Praktische Integration

Autor(en): **Schläfli, L.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1899)**

Heft 1463-1477

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-319652

J. H. Graf.

Die nachfolgende *Abhandlung L. Schläfli's über «Praktische Integration»* ist in Briefform für einen uns unbekannten Freund bestimmt, dem beim Lesen von *J. L. Raabe's* Differenzial- und Integralrechnung gewisse Zweifel aufgestiegen waren. Er ist undatiert; jedoch lassen sich leicht Anhaltspunkte gewinnen, welche uns auf die Zeit der Abfassung schliessen lassen. Der Aufenthalt Schläfli's in Thun dauerte von 1837 bis 1847. Die ganze Abhandlung wurde veranlasst durch Fragen, die Schläfli's Freund beim Lesen des I. Bandes des Raabe'schen Werkes besonders bei S. 21 und 41 aufgestiegen waren. Dieser I. Band Raabe's ist 1839 in Zürich erschienen und wir werden kaum fehl gehen, wenn wir den Brief auf das Jahr 1840 datieren. Wir geben den Brief möglichst getreu wieder, haben uns aber erlaubt, die Nummerierung der Resultate in einer Weise zu verändern, dass das Verständnis des Aufsatzes nur gefördert wird, sowie einige Zusätze und Erläuterungen zu geben. Der Aufsatz scheint uns für die Priorität der Aufstellung der Theorie der Bernoullischen Zahlen und Funktionen von gewisser Bedeutung zu sein und beweist aufs Neue, welch' schöpferischer Geist in Schläfli wohnte.

Praktische Integration.

Von

L. Schläfli.

Wenn f(x) die erste abgeleitete Funktion von der ursprünglichen Funktion F(x) bezeichnet, d. h. wenn für ein unendlich werdendes w

$$\lim_{w=0} \frac{F(x+w)-F(w)}{w} = f(x) \qquad \text{(A.)}$$

ist, so schreibt man auch

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

oder mit Rücksicht nicht bloss auf die algebraische Form, sondern auf den absoluten Wert

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

wo a einen Anfangswert der Variablen x bezeichnet, von dem an man sie bis zu ihrem Endwert b wachsen lässt.

Aufgabe: Die Funktion f(x) ist gegeben; es ist aber kein Verfahren bekannt, durch welches man einen endlichen (geschlossenen) Ausdruck für die Funktion F(x) finden könnte? Man soll daher F(b) — F(a) wenigstens approximativ mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit berechnen.

Auflösung: Man teile b — a in n gleiche Teile — je mehr, desto besser. — Ein solcher Teil heisse w, also b — a = nw.

Wenn nun f(x) zwischen den Grenzen a und b kontinuierlich und endlich bleibt, so kann der Fehler, den man begeht, wenn man in der Gleichung (A.) das Zeichen lim weglässt, durch Vermehrung der ganzen Zahl n und daherige Verminderung der Grösse w so klein gemacht werden als man will, nur nicht = 0.

Begnügt man sich nun mit irgend einem Grade von Genauigkeit, und nimmt man w so klein an als es derselbe erfordert, so kann man folgende Gleichungen hinsetzen:

$$\begin{aligned}
F(a+w) - F(a) &= w\,f(a)\\
F(a+2w) - F(a+w) &= w\,f(a+w)\\
F(a+3w) - F(a+2w) &= w\,f(a+2w)\\
F(a+4w) - F(a+3w) &= w\,f(a+3w)\\
&\;\;\text{— — — — — — —}\\
F(a+nw) - F(a+(n-1)w) &= w\,f(a+(n-1)w), \quad \text{addiert}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(a+nw) - F(a) &= w\left\{f(a) + f(a+w) + \cdots + f(a+(n-1)w)\right\}\\
&= F(b) - F(a).
\end{aligned}$$

Beurteilung des an dieser Gleichung haftenden Fehlers, für den Fall, dass f(x) von x = a bis x — b beständig wächst.

Den n^{ten} Teil von b — a, d. h. w teile man ferner in p gleiche Teile; dann kann man die Gleichung

$$F(a+w) - F(a) = w\,f(a)$$

durch die *viel genauere*

$$F(a+w) - F(a) = \frac{w}{p}\left\{f(a) + f\left(a + \frac{w}{p}\right) + \cdots\cdots + f\left(a + \frac{p-1}{p}w\right)\right\}$$

ersetzen. Es ist der gemachten Annahme zufolge

$$f\left(a + \frac{w}{p}\right) > f(a)$$

$$f\left(a + \frac{2w}{p}\right) > f\left(a + \frac{w}{p}\right)$$

u. s. f., daher auch

$$f(a) + f\left(a + \frac{w}{p}\right) + f\left(a + \frac{2w}{p}\right) + \cdots\cdots + f\left(a + \frac{p-1}{p}w\right) > p\,f(a),$$

also $F(a+w) - F(a) > w\,f(a)$, analog

$$F(a+2w) - F(a+w) > w\,f(a+w)$$

u. s. w., daher schliesslich

$$F(b) - F(a) > w\left\{f(a) + f(a+w) + \cdots\cdots + f(a+(n-1)w)\right\}, \quad (1.)$$

aber diese Ungleichheit nähert sich der Gleichheit so sehr als man will, wenn nur w immer kleiner angenommen wird.

