Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Band: - (1900)

Heft: 1478-1499

Artikel: Die Definitionen der Bernoullischen Funktion und Untersuchung der Frage, welche von denselben für die Theorie die zutreffendste ist : historisch-kritisch beleuchtet

Kapitel: Die Definition nach J. W. L. Glaisher

Autor: Renfer, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319106

IV. Die Definitionen nach J. W. L. Glaisher.

Nachdem Dr. Glaisher schon in einer frühern Bekanntmachung «*On series and products involving prime numbers only*»[42]) auf die Bernoullische Funktion gekommen ist, widmet er derselben eine eingehende Besprechung in der gleichen englischen Zeitschrift, betitelt «*On the Bernoullian Function*».[43]) In dieser 168 Seiten umfassenden Abhandlung gibt dieser berühmte englische Mathematiker eine grosse Menge von Formeln; ja er begnügt sich auch nicht mit einer einzigen Definition, sondern führt deren mehrere an. Wir treten hier nur auf diejenige Definition näher ein, die uns für die allgemeinste und bequemste erscheint, ohne dabei die übrigen zu vernachlässigen, da wir alle aus der zu besprechenden Definition leicht herstellen können, weil sie durch einfache algebraische Beziehungen verbunden sind. Eine weitere Arbeit «*On the definite integrals connected with the Bernoullian Function*»[44]) von demselben Verfasser gibt uns eine beträchtliche Anzahl von bestimmten Integralen mit Bernoullischen Funktionen.

Die Formel, die Glaisher einer eingehenden Betrachtung unterzieht, lautet anfänglich

$$B_n(x) = \frac{x^n}{n} - \frac{1}{2}x^{n-1} + \frac{n-1}{2!}B_1 x^{n-2} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}B_2 x^{n-4} + - \cdots\cdots \tag{1}$$

§ 21. Herleitung der Definitionsgleichung.

Wie schon Raabe, so geht auch Glaisher aus von der bekannten Beziehung für $0 < x < 1$[68])

$$\sin 2\pi x + \frac{\sin 4\pi x}{2} + \frac{\sin 6\pi x}{3} + \cdots\cdots = \pi\left(\frac{1}{2} - x\right).$$

Durch Multiplikation mit dx und Integration zwischen 0 und x wird

$$\frac{1-\cos 2\pi x}{2\pi} + \frac{1-\cos 4\pi x}{8\pi} + \frac{1-\cos 6\pi x}{18\pi} + \cdots\cdots = \pi\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}\right);$$

multiplizieren wir mit (-2π) und zerreissen dann, so folgt, weil

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\cdots = S_2 = \frac{\pi^2}{3},$$

$$\cos 2\pi x + \frac{\cos 4\pi x}{2^2} + \frac{\cos 6\pi x}{3^2} + \cdots\cdots = 2\pi^2 \left\{ \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{6} \right\}.$$

Durch wiederholte Integration und Multiplikation mit (-2π) entstehen nacheinander

$$\sin 2\pi x + \frac{\sin 4\pi x}{2^3} + \frac{\sin 6\pi x}{3^3} + \cdots\cdots = \frac{2^2\pi^3}{2!} \left\{ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} \right\}.$$

$$\cos 2\pi x + \frac{\cos 4\pi x}{2^4} + \frac{\cos 6\pi x}{3^4}$$

$$+ \cdots\cdots = \frac{-2^3\pi^4}{3!} \left\{ \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{B_2}{4} \right\}.$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\cos 2\pi x + \frac{\cos 4\pi x}{2^{2n}} + \frac{\cos 6\pi x}{3^{2n}}$$

$$+ \cdots\cdots = \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1} \pi^{2n}}{(2n-1)!} \left\{ B_{2n}(x) + (-1)^{n-1} \frac{B_n}{2n} \right\}. \quad (2)$$

$$\sin 2\pi x + \frac{\sin 4\pi x}{2^{2n+1}} + \frac{\sin 6\pi x}{3^{2n+1}}$$

$$+ \cdots\cdots = \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n} \pi^{2n+1}}{(2n)!} B_{2n+1}(x). \quad (3)$$

Darin bedeuten $B_n(x)$ die Klammerausdrücke der obern Formeln; es sind dies die «*Bernoullischen Funktionen*». Die beiden Formeln (2) und (3), wie auch die frühern, sind rationale und integrierbare Funktionen von x. Der erste Term von (2) ist von der $(2n)^{ten}$ Ordnung; der letzte Term der Bernoullischen Funktion in (2) ist vom 2^{ten} Grade in x; der erste Term der Bernoullischen Funktion in (3) ist vom $(2n+1)^{ten}$ Grade, während der letzte in Bezug auf x linear ist. Also ist nach dieser Definition $B_n(x)$ eine Funktion von x, *die keinen von x freien Ausdruck enthalten darf*. Der Ausdruck, der von x unabhängig ist in den obigen Entwicklungen, stellt stets den Wert der Reihe $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots\cdots$, ausgedrückt in Bernoullischen Zahlen, dar.

