^2)$, die in der Vertreterin R_c liegt (in der die 3^{ten} «Schnitte c aller durch P gehenden Sehnen ab liegen.)

«*Zu 5. Die* f^n *und ihr Berührungs-Kegel* $K^{n(n-1)}$ *sind von der «$n(n-1)^2{}_{ten}$ Klasse.* Weil die Polaren A^{n-1} und A_1^{n-1} von P und P_1 sich «mit f^n in $(n-1)^2 . n$ Punkten schneiden, in denen f^n von solchen «Ebenen berührt wird, die durch die Gerade PP_1 gehen. Die Klasse «von $K^{n(n-1)}$ könnte sein: $= n(n-1)\,[n(n-1)-1]$, so ist sie um «$n(n-1)\,[n(n-1)-1-(n-1)] = n^2(n-1)(n-2)$ verringert, was «anzeigt, dass der Kegel Doppel- und Rückkehrstrahlen, ds und rs, hat, «die wohl eigenthümliche Tangenten aus P an f^n sind. Bei f^3 ist die «Verringerung $= 9 \cdot 2 \cdot 1 = 18$, und daher kann es geben 1.) 9 ds; «2.) 6 ds und 2 rs; 3.) 3 ds und 4 rs; oder 4.) 6 rs. Die Sylvester«schen 10 P_0 zeigen die Wirklichkeit der ds, wenn auch nur 3 reelle; «giebt es noch 4 rs, oder noch imaginäre 6 ds? [1])

1853. Steiner an Schläfli.

«*Lieber Schläfli!*

«Morgen Abend gegen 5 Uhr werde ich mit der Freiburger «Post in Bern eintreffen; gehen Sie also nicht grasen,[2]) sondern

[1]) Herr Geiser bemerkt, dass nicht die 9^{ds}, sondern die 6^{rs} eintreten.

[2]) Botanisiren.

«kommen Sie und fragen Sie unterwegs im Adler[1]) (wo ein neuer «Wirth sein soll) ob ein ordentliches Zimmer zu haben sei. In Genf «musste ich die erste Nacht auf dem Boden liegen. — Ich komme «diesmal von Paris, Vichy (Cur gemacht), Genf, Lausanne, Vivis. Das «Nähere morgen mündlich.

«In Eile. Ihr

J. Steiner.»

Freitag 2. Sept. 53.

Steiner blieb dann mit Schläfli in Bern zusammen und besuchte auch seine Verwandten in Utzenstorf, Bätterkinden und Kirchberg.

Steiner an Schläfli.

Baden, Samstag 15. Octob. 1853.

Lieber Freund!

«Wie Sie am Sonntag, reiste ich erst am Mittwoch von «Bätterkinden ab. Auch hier hat sich meine Cur in die Länge ge-«zogen. In Aarau traf ich mit Ihrem Freund *Steinegger* zusammen «und hier logiren wir im gleichen Haus, wo seit letzten Mittwoch «(12ten) auch *Raabe* bei uns ist, den ich zuvor in Zürich besuchte; «*Moosbrugger* aber ist nicht gekommen. Dass der Marquis[2]) Sie besucht «hat, weiss ich durch Raabe. Letzterer freute sich sehr über Ihre «Beförderung, aber vorgestern auch darüber: dass Blösch[3]) durch Studer «gekalbert hat; nach allen Vorgängen war ich weniger entzückt. «Aber potz Donnerwetter! wer hat nun die Kraft, die höhere Stufe, «die Cima, zu erklimmen?! Würden meine Rathschläge nicht immer «so leicht vergessen, so wäre der Sieg nicht zweifelhaft. Vor-«wärts, vorwärts! der Starke weicht nicht zurück. Sacre nome «de dieu! Die Abhandlungen sind noch nicht versandt, *Raabe*[4]) hat «noch keine, aber ist gespannt darauf. *Aus Gründen*, die ich Ihnen «mündlich sagen werde, schicken Sie auch *Anton Müller*[5]) und *Mousson*[6])

[1]) Altbekannter Gasthof in Bern.