Ferner ist

$$f(a) < f(a+w)$$

$$f\left(a + \frac{w}{p}\right) < f(a+w)$$

$$\text{— — — — — — —}$$

$$f\left(a + \frac{p-1}{p}w\right) < f(a+w), \text{ folglich auch}$$

$$F(a+w) - F(a) < w\,f(a+w)$$

$$F(a+2w) - F(a+w) < w\,f(a+2w)$$

$$\text{— — — — — — — — — — — —}$$

$$F(a+nw) - F(a+(n-1)w) < w\,f(a+nw), \text{ addiert}$$

$$F(a+nw) - F(a) < w\left\{f(a)+w) + f(a+2w) + \cdots\cdots + f(a+(n-1)w + f(a+nw)\right\}$$

aber $a + nw = b$, daher

$$F(b) - F(a) < w\left\{f(a+w) + f(a+2w) + \cdots\cdots + f(a+(n-1)w) + f(b)\right\} \quad (2.)$$

Aber auch diese Ungleichheit nähert sich der Gleichheit so sehr als man will, wenn man nur n gross genug annimmt.

Die Betrachtung der beiden approximativen Werte von $F(b) - F(a)$, von denen der eine zu klein, der andere zu gross ist, zeigt, dass der Fehler kleiner sein muss als $a \{ f(b) - f(a) \}$.

Entwicklung des Fehlers in eine Reihe nach den steigenden Potenzen von w.

Man bezeichne die successiven Differentialquotienten von $f(x)$ durch

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \text{ setze}$$

$$F(b) - F(a) = F;\quad f(b) - f(a) = f$$

$$f_1(b) - f_1(a) = f_1$$

$$f_2(a) - f_2(a) = f_2$$

$$S = a\{f(a) + f(a+w) + \cdots + f(a+kw) + \cdots + f(a+(n-1)w)\}$$

$$S = a\sum_{k=0}^{k=n-1} f(a+kw)$$

$$s = a\sum_{k=0}^{k=n-1} f_1(a+kw)$$

$$s_1 = a\sum_{k=0}^{k=n-1} f_2(a+kw)$$

$$s_2 = a\sum_{k=0}^{k=n-1} f_3(a+kw)$$

Nun hat man ganz genau

$$F(b) - F(a) = \int_a^{a+w} f(x)\,dx + \int_{a+w}^{a+2w} f(x)\,dx + \cdots + \int_{a+(n-1)w}^{a+nw} f(x)\,.\,dx$$

$$= \sum_{k-0}^{k=n-1} \int_{a+kw}^{a+(k+1)w} f(x)\,dx. \qquad (3.)$$

Nach dem *Satze von Taylor* ist aber

$$\int_{a+kw}^{a+(k+1)w} f(x)\,dx = F(a+kw+w) - F(a+kw)$$

$$= w\, f(a + k w) + \frac{w^2}{2!} f(a + k w) + \frac{w^3}{3!} f(a + k w) + \cdots\cdots\cdots$$

Setzt man dies in die Gleichung (3.) ein, so folgt

$$F = S + \frac{w}{2!} s + \frac{w^2}{3!} s_1 + \frac{w^3}{4!} s_2 + \cdots + \frac{w^{\mu-1}}{\mu!} s_{\mu-2} + \cdots \qquad (4.)$$

Weil nun aber die Funktion $f(x)$ sich zu $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ etc.,

» » $f_1(x)$ » » $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ »

» » $f_2(x)$ » » $f_3(x)$, $f_4(x)$, $f_5(x)$ »

— — — — — — — — —

ganz ebenso verhalten wie sich die Funktion $F(x)$ zu $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... verhält, so hat man folgendes System von unendlich vielen Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
F = S + \frac{w}{2!} s + \frac{w^2}{3!} s_1 + \cdots\cdots\cdots + \frac{w^{\mu-1}}{\mu!} s_{\mu-2} + \cdots\cdots \\
f = s + \frac{w}{2!} s_1 + \frac{w^2}{3!} s_2 + \cdots\cdots\cdots + \frac{w^{\mu-1}}{\mu!} s_{\mu-1} + \cdots\cdots \\
f_1 = s_1 + \frac{w}{2!} s_2 + \frac{w^3}{3!} s_3 + \cdots\cdots\cdots + \frac{w^{\mu-1}}{\mu!} s_{\mu} + \cdots\cdots \\
\text{— — — — — — — — — — — — — —} \\
f_m = s_m + \frac{w}{2!} s_{m+1} + \frac{w^3}{3!} s_{m+2} + \cdots + \frac{w^{\mu-1}}{\mu!} s_{m+\mu-1} + \cdots
\end{array}\right\} \text{I.}$$

Aus dem System I sollen nun $s\ s_1\ s_2\ s_3$ . . . . . eliminiert, d. h. der Wert von s durch $F\ f\ f_1\ f_2$ . . . . . ausgedrückt werden.

Um diese Elimination bequem auszuführen, wollen wir uns vorerst auf 5 Gleichungen beschränken und dieselben folgendermassen darstellen.

$$\begin{array}{lllllll}
F = & S + \frac{1}{2} w s & + \frac{1}{6} w^2 s_1 & + \frac{1}{24} w^3 s_2 & + \frac{1}{120} w^4 s_3 & + \cdots\cdots\cdots \\
w f = & w s & + \frac{1}{2} w^2 s_1 & + \frac{1}{6} w^3 s_2 & + \frac{1}{24} w^4 s_3 & + \cdots\cdots\cdots \\
w^2 f_1 = & & w^2 s_1 & + \frac{1}{2} w^3 s_2 & + \frac{1}{6} w^4 s_3 & + \cdots\cdots\cdots \\
w^3 f_2 = & & & w^3 s_2 & + \frac{1}{2} w^4 s_3 & + \cdots\cdots\cdots \\
w^4 f_3 = & & & & w^4 s_3 & + \cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Die letzte dieser 5 Gleichungen ergiebt:

$w^4 s_3 = w^4 f_3 - \cdots\cdots$, also die vorletzte

$w^3 s_2 = w^3 f_2 - \frac{1}{2} w^4 f_3 + \cdots\cdots$, die dritte

$w^2 s_1 = w^2 f_1 - \frac{1}{2} w^3 f_2 + \frac{1}{12} w^4 f_3 - \cdots\cdots$, die zweite