Diese Definition der Bernoullischen Funktion stimmt nun ganz mit derjenigen von Raabe überein, wie auch Glaisher bei seinen ersten Untersuchungen über diese Funktion die Raabesche Definition benutzt hat, und es ist

$$B_{2n+1}(x) = B''(x) \quad \text{und} \quad B_{2n+2}(x) = B'(x).$$

Glaisher führt dann die Untersuchung über diese $B_n(x)$-Funktion in ausführlicher Weise durch, wobei er Raabe in vielem wesentlich ergänzt. Er berührt anfangs ganz kurz die Funktion mit inversem Argument, dann die einfachen Ableitungen und gibt die Spezialwerte für $x = 0$ und $x = 1$. Sodann leitet er Reihenentwicklungen ab, in welchen die Bernoullischen Funktionen als Koeffizienten auftreten.

Alles dies sind Eigenschaften, die mit der Raabeschen Auffassung übereinstimmen und bei denjenigen von Schlömilch und Schläfli zu entsprechenden Resultaten führen.

Glaisher erwähnt auch, dass die Bernoullischen Funktionen die Koeffizienten der Entwicklung $\frac{e^{ax}-1}{e^{a}-1}$ darstellen und leitet mit Hülfe dieser Auffassung einige Eigenschaften her. Hernach gibt er ähnliche Beziehungen von aufeinanderfolgenden Bernoullischen Funktionen dieser Definition, entsprechend den Darstellungen bei den früher betrachteten Definitionen, und erwähnt auch die Funktion mit negativem Argument.[45])

Uns interessiert diese $B_n(x)$-Funktion weniger, weil sie mit derjenigen von Raabe übereinstimmt und weil dieselbe zu wenig allgemein ist, da auf der rechten Seite die Reihe mit dem Gliede in x^2 oder x abschliesst. Auch Glaisher sah sich gezwungen, zur Vereinfachung der Koeffizienten der Entwicklung nach $B_n(x)$-Funktionen

$$a\,\frac{e^{a(2x-1)}+e^{-a(2x-1)}}{e^{a}-e^{-a}} = 1+(2a)^2\left\{B_2(x)+\frac{B_1}{2}\right\}$$
$$+\frac{(2a)^4}{3!}\left\{B_4(x)-\frac{B_2}{4}\right\}+\cdots\cdots$$

für die Klammerausdrücke einfachere Funktionen einzuführen, und er thut dies, indem er setzt

$$A_{2n}(x) = B_{2n}(x)+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{2n};\quad A_{2n+1}(x) = B_{2n+1}(x).\qquad (n>0).$$

Er selbst sagt, dass diese neue Funktion $A_n(x)$ als analytische Funktion praktischer sei, da sie weniger komplizierte und systematischere Resultate liefere. Da jetzt bei der geraden Bernoullischen Funktion durch diese Setzung auch ein von x freier Term vorkommen darf, so steht diese Funktion in enger Beziehung zu derjenigen von Schläfli.[46])

Nach obigen Erläuterungen werden somit

$$A_{2n}(x) = \frac{1}{2n}\left\{x^{2n} - \frac{1}{2}2n\,x^{2n-1} + \binom{2n}{2}B_1 x^{2n-2} - + \cdots\cdots + (-1)^n \binom{2n}{2n-2} B_{n-1} x^2 + (-1)^{n+1} B_n\right\}.$$

$$A_{2n+1}(x) = \frac{1}{2n+1}\left\{x^{2n+1} - \frac{1}{2}(2n+1)x^{2n} + \binom{2n+1}{2}B_1 x^{2n-1} - \binom{2n+1}{4}B_2 x^{2n-3} + - \cdots\cdots (-1)^n \binom{2n+1}{2n} B_n x\right\}.$$

Die Reihen brechen von selbst ab; beide lassen sich in die allgemeinere Formel für ein beliebiges n zusammenziehen

$$A_n(x) = \frac{1}{n}\left\{x^n - \frac{n}{2}x^{n-1} + \binom{n}{2}B_1 x^{n-2} - \binom{n}{4}B_2 x^{n-4} + - \cdots\right\}. \quad (4)$$

Die Reihe geht so weit, dass rechts keine negativen Koeffizienten auftreten dürfen; der letzte Term enthält $\binom{n}{n-1}$ oder $\binom{n}{n}$, je nachdem n ungerade oder gerade ist.

Diese Definition wollen wir nun eingehender betrachten.

§ 22. Die Derivierten dieser Definition.

A. Die einfachen Differentialquotienten.

Wir gehen von der Definitionsformel (4) aus und differenzieren dieselbe nach x; dann wird

$$\frac{\partial}{\partial x}A_n(x) = x^{n-1} - \frac{1}{2}(n-1)\,x^{n-2} + \binom{n-1}{2}B_1 x^{n-3} - \binom{n-1}{4}B_2 x^{n-5} + - \cdots\cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial x}A_n(x) = (n-1)\,A_{n-1}(x). \quad (5)$$

Diese Formel geht für $n = 2m$ und $n = (2m+1)$ in die entsprechenden Spezialformeln für die geraden und ungeraden Bernoullischen Funktionen der Definitionen von Raabe und Schlömilch über. Hier sind die zwei Spezialfälle in *eine* Formel zusammengefasst; nur steht noch ein Faktor vor der Bernoullischen Funktion, der bei der Schläflischen Definition fehlt. Schon dies ist ein Grund, dass die Definition von Schläfli den Vorzug verdient, da die einfachen Ableitungen der χ-Funktionen wieder reine χ-Funktionen liefern.