[2]) So wurde D i r i c h l e t von Steiner zubenannt.

[3]) «Blösch» ist im bernischen Dialekt die Bezeichnung für eine «gefleckte», d. h. mehrfarbige Kuh. Die Bemerkung gilt auch für S. 70, wo Steiner Schläfli auffordert zu Blösch zu gehen, «er stösst ja nicht!»

[4]) Raabe, Jos. Ludw., geb. 15. V. 1801 zu Brody, Galizien, Professor der Mathematik am eidgen. Polytechnikum und an der Hochschule in Zürich. † 22. I. 1859.

[5]) Prof. der Mathematik an der Universität Zürich geb. 1799, † 11. VIII. 1857.

[6]) Mousson, Joh. Rud. Albert, geb. 17. III. 1805, Prof. der Physik am eidgen. Polytechnikum, demissionirte 1878, † 6. Nov. 1890.

«jedem ein Exemplar, *vergessen Sie es nicht.*[1]) Von Raabe können Sie «aus der Zürcher-Bibliothek jedes Buch haben, gegen ein kleines «jährliches Geschenk für den Packer, wie er sagt. *Valentin*[2]) be-«zieht auch.

«Mittwoch (19ten Oct.) Nachmittag etwa 5 oder 6 Uhr werde «ich in Basel im *Storchen* eintreffen und hoffe Sie da zu treffen; «Ihre Vorlesungen und Zuhörer können kein Hinderniss sein. Bringen «Sie die verlangte Uebersicht des Buchs über die «*Geometrie mit n Dimen-«sionen*» endlich mit. Können Sie oder wollen Sie nicht kommen, so «denken Sie an das, was ich Ihnen so oft gesagt habe: einen Auszug von «4—6 Bogen nach Wien, meinetwegen an *Herrn von Ettingshausen*, «sich auf mich berufen, mit einem Gruss; oder nach Paris.

«Auf baldiges Sehen

Ihr

J. Steiner.»

1854. Steiner an Schläfli.

Der nachfolgende Brief Steiner's vom 10. März 1854 ist im 1. Theil an Schläfli, im 2. an Professor Ris gerichtet [3]).

Berlin, den 10. März 1854.

«*Mein lieber selbstmörderischer Freund!*

«Die mir mitgetheilten Sätze waren mir sehr willkommen, «besonders der eine, den ich falsch hatte und bald nach Paris an «*Terquem* geschickt hätte. Nämlich ich hatte: dass die Fläche f^m von «$B(f^n)$ in $m[3(n-1)^2 + 3(n-1)(m-1) + (m-1)(m-2)]$ Punkten «berührt werde, wo Sie, gewiss richtig, nur $m[3(n-1)^2 + 2(n-1)$ «$(m-1) + (m-1)^2]$ angeben. Aber damit kann ich in den speziellen «Fällen nicht zu Recht kommen, wo die f^m in Theile, Ebenen, etc. «zerfällt. In dem Betracht entsteht die Frage: a) Wenn f^m einen «Hornpunkt δ hat, für wie viele Berührungen zählt denn die durch «denselben gehende f^n, etwa für 3 oder 6? und b) für wie viele «Berührungen zählt es, wenn eine f^n die Doppellinie l_2 der f^m berührt? «Z. B. die f^4 wird von $B(f^3)$ in 132 Punkten berührt; besteht nun «f^4 aus 4 Ebenen E, so hat sie 4 δ und 6 l_2; jede E wird 12 mal

[1]) Raabe gedachte der philosoph. Fakultät der Hochschule Zürich Schläfli zur Ehrenpromotion vorzuschlagen. (Siehe Biogr. Bern. Mitth. S. 131, 132.)

[2]) Professor der Physiologie an der Hochschule Bern. † 23. V. 1883.

[3]) Dieser wichtige Brief ist nach den Poststempeln erst am 11. April 1854 von Berlin ab und am 14. in Bern angekommen.