$ws = wf - \frac{1}{2} w^2 f_1 + \frac{1}{12} w^3 f_2 + 0 \,.\, w^4 f_3 - + \cdots\cdots$, die erste

$$S = f - \frac{1}{2} wf + \frac{1}{12} w^2 f_1 + 0 \,.\, w^3 f_2 - \frac{1}{720} w^4 f_3 + \cdots\cdots$$

Man entnimmt hieraus, dass gesetzt werden darf:

$$S = F + c_1 wf + c_2 w^2 f_1 + c_3 w^3 f_2 + \cdots\cdots + c_\mu w^\mu f_{\mu-1} + \cdots\cdots$$

$$s = f + c_1 wf_1 + c_2 w^2 f_2 + c_3 w^3 f_3 + \cdots\cdots + c_\mu w^\mu f_\mu + \cdots\cdots$$

$$s_1 = f_1 + c_1 wf_2 + c_2 w^2 f_3 + c_3 w^3 f_4 + \cdots\cdots + c_\mu w^\mu f_{\mu+1} + \cdots\cdots$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$s_m = f_m + c_1 wf_{m+1} + c_2 w^2 f_{m+2} + c_3 w^3 f_{m+3} + \cdots\cdots c_\mu w^\mu f_{m+\mu} + \cdots\cdots$$

Man substituiere nun diese Werte von $S\ s\ s_1\ s_2 \cdots\cdots$ in die erste Gleichung des Systems I, so erhält man für die unbestimmten Coefficienten $c_1\ c_2 \cdots\cdots c_\mu \cdots\cdots$ folgendes System von Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{1}{2!} + c_1 = 0 \\[1ex]
\frac{1}{3!} + \frac{c_1}{2!} + c_2 = 0 \\[1ex]
\frac{1}{4!} + \frac{c_1}{3!} + \frac{c_2}{2!} + c_3 = 0 \\[1ex]
\frac{1}{5!} + \frac{c_1}{4!} + \frac{c_2}{3!} + \frac{c_3}{2!} + c_4 = 0 \\[1ex]
\frac{1}{6!} + \frac{c_1}{5!} + \frac{c_2}{4!} + \frac{c_3}{3!} + \frac{c_4}{2!} + c_5 = 0 \\[1ex]
- - - - - - - - - - - - \\[1ex]
\frac{1}{(n+1)!} + \sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{c_k}{(n+1-k)!} = 0
\end{array}\right\} \text{II.}$$

Es ist daher $c_1 = -\,{}^1/_2$

$$c_2 = \frac{1}{12}$$

$$c_3 = 0$$

$$c_4 = -\frac{1}{720}$$

$$c_5 = 0$$

$$c_6 = \frac{1}{30240}$$

$$c_7 = 0$$

$$c_8 = -\frac{1}{1209600}$$

$$c_9 = 0$$

$$c_{10} = \frac{1}{47900160}$$

$$c_{11} = 0$$

$$c_{12} = -\frac{691}{1307674368000}$$

$$c_{13} = 0$$

$$c_{14} = \frac{1}{74724249600} \quad \text{u. s. f.}$$

Die Gleichung, in welcher zuerst die unbestimmten Coefficienten $c_1\ c_2\ c_3 \cdots\cdots$ gebraucht wurden, kann jetzt auch so geschrieben werden

$$F = S - c_1 w f - c_2 w^2 f_1 - c_3 w^3 f_2 - c_4 w^4 f_3$$

oder wenn für die Zeichen $F, f, f_1, f_2, f_3, \cdots\cdots c_1\ c_2\ c_3 \cdots\cdots$ das durch sie bezeichnete gesetzt und auf $S - c_1 w f$ reduziert wird

$$\int_a^b f(x)\,dx = w\left\{\frac{1}{2} f(a) + f(a+w) + f(a+2w) + \cdots\cdots\cdots\cdots + f(a+(n-1)w) + \frac{1}{2} f(b)\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{12} w^2 \left\{f_1(b) - f_1(a)\right\} + \\ \frac{1}{720} w^4 \left\{f_3(b) - f_3(a)\right\} - \\ \frac{1}{30240} w^6 \left\{f_5(b) - f_5(a)\right\} + \\ \frac{1}{1209600} w^8 \left\{f_7(b) - f_7(a)\right\} - \\ \frac{1}{47900160} w^{10} \left\{f_9(b) - f_9(a)\right\} + \\ \frac{691}{1307674368000} w^{12} \left\{f_{11}(b) - f_{11}(a)\right\} - \end{array}\right\} \text{III.*)}$$

$$\frac{1}{74724249600} w^{14} \left\{f_{13}(b) - f_{13}(a)\right\} + \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

Schläfli bemerkt, dass *Raabe* in seinem Buch «die Differenzial- und Integralrechnung» auf S. 431 diese Gleichung (3.) auch habe, sie aber anders abteile und zwar mit dem Vorteil, einen Ausdruck für die Ergänzung zu haben, deren die Reihe in (3.) bedarf, wenn sie irgendwo abgebrochen wird. In der That findet sich im I. Bande, § III von Seite 435 ein «Allgemeines Verfahren die nummerischen Werte bestimmter Integralien näherungsweise zu ermitteln.» Seite 432 giebt er die Coefficienten dem Werte nach wie hier, während er sie Seite 433 bis mit c_{20} auf 16 Decimalstellen ausgerechnet hat, nämlich

$$\begin{array}{l} c_2 = 0{,}08333\ 33333\ 333333 \\ c_4 = 0{,}00138\ 88888\ 888889 \\ c_6 = 0{,}00003\ 30687\ 830688 \\ c_8 = 0{,}00000\ 08267\ 195767 \\ c_{10} = 0{,}00000\ 00208\ 767570 \\ c_{12} = 0{,}00000\ 00005\ 284190 \\ c_{14} = 0{,}00000\ 00000\ 133825 \\ c_{16} = 0{,}00000\ 00000\ 003390 \\ c_{18} = 0{,}00000\ 00000\ 000086 \\ c_{20} = 0{,}00000\ 00000\ 000002 \end{array}$$

Nun mögen noch einige Untersuchungen über diese Zahlen c_1 c_2 c_3 . c_4 . . . . . folgen. Wir werden durch Vergleichung auf folgende Fragen geführt:

*) Für die Methode, diese Gleichung abzuleiten, vergleiche *S. D. Poisson*, Traité de mécanique, III. Auflage, I, S. 16, Nr. 13.