B. Die wiederholten Ableitungen.

Solche finden sich bei Glaisher nirgends; dieselben sind jedoch leicht zu erhalten; doch tritt stets ein komplizierender Faktor hinzu; wie leicht herzuleiten, wird, wenn symbolisch $D^\lambda = \frac{\partial^\lambda}{\partial x^\lambda}$,

$$D^\lambda A_n(x) = \lambda! \binom{n}{\lambda} A_{n-\lambda}(x). \tag{6}$$

Schläflis Definition ist also auch in dieser Hinsicht einfacher, da dieselbe auch hier keinen vorgesetzten Faktor zeigt.

C. Einfache Integralformeln.

Multiplizieren wir (5) mit dx und integrieren zwischen 0 und x, so wird

$$\int_0^x A_{n-1}(x)\,dx = \left\{ \frac{A_n(x)}{n-1} \right\}_0^x;$$

durch Trennung der geraden von der ungeraden Bernoullischen Funktion folgen

$$\int_0^x A_{2n}(x)\,dx = \frac{1}{2n} A_{2n+1}(x) \quad \text{und} \tag{7}$$

$$\int_0^x A_{2n-1}(x)\,dx = \frac{1}{2n-1} \left\{ A_{2n}(x) + (-1)^n \frac{B_n}{2n} \right\}, \tag{8}$$

wenn die später zu beweisenden Spezialwerte für $A_{2n+1}(0) = 0$ und $A_{2n}(0) = (-1)^n \frac{B_n}{2n}$ eingesetzt werden.[47])

Aus obigen 2 Formeln ergeben sich für die obere Grenze $x = 1$

$$\int_0^1 A_{2n}(x)\,dx = 0; \quad \int_0^1 A_{2n-1}(x)\,dx = 0. \tag{9}$$

Für die obere Grenze $x = \frac{1}{2}$ werden unter Berücksichtigung von[47])

$$A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^n \frac{B_n}{n} \cdot \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}} \quad \text{und} \quad A_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} A_{2n}(x)\,dx = 0; \quad \int_0^{\frac{1}{2}} A_{2n-1}(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{(2n-1)} (-1)^n \frac{B_n}{n} \cdot \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}}. \tag{10}$$

Auch diese Formeln (7), (8) und (10) zeigen einen vorgesetzten Faktor, der bei den entsprechenden Formeln von Schläfli wegfällt.

§ 23. Die $A_n(x)$-Funktion mit inversem Argument.

Glaisher tritt auf diese Funktion nicht näher ein; er gibt nur die Hauptformel, ohne auf ihre Herleitung einzugehen.[48]) Wir gelangen jedoch auf einfache Weise zu diesen Beziehungen, wenn wir ausgehen von den später herzuleitenden Reihenentwicklungen (23) und (24).[49]) Ersetzen wir in (24) x durch (1—x), so wird unter Anwendung von $\sin 2\lambda\pi(1-x) = -\sin 2\lambda\pi x$

$$-\left\{\sin 2\pi x + \frac{\sin 4\pi x}{2^{2n+1}} + \frac{\sin 6\pi x}{3^{2n+1}} + \cdots\cdots\right\}$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{2^{2n}\pi^{2n+1}}{(2n)!}A_{2n+1}(1-x)$$

und durch Vergleichung dieser Formel mit (24)

$$A_{2n+1}(x) = -A_{2n+1}(1-x). \qquad (\alpha)$$

Setzen wir in (23) für x den Wert (1—x), so erhalten wir unter Berücksichtigung von $\cos 2\lambda\pi(1-x) = \cos 2\lambda\pi x$ genau wieder dieselbe Formel (23), also

$$A_{2n}(x) = A_{2n}(1-x). \qquad (\beta)$$

Diese zwei letzten Formeln (α) und (β) lassen sich zusammenziehen zu der allgemeinern Formel

$$A_n(1-x) = (-1)^n A_n(x). \qquad (11)$$

Aus dieser Formel ergeben sich unter Berücksichtigung der Definitionsgleichung (4) mit Leichtigkeit

$$A_{2n}(0) = A_{2n}(1) = (-1)^{n-1}\frac{B_n}{2n} \quad \text{und} \qquad (12)$$

$$A_{2n+1}(0) = A_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = A_{2n+1}(1) = 0. \qquad (13)$$

Vervielfachung des Argumentes.

Die Herleitung der Formeln dafür ist hier bedeutend umständlicher als bei Schlömilch und Schläfli, da Glaisher zuerst eine Reihenentwicklung suchen muss, in welcher die Bernoullischen Funktionen als Koeffizienten auftreten; von diesem Momente an ist das Verfahren analog dem bei Schläfli.

Er geht aus von der bekannten, für $0 < x < 1$ geltenden Beziehung[50])

$$\frac{1}{2}\pi\frac{e^{a\pi(1-2x)}-e^{-a\pi(1-2x)}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}=\frac{\sin 2\pi x}{1^2+a^2}+\frac{2\sin 4\pi x}{2^2+a^2}$$
$$+\frac{3\sin 6\pi x}{3^2+a^2}+\cdots\cdots$$

Entwickeln wir die einzelnen Glieder der rechten Seite nach Potenzen von a^2 und nehmen die gleichartigen zusammen, so sind nach (24) die Koeffizienten der Potenzen von a Bernoullische Funktionen, und es wird, wenn zugleich mit a multipliziert und dann $a\pi$ durch a ersetzt wird,

$$a\frac{e^{a(1-2x)}-e^{-a(1-2x)}}{e^a-e^{-a}}=-2aA_1(x)-\frac{(2a)^3}{2!}A_3(x)$$
$$-\frac{(2a)^5}{4!}A_5(x)--\cdots\cdots \qquad (\gamma)$$

Es ist dies eine nach ungeraden Bernoullischen Funktionen fortschreitende Entwicklung.

Analog wird aus der bekannten Gleichung[50])

$$\frac{1}{2}a\pi\frac{e^{a\pi(1-2x)}+e^{-a\pi(1-2x)}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}=\frac{1}{2}+\frac{a^2\cos 2\pi x}{1^2+a^2}$$
$$+\frac{a^2\cos 4\pi x}{2^2+a^2}+\cdots\cdots$$

durch Entwicklung nach Potenzen von a, Multiplikation mit 2 und Ersetzen von $a\pi$ durch a

$$a\frac{e^{a(1-2x)}+e^{-a(1-2x)}}{e^a-e^{-a}}=1+(2a)^2A_2(x)+\frac{(2a)^4}{3!}A_4(x)$$
$$+\frac{(2a)^6}{5!}A_6(x)+\cdots\cdots, \qquad (\delta)$$

also eine nach geraden Bernoullischen Funktionen fortschreitende Entwicklung. Addieren wir diese beiden Entwicklungen (γ) und (δ), nachdem wir in denselben a durch (—a) ersetzt haben, so resultiert eine neue, nach aufeinanderfolgenden $A_n(x)$-Funktionen fortschreitende Reihe, nämlich

$$2a\frac{e^{a(2x-1)}}{e^a-e^{-a}}=1+2aA_1(x)+\frac{(2a)^2}{1!}A_2(x)+\frac{(2a)^3}{2!}A_3(x)+\cdots\cdots$$

Setzen wir darin für 2a den Wert a und multiplizieren dann Zähler und Nenner mit $e^{\frac{a}{2}}$, so wird

$$a\frac{e^{ax}}{e^a-1}=1+a\,A_1(x)+a^2A_2(x)+\frac{a^3}{2!}A_3(x)+\frac{a^4}{3!}A_4(x)+\cdots \quad (14)$$

Es ist dies eine elegante Entwicklung, woraus ersichtlich ist, dass

$$A_n(x)=\left[\frac{a^n}{(n-1)!}\right] \text{ in der Entwicklung } a\frac{e^{ax}}{e^a-1}.$$

Von dieser Entwicklung geht, wie wir gesehen haben, Schläfli aus, indem er die Fakultäten der obigen Entwicklung auch noch zur Bernoullischen Funktion mitnimmt; ausgehend von dieser Eigenschaft leitet er dann die wesentlichen Eigenschaften der Bernoullischen Funktion her. Bei Glaisher tritt diese Beziehung nicht so in den Vordergrund, wie sie es verdiente; er leitet zwar einige Formeln durch Koeffizientenvergleichung gleichwertiger Entwicklungen her[51]) und gibt später die Bernoullische Funktion noch als Koeffizient einer andern Entwicklung. *Ein reiner Koeffizient einer solchen Entwicklung ist die Definition von Glaisher nicht.*

Gestützt auf Koeffizientenvergleichung kommt nun auch Glaisher auf die Vervielfachung des Argumentes. Ist k eine positive, ganze Zahl, setzen wir in der letzten Entwicklung für x der Reihe nach die Werte x, $x+\frac{1}{k}, \ldots\ldots\ldots, x+\frac{k-1}{k}$ und addieren dann alle diese Entwicklungen, so wird die Summe

$$S=A_n(x)+A_n\left(x+\frac{1}{k}\right)+\cdots\cdots+A_n\left(x+\frac{k-1}{k}\right)$$

$$=\left[a^n\right] \text{ in } \frac{a}{e^a-1}e^{ax}\left\{1+e^{\frac{a}{k}}+e^{\frac{2a}{k}}+\cdots\cdots+e^{\frac{(k-1)a}{k}}\right\}$$

$$=\left[a^n\right] \text{ in } \left(\frac{a}{k}\right)\frac{k\,e^{\frac{a}{k}(kx)}}{e^{\frac{a}{k}}-1}=\frac{1}{k^{n-1}}A_n(kx);\ \text{daher}$$

$$A_n(x)+A_n\left(x+\frac{1}{k}\right)+\cdots+A_n\left(x+\frac{k-1}{k}\right)=\frac{1}{k^{n-1}}A_n(kx) \quad (15)$$