1. Sind wirklich mit Ausnahme von c, alle Zahlen c mit ungeradem Index = 0, wie es die berechneten Werte von $c_3\, c_5\, c_7\, c_9\, c_{11}\, c_{13}$ vermuten lassen?

2. Geht der Zeichenwechsel der Werte der mit geradem Index behafteten c ungestört so weiter, wie er an den berechneten Werten von c_2 bis c_{14} sich zeigt?

3. Wenn man in den Nennern der Zahlen $c_2\, c_4\, c_6$ etc. die Faktoren 1! 3! 5! etc. weglässt, welcher Natur ist denn die Progression

$$\frac{1}{12}, \frac{1}{120}, \frac{1}{252}, \frac{1}{240}, \frac{1}{132}, \frac{691}{27760}, \frac{1}{12},$$

u. s. w.? Nähern sich ihre Glieder vielleicht immer mehr einem bestimmten endlichen Werte? oder können sie vielleicht grösser werden als jede beliebige Zahl?

Man multipliziere die erste der Gleichungen II mit x^2, die zweite mit x^3, die dritte mit x^4, u. s. f., damit bei der Addition der so veränderten Gleichungen in der ersten senkrechten Reihe

$$\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\cdots \text{ in inf.} = e^x - 1 - x$$

herauskomme. In der zweiten senkrechten Reihe erhält man $c_1 x (e^x - 1)$; in der dritten $c_2 x^2 (e^x - 1)$ u. s. f., somit im ganzen

$$e^x - 1 - x + c_1 x (e^x - 1) + c_2 x^2 (e^x - 1) + c_3 x^2 (e^x - 1) + \cdots\cdots = 0$$

$$e^x - 1 + c_1 x (e^x - 1) + c^2 x_2 (e^x - 1) + \cdots\cdots = x$$

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots\cdots = \frac{x}{e^x - 1}$$

$$= \frac{x}{2} \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} - 1$$

also, weil $c_1 = -\frac{1}{2}$ ist

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} = 1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots\cdots$$

Da aber die linke Seite dieser Gleichung den Wert nicht ändert, wenn x in — x übergeht, so müssen alle mit ungeradem Index behafteten Coefficienten c der rechten Seite verschwinden. Dies die Antwort auf die erste Frage.

Zusätze: Es ist

$$\frac{x}{2}\,\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}} = 1 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + c_6 x^6 + \cdots\cdots\cdots \qquad (a)$$

Lässt man in dieser Gleichung x in i x übergehen, so folgt:

$$\frac{x}{2}\operatorname{cotg}\frac{x}{2} = 1 - c_2 x^2 + c_4 x^4 - c_6 x^6 + - \cdots\cdots\cdots \qquad (b)$$

Schwieriger zu beantworten ist die *zweite* Frage.

Um kleinere Brüche zu erhalten, setze ich $c_{2n} = -(-1)^n \frac{B_n}{(2n-1)!}$

Man hat nämlich alsdann $B_1 = \frac{1}{12}$

$$B_2 = \frac{1}{120}$$

$$B_3 = \frac{1}{252}$$

$$B_4 = \frac{1}{240}$$

$$B_5 = \frac{1}{132}$$

$$B_6 = \frac{691}{32760}$$

$$B_7 = \frac{1}{12}$$

Die allgemeine Gleichung bei II muss in zwei Fällen betrachtet werden:

1. n gerade,
2. n ungerade.

1. Setzt man für n die gerade Zahl 2 n, so hat man

$$\frac{1}{(2n+1)!} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2n)!} + \frac{c_2}{(2n-1)!} + \cdots\cdots + \frac{c_{2k}}{(2n+1-2k)} + \cdots\cdots + \frac{c_{2n}}{1!} = 0.$$

Man multipliziere diese Gleichung mit $(2n)!$, führe die obige Bezeichnung durch B ein und bediene sich des *Raabe'schen*

$$\binom{2n}{2k-1} = \frac{2n(2n-1)\cdots\cdots(2n-2k+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots\cdots\cdots(2k-1)},$$

so erhält man die Gleichung

$$\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \binom{2n}{2k-1} B_k = 0. \qquad \text{(c)}$$

Diese Gleichung gilt für alle Werte der ganzen Zahlen von 1 an bis ∞.

2. Setzt man für n die ungerade Zahl $2n+1$ ein, so hat man

$$\frac{1}{(2n+2)!} - \frac{1}{2}\frac{1}{(2n+1)!} + \frac{c_2}{(2n)!} + \cdots\cdots + \frac{c_{2k}}{(2n+2-2k)!}$$
$$+ \cdots\cdots + \frac{c_{2n}}{2!} = 0.$$

Durch Multiplikation mit $(2n+1)!$ erhält man

$$\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k-1} \cdot B_k = 0. \qquad \text{(d)}$$

Diese Gleichung gilt auch für $n = 0$. Das System (c) würde zur Berechnung der Werte von $B_1\, B_2\, B_3 + \cdots\cdots$ genügen, aber die Gleichungen (d) sind sehr vorteilhaft zur Verifikation.