Setzen wir $x=0$, so müssen wir die zwei Fälle $n=$ gerade und $n=$ ungerade unterscheiden; es werden für

n = ungerade

$$A_n\left(\frac{1}{k}\right)+A_n\left(\frac{2}{k}\right)+\cdots\cdots+A_n\left(\frac{k-1}{k}\right)=0 \quad \text{und für} \quad (15^a)$$

n = gerade

$$A_n\left(\frac{1}{k}\right)+A_n\left(\frac{2}{k}\right)+\cdots\cdots+A_n\left(\frac{k-1}{k}\right)$$

$$=(-1)^{\frac{1}{2}n}\left\{1-\frac{1}{k^{n-1}}\right\}\frac{B_{\frac{1}{2}n}}{n}. \qquad (15^b)$$

Aus diesen Formeln lassen sich mit Leichtigkeit verschiedene Spezialwerte für die Argumente $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$ berechnen; für einzelne Argumente können wir auch direkt von der Definitionssummenformel ausgehen.

A. Berechnung von $A_n\left(\frac{1}{2}\right)$. Aus den Formeln ($15^{a\text{ und }b}$) folgt sofort für $k=2$

$$A_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)=0 \quad \text{und} \quad A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)=(-1)^n\frac{2^{2n-1}-1}{2^{2n}}\cdot\frac{B_n}{n}. \qquad (16)$$

B. Berechnung von $A_{2n}\left(\frac{1}{4}\right)$. Die ungeraden Bernoullischen Funktionen können wir mit Formel (15^a) nicht berechnen, da wir stets auf die identische Gleichung $0=0$ geführt werden. Gehen wir von der Summenformel für $A_{2n+1}(x)$ aus, so gelangen wir auf «Eulersche Zahlen»; da wir jedoch dieselben zu unsern Untersuchungen nie herbeigezogen haben, so wollen wir auch hier nicht auf diese Sache eintreten, besonders da diese Untersuchungen für alle betrachteten Definitionen in analoger Weise durchgeführt werden können.

Dagegen wird aus (15^b) unter Berücksichtigung des Wertes für $A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)$ in Formel (16)

$$A_{2n}\left(\frac{1}{4}\right)=(-1)^n\frac{B_n}{n}\cdot\frac{2^{2n-1}-1}{2^{4n}}. \qquad (17)$$

C. Berechnung von $A_{2n}\left(\frac{1}{3}\right)$. Glaisher geht von der trig. Summenformel aus, um diesen Wert zu erhalten; ganz einfach erhalten wir dieselbe aus (15^b) für $k=3$ unter Anwendung von $A_{2n}\left(\frac{1}{3}\right)=A_{2n}\left(\frac{2}{3}\right)$; es wird dann

$$A_{2n}\left(\frac{1}{3}\right)=(-1)^n\left\{\frac{3^{2n-1}-1}{3^{2n-1}}\right\}\frac{B_n}{4n}. \qquad (18)$$

D. Berechnung von $A_{2n}\left(\frac{1}{6}\right)$. Setzen wir in ($15^b$) $k = 6$ und erinnern uns, dass $A_{2n}\left(\frac{1}{3}\right) = A_{2n}\left(\frac{2}{3}\right)$ und $A_{2n}\left(\frac{1}{6}\right) = A_{2n}\left(\frac{5}{6}\right)$, so wird

$$2\,A_{2n}\left(\frac{1}{6}\right) = (-1)^n \left\{\frac{6^{2n-1}-1}{6^{2n-1}}\right\}\frac{B_n}{2n} - 2\,A_{2n}\left(\frac{1}{3}\right) - A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right);$$

die Werte für $A_{2n}\left(\frac{1}{3}\right)$ und $A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)$ eingesetzt, gibt

$$A_{2n}\left(\frac{1}{6}\right) = (-1)^n \frac{B_n}{4n}\left\{\frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n-1}} - \frac{1}{6^{2n-1}} - 1\right\}. \quad (19)$$

Auf gleiche Weise könnten wir die Werte der geraden Bernoullischen Funktionen für die Argumente $\frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{16}$ u. s. w. berechnen, würden aber zu komplizierten Formeln gelangen.

Glaisher gibt dann eine grosse Zahl von Reihenentwicklungen, in denen diese Spezialfunktionen, sowohl die $B_n(x)$- als auch die $A_n(x)$-Funktion, ja sogar noch weitere etwas von diesen abweichende Definitionen für die Argumente $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$ und $\frac{1}{12}$ als Koeffizienten auftreten[52]); auf die weitern von Glaisher eingeführten Definitionen werden wir später noch zu sprechen kommen.[53])

Im Verlaufe seiner Arbeit führt dann Glaisher noch eine Menge, den Eulerschen Zahlen ähnliche Zahlen J, I, H, P, Q, R und T ein, die in Beziehungen stehen mit algebraischen Reihenentwicklungen.[54]) Er widmet den Untersuchungen dieser Zahlen und Entwicklungen grosse Aufmerksamkeit; ihm gebührt das Verdienst, diese zuerst eingeführt zu haben; doch können alle diese Operationen auch an der Schläflischen Definition ausgeführt werden; die entstehenden Formeln werden ebenso einfach, ja in vielen Fällen sogar bedeutend einfacher.