Es wird im Verlauf der Untersuchungen von Nutzen sein, wenn man jetzt schon, veranlasst durch die Form der Gleichungen (c) und (d), folgende Bezeichnung einführt:

$$\varphi(x, n) = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n}}{2} - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k B_k \binom{2n}{2k-1} x^{2n-2k+1} \qquad \text{(e)}$$

$$\psi(x, n+1) = \frac{x^{2n+2}}{2n+2} - \frac{x^{2n+1}}{2} - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k B_k \binom{2n+1}{2k-1} x^{2n-2k+2}$$

oder

$$\psi(x, n) = \frac{x^{2n}}{2n} - \frac{x^{2n-1}}{2} - \sum_{k=1}^{k=n-1} (-1)^k B_k \binom{2n-1}{2k-1} x^{2n-2k} \qquad \text{(f)}$$

Diese Gleichungen (e) und (f) gelten für $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$ und nun lassen sich die Gleichungen (c) und (d) ganz kurz so darstellen:

$$\varphi(1, n) = 0; \quad \psi(1, n) = 0.$$

Überdies hat man noch $\varphi(0, n) = 0$; $\psi(0, n) = 0$.

Überdies hat man noch $\varphi(0, n) = 0$; $\psi(0, n) = 0$. Multiplizieren wir (e) mit dx und integriert man zwischen den Grenzen 0 und x, so folgt

$$\int_0^x \varphi(x, n)\, dx = \int_0^x \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\, dx - \int_0^x \frac{x^{2n}}{2}\, dx - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k B_k \binom{2n}{2k-1} \int_0^x x^{2n-2k+1}\, dx$$

$$= \frac{1}{2n+1} \frac{x^{2n+2}}{2n+2} - \frac{x^{2n+1}}{2(2n+1)} - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k B_k \binom{2n}{2k-1} \frac{x^{2n-2k+2}}{2n-2k+2}$$

$$\int \varphi(x, n)\, dx = \frac{1}{2n+1}\, \psi(x, n+1); \text{ analog} \qquad \text{(g)}$$

$$\int \psi(x, n)\, dx = \frac{1}{2n}\, \varphi(x, n) + (-1)^n B_n \,.\, x \qquad \text{(h)}$$

Die Gleichung (a) lässt sich folgendermassen darstellen:

$$\frac{1 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{4!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{6!} + \cdots}{\frac{1}{1!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{3!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{5!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{7!} + \cdots} = 1 + \frac{B_1}{1!} x^2 - \frac{B_2}{3!} x^4 + \frac{B_3}{5!} x^6 - + \cdots\cdots$$

Man multipliziere beide Seiten dieser Gleichung mit dem Nenner linker Hand, so müssen, da ja die Gleichung für jedes x wahr sein soll, die Coefficienten der gleich hohen Potenzen von x einander gleich sein. Dadurch erhalten wir folgendes System von Gleichungen:

$$\frac{(^1/_2)^2}{3!} + \frac{B_1}{1!\,1!} = \frac{(^1/_2)^2}{2!}$$

$$\frac{(^1/_2)^4}{5!} + \frac{(^1/_2)^2 B_1}{1!\,3!} - \frac{B_2}{3!\,1!} = \frac{(^1/_2)^4}{4!}$$

$$\frac{(^1/_2)^6}{7!} + \frac{(^1/_2)^4 B_1}{5!\,1!} - \frac{(^1/_2)^2 B_2}{3!\,3!} + \frac{B_3}{5!\,1!} = \frac{(^1/_2)^6}{6!}, \text{ allgemein}$$

— — — — — — — — — — — — — —

$$\frac{(1/2)^{2n}}{(2n+1)!} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(1/2)^{2n-2k} B_k \cdot (-1)^k}{(2n-2k+1)!\,(2k-1)!} = \frac{(1/2)^{2n}}{(2n)!}$$

oder wenn wir mit $\frac{1}{2}(2n)!$ multiplizieren, so erhalten wir

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{(1/2)^{2n+1}}{2n+1} - \sum\limits_{k=1}^{k=n} (-1)^k B_k \begin{pmatrix} 2n \\ 2k-1 \end{pmatrix} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n-2k+1} = \dfrac{(1/2)^{2n}}{2} \\ \text{oder auch wegen (e)} \\ \varphi\left(\dfrac{1}{2}, n\right) = 0. \end{array}\right\} \quad (j)$$

Dies ist der erste Satz. Durch Behandlung der Gleichung (a) wurde eben der Beweis und die Aufstellung dieses ersten Satzes beabsichtigt. Nun stellen wir gleich einen *zweiten Satz* auf. Es ist zu zeigen, dass

$$\cos\Theta + \frac{\cos 2\Theta}{2^{2n}} + \frac{\cos 3\Theta}{3^{2n}} + \cdots\cdots + \frac{\cos p\Theta}{p^{2n}} + \cdots\cdots \text{ in inf.}$$

$$= \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\cos p\Theta}{p^{2n}} = -\frac{(-1)^n}{2}\frac{(2\pi)^{2n}}{(2n-1)!}\,\psi\left(\frac{\Theta}{2\pi}, n\right) + \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n-1)!} B_n \quad (k)$$

Um zu zeigen, dass dieser Satz für $0 < \Theta < 2\pi$ wahr ist, zeige man vorerst, dass wenn er für n gilt, er auch für $n+1$ Giltigkeit hat; hernach soll die Richtigkeit noch für $n=1$ nachgewiesen werden.

Durch Multiplikation mit $d\Theta = 2\pi\, d\frac{\Theta}{2\pi}$ und Integration von 0 bis Θ findet man unter Beachtung von Gleichung (h)

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\sin p\Theta}{p^{2n+1}} = -\frac{(-1)^n}{2}\frac{(2\pi)^{2n+1}}{(2n)!}\,\varphi\left(\frac{\Theta}{2\pi}, n\right) \quad (l)$$

Diese Gleichung liefert für die Setzungen $\Theta = 0$, $\Theta = \pi$, $\Theta = 2\pi$, die schon gefundenen Gleichungen

$$\varphi(0, n) = 0,\ \varphi\left(\frac{1}{2}, n\right) = 0,\ \varphi(1, n) = 0,$$

was für die Richtigkeit der Gleichungen (l) und (k) spricht. Durch nochmalige Multiplikation mit $d\Theta$ und Integration von 0 bis Θ folgt

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1-\cos p\Theta}{p^{2n+2}} = -\frac{(-1)^n}{2}\frac{(2\pi)^{2n+2}}{(2n+1)!}\,\psi\left(\frac{\Theta}{2\pi}, n+1\right),$$

daher

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\cos p\Theta}{p^{2n+2}} = -\frac{(-1)^{n+1}}{2} \frac{(2\pi)^{2n+2}}{(2n+1)!} \psi\left(\frac{\Theta}{2\pi}, n+1\right) + \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p^{2n+2}} \quad (m)$$

Durch abermalige Multiplikation dieser Gleichung mit $d\Theta$ und nachfolgender Integration erhalten wir

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\sin p\Theta}{p^{2n+3}} = -\frac{(-1)^{n+1}}{2} \frac{(2\pi)^{2n+3}}{(2n+2)!} \varphi\left(\frac{\Theta}{2\pi}, n+1\right) -$$

$$\frac{(2\pi)^{2n+2}}{2(2n+1)!} B_{n+1}\Theta + \Theta \,.\, \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p^{2n+2}}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $\Theta = \pi$ und bedenkt man, dass $\sin p\pi = 0$ und $\varphi\left(\frac{1}{2}, n+1\right) = 0$ wegen (j), so erhält man

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p^{2n+2}} = \frac{(2\pi)^{2n+2}}{2(2n+1)!} B_{n+1}.$$

Substituiert man diesen Wert nun in Gleichung (m), so unterscheidet sich dieselbe von Gleichung (k) nur dadurch, dass in ihr $n+1$ statt n steht, somit ist der erste Teil des Beweises geleistet und es ist noch zu zeigen, dass (k) auch für $n=1$ gilt. Es sei

$$y = x\cos\Theta + x^2\cos 2\Theta + x^3\cos 3\Theta + \cdots\cdots + x^m\cos m\Theta + \cdots\cdots,$$

wo x einen ächten positiven oder negativen Bruch bezeichnen mag, damit die Reihe konvergent sei. Multipliziert man diese Reihe mit $2x\cos\Theta$ und beachtet man, dass

$$2x^{m+1}\cos m\Theta\cos\Theta = x^{m+1}\cos(m-1)\Theta + x^{m+1}\cos(m+1)\Theta,$$

so findet man

$$2xy\cos\Theta = x^2(y+1) + y - x\cos\Theta,$$

woraus $y = \dfrac{x\cos\Theta - x^2}{1-2x\cos\Theta + x^2}$ folgt, oder auch

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1-x^2}{1-2x\cos\Theta + x^2}.$$

Man multipliziere nun diese Gleichung mit $d\Theta$ und integriere. Rechts führe man die Variable $t = \tang\frac{\Theta}{2}$ und berücksichtige die

Gleichungen $\cos\Theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ und $d\Theta = \frac{2\,dt}{1+t^2}$. Man erhält alsdann wegen

$$\int \frac{(1-x^2)\,dt}{(1-x)^2+(1+x)^2t^2} = \text{arc tang}\,\frac{1+x}{1-x}\,t$$

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{x^p \sin p\Theta}{p} = -\frac{\Theta}{2} + \text{arc tang}\,\frac{1+x}{1-x}\,t$$

$$= \text{arc tang}\,\frac{x\sin\Theta}{1-x\cos\Theta}.$$

Man beabsichtigt nun in dieser Gleichung $x=1$ werden zu lassen. Dann muss aber Θ zwischen den Grenzen 0 und 2π enthalten sein, weil an diesen Grenzen selbst $y = 1+1+1+\cdots\cdots = \infty$ wird, also eine Integration $\int y\,d\Theta$ bis an diese Grenze oder über sie hinaus keinen Sinn haben kann. Man findet also für $0 < \Theta < 2\pi$, die Gleichheit von Θ mit einer dieser Grenzen ausgeschlossen,

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\sin p\Theta}{p} = \frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2}. \tag{n}$$

Durch Multiplikation mit $d\Theta$ und Integration von α bis Θ

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\cos p\alpha - \cos p\Theta}{p^2} = \frac{\pi}{2}(\Theta-\alpha) - \frac{1}{4}(\Theta^2-\alpha^2), \text{ also}$$

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\cos p\Theta}{p^2} = \frac{1}{4}\Theta^2 - \frac{1}{2}\pi\Theta + \left\{\sum \frac{\cos p\alpha}{p^2} - \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{4}\pi\alpha\right\}$$

Es ist aber für ein unendlich klein werdendes α

$$\lim_{\alpha=0}\left\{\sum \frac{\cos p\alpha}{p^2} - \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{4}\pi\alpha\right\} = \sum \frac{1}{p^2},$$

$$\text{als o} \sum \frac{\cos p\Theta}{p^2} = \frac{1}{4}\Theta^2 - \frac{1}{2}\pi\Theta + \sum \frac{1}{p^2}. \tag{α}$$