§ 24. Die Funktion mit negativem Argument.

Glaisher gibt diese Funktion weder so elegant, noch so einfach wie Schläfli; die $A_n(x)$-Funktion findet sich überhaupt nicht mit negativem Argument; dagegen ist die $B_n(x)$-Funktion für $x = (-x)$ kurz erwähnt.

Er geht aus von den Entwicklungen nach Bernoullischen Funktionen, d. h., den Formeln (γ) und (δ) des vorigen §, die mit entsprechender Abänderung auch für die $B_n(x)$-Funktion gelten; addieren wir beide, so folgt nach zweckmässiger Umgestaltung der linken Seite

$$\frac{e^{ax}-1}{e^a-1} = x + a\,B_2(x) + \frac{a^2}{2!}\,B_3(x) + \frac{a^3}{3!}\,B_4(x) + \cdots\cdot \qquad (20)$$

Es ist dies eine neue Entwicklung nach Bernoullischen Funktionen; aber auch hierin sind die Bernoullischen Funktionen nicht reine Koeffizienten der zugehörigen Entwicklung; diese Formel zeigt deutlich den Zusammenhang dieser Funktion mit der Definition von Schlömilch, der gerade den n-fachen Wert der $(n-1)^{ten}$ Ableitung einer solchen Entwicklung als n^{te} Bernoullische Funktion $\varphi(z, n)$ definiert.

Gestützt auf obige Beziehung (20) kommt jetzt Glaisher auf die Funktion mit negativem Argument; er multipliziert dieselbe mit e^{-ax} und erhält

$$-\frac{e^{-ax}-1}{e^a-1} = e^{-ax}\left\{x + a\,B_2(x) + \frac{a^2}{2!}\,B_3(x) + \frac{a^3}{3!}\,B_4(x) + \cdots\cdot\right\}.$$

Durch Entwicklung von e^{-ax} und nachherige Koeffizientenvergleichung wird

$$-B_n(-x) = B_n(x) - (n-1)\,x\,B_{n-1}(x) + \binom{n-1}{2} x^2\,B_{n-2}(x)$$
$$- + \cdots\cdot + (-1)^{n-2} x^{n-2} B_2(x) + (-1)^{n-1} x^n.$$

Dies setzt er symbolisch gleich[55])

$$-B\ (-x) = (E-x)^{n-1} B_1(x), \qquad (21)$$

wobei E ein Operationsfaktor ist, definiert durch

$$E\,B\ (x) = B_{r+1}(x);$$

es resultiert dann

$$(-1)^{n-1} B_n(1+x) = (E-x)^{n-1} B_1(x). \qquad (22)$$

Weitere Bernoullische Funktionen mit negativem Argument finden sich keine mehr; diese symbolische Darstellung ist keineswegs bequem zum Operieren; hier ist entschieden jede andere und besonders die Schläflische Definition vorzuziehen.

§ 25. Diskussion dieser Funktion.

Der einzige Unterschied dieser $A_n(x)$-Funktion, der dieselbe äusserlich nur unwesentlich von der Definition von Schläfli unterscheidet, ist der, dass Schläfli den Faktor $\frac{1}{n!}$ vor der Klammer der rechten Seite der Gleichung der n^{ten} Bernoullischen Funktion hat, während Glaisher nur $\frac{1}{n}$. Bei der graphischen Darstellung ist dann augenscheinlich, dass der Faktor $\frac{1}{n!}$ das Konvergenzgebiet der Funktion um so mehr erweitert, je höher der Grad der Bernoullischen Funktion steigt, und dass schon deshalb die Definition von Schläfli vorzuziehen ist.

Die acht ersten Bernoullischen Funktionen dieser Definition nehmen folgende Werte an:

$$A_1(x) = x - \frac{1}{2}.$$

$$A_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}.$$

$$A_3(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x.$$

$$A_4(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{120}.$$

$$A_5(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x.$$

$$A_6(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{252}.$$

$$A_7(x) = \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{42}x.$$

$$A_8(x) = \frac{1}{8}x^8 - \frac{1}{2}x^7 + \frac{7}{12}x^6 - \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{240}.$$

Wir erkennen daraus, dass die zwei ersten Bernoullischen Funktionen dieser Definition genau mit denjenigen gleich hoher Ordnung bei Schläfli übereinstimmen; die Funktion $A_2(x)$ besitzt also ebenfalls ein Minimum bei $x = \frac{1}{2}$ vom Werte $-\frac{1}{24}$. Die Gleichung für $A_3(x)$ weist analog $\chi(3, x)$ zwischen 0 und 1 sowohl ein Minimum als ein Maximum auf. Beide liegen bei gleichem Werte von x wie für die $\chi(3, x)$-Funktion; doch wird hier der Wert der Funktion gerade 2!-mal so gross wie bei $\chi(3, x)$.