Man überzeugt sich bald, dass diese Gleichung für $\Theta = 2\pi$ wahr ist. Sie gilt also für ein zwischen 0 und 2π liegendes Θ und für diese Grenzen selbst. Setzt man in derselben $\Theta = \pi$, so kömmt

$$-\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} + \sum \frac{1}{(2m)^2} = -\frac{1}{4}\pi^2 + \sum \frac{1}{(2m-1)^2} +$$

oder auch $\sum \frac{1}{(2\,m)^2}$

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$ Nun aber ist

$$\sum \frac{1}{(2\,m)^2} = \frac{1}{4} \sum \frac{1}{m^2};$$ folglich

$$\sum \frac{1}{p^2} = \sum \frac{1}{(2\,m-1)^2} + \frac{1}{4} \sum \frac{1}{p^2},$$ woraus

$$\sum \frac{1}{p^2} = \frac{4}{3} \sum \frac{1}{(2\,m-1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$ und endlich

$$\sum \frac{\cos p\,\Theta}{p^2} = \frac{1}{4}\,\Theta^2 - \frac{1}{2}\,\pi\,\Theta + \frac{\pi^2}{6}. \qquad (\beta)$$

Wenn aber in Gleichung (k) $n = 1$ gesetzt wird, so kommt

$$\sum \frac{\cos p\,\Theta}{p^2} = \frac{(2\,\pi)^2}{2}\,\psi\left(\frac{\Theta}{2\,\pi}, 1\right) + \frac{(2\,\pi)^2}{2}\,B_1$$

$$= (2\,\pi)^2 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\Theta}{2\pi}\right)^2 - \frac{1}{2}\,\frac{\Theta}{2\,\pi}\right] + 2\,\pi^2 \cdot \frac{1}{12},$$

was mit Gleichung (β) harmoniert.

Endlich gehen wir zum *dritten Satze* über.

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{(2\,\pi)^{2\,n}}{2\,(n-1)!}\,B_n \qquad (o)$$

Dieser Satz wird sofort aus (k) erhalten, wenn in (k) $\Theta = 0$ gesetzt wird.

Nun kann auch auf die 2^{te} und 3^{te} Frage geantwortet werden. Da nämlich

$$\sum \frac{1}{p^{2n}} = 1 + \frac{1}{2^{2\,n}} + \frac{1}{3^{2\,n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \cdots\cdots$$

positiv ist, so muss nach Gleichung (o) auch B_n stets positiv sein, woraus bei der angenommenen Relation $c_{2n} = -(-1)^n \frac{B_n}{(2\,n-1)}$ der stete Zeichenwechsel der Grössen $c_2\, c_4\, c_6\, c_8 + \cdots\cdots$ sich ergiebt. Da ferner $\sum \frac{1}{p^{2\,n}}$ stets grösser ist als 1, jedoch dieser Zahl mit wachsendem n fortwährend sich nähert, so hat man

$$B_n > \frac{2(2n-1)!}{(2\pi)^{2n}},$$

jedoch, so dass mit wachsendem n diese Ungleichheit sich beständig der Gleichheit nähert. Da nun im Zähler des Ausdrucks rechter Hand die mit wachsendem n neu hinzu kommenden Faktoren stets grösser werden, während diejenigen des Nenners sich gleich bleiben, so schliesst man hieraus sofort, dass B_n jede endliche positive Grösse überschreiten kann. Die Zahlen $B_1\ B_2 \cdots B_n \cdots$ heissen Bernoullische Zahlen. Ihre Werte werden successive berechnet und verificiert mittelst der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \binom{2n}{2k-1} B_k = 0 \\ &\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k-1} B_k = 0 \end{aligned}\right\} \begin{matrix}(p)\\ \text{Von } n=1 \\ \text{bis } n=\infty\end{matrix}$$

Es sei auch

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x, n) &= \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n}}{2} - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k B_k \binom{2n}{2k-1} x^{2n-2k+1} \\ \psi(x, n) &= \frac{x^{2n}}{2n} - \frac{x^{2n-1}}{2} - \sum_{k=1}^{k=n-1} (-1)^k B_k \binom{2n-1}{2k-1} x^{2n-2k} \end{aligned}\right\} (q)$$

Dann kann man mittelst dieser Bezeichnungen folgende Sätze hinstellen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = w\left\{\frac{1}{2} f(a) + f(a+w)\, f(a+2w) + \cdots + f(a+(n-1)w) + \frac{1}{2} f(b)\right\}$$
$$+ \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^k B_k \frac{w^{2k}}{(2k-1)!} \left\{f_{2k-1}(b) - f_{2k-1}(a)\right\}, \qquad (r)$$

wo $b - a = n\,w$ und $f_{2k-1}(x)$ den $(2k-1)^{\text{ten}}$ Differentialcoefficienten von $f(x)$ bezeichnet. Es ist weiter

$$\frac{x}{2} \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} = 1 + \frac{B_1}{1!} x^2 - \frac{B_2}{3!} x^4 + \frac{B_3}{5!} x^6 - \frac{B_4}{7!} x^8 + \cdots\cdots \qquad (s)$$

$$\frac{x}{2} \operatorname{cotang} \frac{x}{2} = 1 - \frac{B_1}{1!} x^2 - \frac{B_2}{3!} x^4 - \frac{B_3}{5!} x^6 - \frac{B_4}{7!} x^8 + \cdots\cdots \tag{t}$$

ferner

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(0, n) = 0, \quad \varphi(1, n) = 0 \\ \psi(0, n) = 0, \quad \psi(1, n) = 0 \end{array}\right\} \tag{u}$$

und

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, n\right) = 0. \tag{v}$$

$$\sum_{1}^{p=\infty} \frac{\cos p\Theta}{p^{2n}} = + \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n-)!} \left\{ B_n - (-1)^n \psi\left(\frac{\Theta}{2\pi}, n\right) \right\} \tag{w}$$

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\sin p\Theta}{p^{2n+1}} = -(-1)^n \frac{(2\pi)^{2n+1}}{2(2n)!} \varphi\left(\frac{\Theta}{2\pi}, n\right) \tag{x}$$

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p^{2n}} = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n-1)!} B_n. \tag{y}$$

Auch lassen sich folgende zwei Sätze, welche bewiesen werden können und in welchen x eine ganze positive Zahl bezeichnet, aufstellen:

$$\left.\begin{array}{l} 1^{2n} + 2^{2n} + 3^{2n} + 4^{2n} + 5^{2n} + \cdots\cdots\cdots + (x-1)^{2n} = \varphi(x, n) \\ 1^{2n-1} + 2^{2n-1} + 3^{2n-1} + 4^{2n-1} + \cdots\cdots + (x-1)^{2n-1} = \psi(x, n) \end{array}\right\}. \tag{z}$$

Nun, mein Lieber, musst du mich entschuldigen, dass ich mein Versprechen dir nicht eher erfüllt habe. Aber gleich als ich von unserer letzten Zusammenkunft heim kam, dachte ich zu viel versprochen zu haben; denn ich wusste nicht, was ich über die Gleichungen (9) und (10), S. 41 in *Raabe**) dir schreiben sollte, das ich nicht

---

*) Es handelt sich um die Gleichungen

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = w \left\{ \varphi(a) + \varphi(a+w) + \varphi(a+2w) + \cdots\cdots\cdots + \varphi(b-w) \right\} \tag{9}$$

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = w \left\{ \varphi(a+w) + \varphi(a+2w) + \varphi(a+3w) + \cdots\cdots + \varphi(b-w) + \varphi(b) \right\} \tag{10}$$

Siehe S. 41 in J. L. Raabe, die Differential- und Integralrechnung, I. Bd., Zürich 1839.

damals dir mündlich gesagt hätte. So lange w zwar sehr klein ist, aber doch noch einen endlichen Wert hat, sind jene beiden Gleichungen nur approximativ und zwar ist bei der einen der Fehler in diesem Sinne, bei der andern im entgegengesetzten. Subtrahiert man sie daher von einander, so erhält man freilich auf der linken Seite 0, aber auf der rechten Seite die Summe der Fehler, die man aber doch nicht gleich o setzen darf.

Ich verwundere mich aber, dass du *Raabe's* Beweis für den *Taylor'schen* Satz begriffen hast, denn auf S. 21*) kommen Trugschlüsse vor, ähnlicher Art wie der, durch welchen du bei jenen Gleichungen (9) und (10), S. 41, ad absurdum geführt wurdest. Die Gleichung (18), S. 21, ist wirklich gar nicht wahr, wenn anders daselbst $f_1(x)$, $f_2(x)$ u. s. f. die Differentialcoefficienten von $f(x)$ bezeichnen. Die aus Poisson's Mechanik genommene Gleichung, die ich hier mit (v) bezeichnet habe, schien mir vorzüglich geeignet, dir über den Grad der Genauigkeit der Gleichungen (9) und (10), S. 41, in Raabe Licht zu geben, und da jene Gleichung (v) auf die Bernoullischen Zahlen führt, so war mir die Gelegenheit erwünscht, zugleich mehrere Beziehungen und Eigenschaften dieser Bernoullischen Zahlen dir vorzulegen und zu beweisen. Es waren die Gleichungen (z), auf die ich durch Lesung von *Bourdons***) Algebra gelangte, die mich zuerst mit jenen Zahlen bekannt machten. Seither, es *sind nun bald 10 Jahre*, bemühte ich mich vergeblich über sie nähern Aufschluss zu verlangen, namentlich zur Beantwortung obiger drei Fragen zu gelangen. Sieh nun, das Bedürfnis, das ich hatte, dir nicht nur die Gleichung (v) oben aus Poisson schlechtweg hinzuschreiben, sondern auch die

---

*) Bezieht sich auf den von *J. L. Raabe*, die Differential- und Integralrechnung, I. Bd., S. 21, gegebenen Beweis.

**) *Bourdon*, *Pierre Louis Marie*, geb. 16. August 1779 in Mençon, gest. 15. März 1854 in Paris, 1801 Professor der Mathematik zu St. Cyr, dann am Licée Charlemagne und am Collège Henry IV., zuletzt Inspektor der Université Paris, schrieb unter anderem «Elements d'algèbre», die bis 1851 11 Auflagen erlebten. Schläfli benutzte die 5te Auflage 1828 und das von ihm gebrauchte Exemplar befindet sich in der Schweiz. Landesbibliothek in Bern. Da er selbst seinen Namen: «L. Schläfli von Burgdorf» eingetragen hat, so ist hieraus zu schliessen, dass er Bourdon während seines Berner Aufenthalts gebraucht hat, also wahrscheinlich von 1829 an. Dies würde nochmals die Annahme bestätigen, dass der vorliegende Brief aus dem Jahr 1840 stammt. Jene Gleichungen (z) beziehen sich auf Bourdon, 5te Aufl. 1828, S. 655.

Eigenschaften der dabei vorkommenden Bernoullischen Zahlen zu beweisen, hat mich jetzt gezwungen, meine eigenen lange gehegten Wünsche zu erfüllen. Es dreht sich vorzüglich alles um die Gleichung (y). Ich kannte zwar schon vorher, ehe ich daran gieng, dir zu schreiben, zwei Beweise derselben, deren einer sich in *Raabe* findet. Aber der, den ich hier gebe, ist elementarer als jene beiden.

Es ist mir auch leid, dass du beide Male als du in Thun warst, mich nicht angetroffen hast. Das erste Mal war ich von Thun abwesend, das andere Mal war ich den ganzen Tag zu Hause gewesen und nur zwischen 5 und 6 Uhr spazieren gegangen. Ich kam zwar vor 6 Uhr zurück, erfuhr aber erst nachher, als es zu spät war, dass du da gewesen seiest.

Dich herzlich grüssend

dein

L. Schläfli.