Entsprechend könnten wir weiterfahren; wir finden, *dass die Stellen der Maximal- und Minimalwerte nicht ändern, dass aber die zugehörigen Funktionswerte für diese Definition bedeutend grösser werden, je höher der Grad der Funktion ist; die Funktion nimmt rasch sehr grosse Werte an.* [56])

Die Figuren zu § 18 gelten auch für diese Definition.

§ 26. Verwandlung dieser Definition in trigonometr. Reihen.

Schon bei der Herleitung der Definitionsgleichung ist Glaisher zu trigonometrischen Reihen als Werte für Bernoullische Funktionen gelangt; wir brauchen nur für die $B_n(x)$-Funktion in den Formeln (2) und (3) die allgemeinere $A_n(x)$-Definition einzusetzen; dann resultieren

$$A_{2n}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1} \pi^{2n}} \left\{ \cos 2\pi x + \frac{\cos 4\pi x}{2^{2n}} + \frac{\cos 6\pi x}{3^{2n}} + \cdots\cdots \right\}. \quad (23)$$

$$A_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(2n)!}{2^{2n} \pi^{2n+1}} \left\{ \sin 2\pi x + \frac{\sin 4\pi x}{2^{2n+1}} + \frac{\sin 6\pi x}{3^{2n+1}} + \cdots\cdots \right\}. \quad (24)$$

Wir wären auch zu denselben Resultaten gelangt, wenn wir uns auf die Theorie der Fourierschen Reihen und Integrale gestützt und für die Funktion f(x) die Bernoullische Funktion $A_n(x)$ eingeführt hätten; wie schon bei Schläfli, so gelangen wir auch hier rascher ans Ziel als Schlömilch, weil das entstehende Integral leichter zu lösen ist.

§ 27. Integrale mit $A_n(x)$-Funktionen.

Während Glaisher in seinen zwei ersten, diesen Gegenstand behandelnden Schriften gar keine Integrale mit Bernoullischen Funktionen gibt, behandelt er die Integraldarstellungen dieser Funktion sehr eingehend in seiner dritten, bereits erwähnten Schrift «On the definite integrals connected with the Bernoullian function.»

Er geht darin von den Summenformeln des Sinus und Cosinus aus[57]) und leitet auf analoge Weise, wie die Untersuchungen von § 20 des vorhergehenden Abschnittes zeigen, seine Integrale her. Trotz des Unterschiedes beider Definitionen bleibt ja die Art des Herleitens dieselbe; wir wollen deshalb hier nicht noch einmal dieselben Ableitungen vornehmen, sondern begnügen uns mit der Angabe der erhaltenen Resultate; ein Vergleich der entsprechenden Formeln, die stets sehr ähnlich aussehen, zeigt jedoch, dass diejenigen der Definition von Schläfli noch etwas einfacher aussehen, vorausgesetzt, dass sie in der Form nicht *ganz* übereinstimmen.

A. Einfache Integrale.

1. *Mit der ungeraden Bernoullischen Funktion.* Gestützt auf (8) werden für die Spezialwerte der obern Grenze $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$

$$(2n-1)\int_0^{\frac{1}{2}} A_{2n-1}(x)\,dx = (-1)^n \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} \cdot \frac{B_n}{2n}. \tag{25}$$

$$(2n-1)\int_0^{\frac{1}{3}} A_{2n-1}(x)\,dx = (-1)^n \frac{3^{2n}-1}{3^{2n-1}} \cdot \frac{B_n}{4n}. \tag{26}$$

$$(2n-1)\int_0^{\frac{1}{4}} A_{2n-1}(x)\,dx = (-1)^n \frac{4^{2n}+2^{2n}-2}{4^{2n}} \cdot \frac{B_n}{2n}. \tag{27}$$

$$(2n-1)\int_0^{\frac{1}{6}} A_{2n-1}(x)\,dx = (-1)^n \frac{6^{2n}+2\cdot 3^{2n}+3\cdot 2^{2n}-6}{6^{2n}} \cdot \frac{B_n}{4n}. \tag{28}$$

Hier kompliziert also der vor dem Integral stehende Faktor $(2n-1)$.

2. *Mit der geraden Bernoullischen Funktion.* Gestützt auf Formel (7) werden, wenn wir zur Abkürzung die von Glaisher eingeführten Zahlen wählen,[58])

$$2n\int_0^{\frac{1}{2}} A_{2n}(x)\,dx = 0. \tag{29}$$

$$2n\int_0^{\frac{1}{3}} A_{2n}(x)\,dx = (-1)^{n+1} \frac{I_n}{3^{2n+1}}. \tag{30}$$

$$2n\int_0^{\frac{1}{4}} A_{2n}(x)\,dx = (-1)^{n+1} \frac{E_n}{4^{2n+1}}. \tag{31}$$

$$2n\int_0^{\frac{1}{6}} A_{2n}(x)\,dx = (-1)^{n+1} \frac{J_n}{6^{2n+1}}. \tag{32}$$

B. Integrale mit trig. Funktionen.

Durch analoges Verfahren wie in § 20^B werden

$$\int_0^1 A_{2n+1}(x) \sin 2r\pi x\,dx = (-1)^{n+1} \frac{(2n)!}{(2r\pi)^{2n+1}}. \tag{33}$$

$$\int_0^1 A_{2n+1}(x) \cos 2 r \pi x \, dx = 0. \tag{34}$$

$$\int_0^1 A_{2n}(x) \cos 2 r \pi x \, dx = (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!}{(2 r \pi)^{2n}}. \tag{35}$$

$$\int_0^1 A_{2n}(x) \sin 2 r \pi x \, dx = 0. \tag{36}$$

Auch hier bedeutet r eine positive ganze Zahl; die Formeln (33) und (35) weisen wieder einen Faktor mehr auf, als die entsprechenden der Schläflischen Definition.

C. Integrale von Produkten.

Gestützt auf die Multiplikation der Summenformeln (23) und (24) werden durch nachherige Integration

$$\int_0^1 A_{2m+1}(x) A_{2n+1}(x) \, dx = (-1)^{m+n} \frac{(2m)! \, (2n)!}{(2m+2n+2)!} B_{m+n+1}. \tag{37}$$

$$\int_0^1 A_{2m}(x) A_{2n}(x) \, dx = (-1)^{m+n} \frac{(2m-1)! \, (2n-1)!}{(2m+2n)} B_{m+n}. \tag{38}$$

$$\int_0^1 A_{2m+1}(x) A_{2n}(x) \, dx = \int_0^1 A_{2m}(x) A_{2n+1}(x) \, dx = 0. \tag{39}$$

Für $n = m$ werden die zwei erstern Formeln

$$\int_0^1 \{A_{2n+1}(x)\}^2 dx = \frac{\{(2n)!\}^2}{(4n+2)!} B_{2n+1} \quad \text{und} \tag{40}$$

$$\int_0^1 \{A_{2n}(x)\}^2 dx = \frac{\{(2n-1)!\}^2}{(4n)!} B_{2n}. \tag{41}$$

Wir könnten auch hier wieder als obere Grenze $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ wählen, worauf diese Integrale den 2^{ten} (4^{ten}) Teil der obigen Integrale (37) und (38) oder (40) und (41) ausmachen würden.

Ein Vergleich mit den Formeln bei Schläflis Definition zeigt, dass die Formeln der $\chi(n, x)$-Funktion wieder einfachere Gestalt aufweisen.

Auch diese Integralbetrachtungen könnten natürlich beliebig weit ausgedehnt werden.[59])

§ 28. Andere Definitionen von Glaisher.

Da Glaisher im Laufe seiner Untersuchungen zu Entwicklungen kommt, welche nach fortschreitenden Funktionen $\left\{A_n(x) - 2^n A_n\left(\frac{1}{2}x\right)\right\}$ laufen, so führt er auch diese Funktion als eigene Definition ein, indem er setzt $A'_n(x) = A_n(x) - 2^n A_n\left(\frac{1}{2}x\right)$.

Er führt dann die Betrachtung dieser $A'_n(x)$-Funktion entsprechend derjenigen der $A_n(x)$-Funktion durch und gelangt auch zu ganz entsprechenden Resultaten, ohne aber neue Gesichtspunkte aufzudecken. Vorteile bietet diese Funktion keine, da keine der Formeln eine wesentliche Änderung erfahren.[60])

In derselben Arbeit führt Glaisher noch zwei weitere Definitionen der Bernoullischen Funktion ein, die in sehr engem Zusammenhang mit den früher erwähnten Definitionen stehen, da er setzt

$$V_n(x) = n\,A_n(x) \qquad \text{und} \qquad U_n(x) = n\,A'_n(x).$$

Diese beiden schmiegen sich jeweilen eng an die $A_n(x)$- resp. $A'_n(x)$-Funktion an.

Trotzdem jetzt die Definitionsformeln den allgemeinen Nenner $\frac{1}{n}$ der rechten Seite nicht mehr besitzen, werden die daraus abgeleiteten Formeln nicht einfacher; nach Glaisher sollen sie sich besser zur symbolischen Darstellung eignen als seine früher erwähnten Definitionen. Während Glaishers $B_n(x)$-Funktion mit der Raabeschen Definition übereinstimmt, stimmt seine $V_n(x)$-Funktion mit der Schlömilchschen $\varphi(x, n)$-Funktion überein. Die Untersuchung dieser beiden Funktionen geht ähnlich vor sich, wie die Betrachtung seiner erstern Definitionen; doch wird dabei die symbolische Darstellungsweise angewandt, wo sie überhaupt anzuwenden ist.[61])

Endlich führt derselbe Mathematiker noch zwei weitere Definitionen der Bernoullischen Funktion ein, die mit der $A_n(x)$- resp. $A'_n(x)$-Funktion verbunden sind durch die Beziehungen

$$\alpha_n(x) = A_n\left(x + \frac{1}{2}\right) \qquad \text{und} \qquad \alpha_n'(x) = A_n'\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Auch hier erfolgen die allerdings nur kurzen Betrachtungen darüber in entsprechender Weise wie bei den erstern Definitionen.[62])