Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Band: - (1900)
Heft: 1478-1499

Artikel: Sur un théorème de Steiner : étude géometrique et développements
Autor: Droz-Farny, A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319109

A. Droz-Farny.

Sur un théorème de Steiner.

Etude géométrique et développements.

Le journal de mathématiques belge, *Mathesis*, proposait en 1894, sous la signature de l'éminent géomètre E. Lemoine, la question 937 :

Soit un triangle ABC, et soient A_1 B_1 C_1 les symétriques de *l'orthocentre H,* par rapport aux milieux des hauteurs; *A', B', C',* les symétriques des pieds H_a H_b H_c des hauteurs *par rapport aux* milieux M_a, M_b, M_c des côtés BC, *AC, AB.*

1° Il y a une ellipse qui passe par les six points A, B, C, A′ B′ C′.

2° Elle est normale aux hauteurs en A_1 B_1 C_1.

3° Elle est tangente aux côtés en A′ B′ C′.

4° Elle a pour centre, le centre O du cercle circonscrit.

5° La somme de ses demi-axes égale le rayon R du cercle circonscrit.

6° Elle a pour équation: $\sum a \sqrt{\frac{x}{\cos A}} = 0$

7° Si le cercle ABC et l'ellipse sont fixes, il y a une infinité de triangles ABC.

En 1895, j'ai donné dans *Mathesis*, page 258, une solution complètement synthétique de la question. En 1896, j'ai publié en outre dans le *Journal de Mathématiques spéciales* de Mr. de Longchamps p. 229—233 une solution géométrique de la question 501, proposée par Mr. le commandant E. Barisien et contenant quelques propriétés nouvelles de la figure.

Monsieur Barisien avait rencontré cette figure dans ses belles recherches sur les cercles de Chasles, ces cercles concentriques à une ellipse et de rayons respectifs a+b et a—b et qui jouissent de si nombreuses propriétés.

Les diverses propriétés retrouvées par MM. Lemoine et Barisien, avaient été étudiées autrefois par le grand géomètre bernois Steiner, qui les avait publiées dans le journal de Borchardt, volume 55, pages 356—378, sous le titre: Vermischte Sätze und Aufgaben. Voir ses œuvres réunies, tome II, pages 671 et suivantes. De nombreuses propriétés nouvelles de cette figure ont été énoncées sans démonstrations par Mr. Böklen dans le *Journal de Hoffmann.*

Nous les rencontrerons dans la 2me partie de notre étude. Lire aussi la si intéressante étude historique de la question dans *Mathesis*, année 1898, page 61, due au savant géomètre Mr. Brocard (Colonel du génie à Bar-le-Duc).

Soient donc dans un triangle ABC, A', B', C' les symétriques des pieds des hauteurs H_a H_b H_c par rapport aux milieux M_a M_b M_c des côtés BC, CA, AB et A_1 B_1 C_1 les symétriques de l'orthocentre H par rapport aux milieux des hauteurs.

On démontre aisément que les droites AA', BB', CC' se coupent en un point Q, réciproque de l'orthocentre. Il existe donc une conique qui touche les côtés de ABC en A' B' C'.

Une proposition connue (Mémoire sur les transversales réciproques, *Annales de l'Ecole Normale*, 1866) due à Mr. de Longchamps prouve que *cette conique est l'enveloppe des transversales réciproques de celles qui tournent autour du point H.* (Voir note II).

Le centre de cette courbe, d'après un cas particulier d'un théorème de Newton, sur le lieu des centres des coniques ayant quatre tangentes communes, est à l'intersection des droites joignant M_a, M_b, M_c aux milieux N_a, N_b, N_c des droites AA', BB', CC'; ces droites étant parallèles aux hauteurs AH_a, BH_b, CH_c, *le centre de la conique E coïncide avec le centre O du cercle ABC.* (Voir 3 autres démonstrations dans la note I).

Comme $OM_a = \frac{AH_a}{2} = \frac{A_1H_a}{2}$, la droite $A'O$ passe par A_1 et $A'O = OA_1$; *donc E passe par A_1 B_1 C_1 et les tangentes* en ces points sont parallèles aux tangentes menées en A' B' C', autrement dit: *Les hauteurs du triangle ABC sont normales à la conique E.*

Les perpendiculaires élevées en A', B', C' sur les côtés se coupent en un point N, symétrique de l'orthocentre par rapport à O. Ce point est évidemment l'orthocentre du triangle anticomplémentaire de ABC; donc:

Les hauteurs du triangle anticomplémentaire sont aussi normales à la conique E.

Menons par O et par A_1 des parallèles à BC ; la première rencontre E en S et la seconde AC en P. On voit facilement que les segments $A'C$ et $A_1 P$ déterminés par la tangente AC sur les tangentes parallèles $A_1 P$ et $A'C$ sont toujours de même sens; donc:

E est une ellipse.

Ensuite d'après un théorème connu $\overline{OS}^2 = \overline{A'C} \,.\, \overline{A_1P}.$

Mais si l'on mène par H une parallèle à AC qui rencontre BC en D, l'égalité $AA_1 = HH_a$ entraine $A_1 P = H_a D$, d'où

$$\overline{OS}^2 = A' C.A_1 P = BH_a . H_a D = \overline{HH_a}^2$$

Donc les demi-diamètres de E parallèles aux côtés de ABC sont égaux aux segments inférieurs HH_a, HH_b, HH_c *des hauteurs.*

Nous connaissons maintenant deux demi-diamètres conjugués, OA' et OS. Pour appliquer la construction de Chasles, nous élevons en A' sur BC la perpendiculaire $xA'y$, de manière que $xA' = A'y = HH_a$, et que O et x soient de part et d'autre de BC, on aura:

$$Ox = a+b\,; \quad Oy = a-b$$

et les axes de E sont dirigés suivant les bissectrices de l'angle xOy. Comme $BH_a = A'C$, $A'x = HH_a$, on voit que x appartient à la circonférence ABC, donc $R = a+b$

$$\text{En outre } Oy = ON = (a-b) = OH$$
$$HN = 2\,(a-b).$$

Si, entre le rayon d'une circonférence et les axes d'une ellipse de même centre, on a la relation $R = a+b$, on peut inscrire à la circonférence une infinité de triangles qui sont en même temps circonscrits à l'ellipse et celle-ci est normale aux hauteurs de chacun des triangles. Cette proposition est rendue presque évidente par ce qui précède; on l'établit par un calcul facile, en prenant pour axes de coordonnées, les axes de l'ellipse et en considérant d'abord un triangle isoscèle dont les sommets ont pour coordonnées $(a+b\,;\,0)$ et $(-a\,;\,\pm\sqrt{(a+b)^2-a^2}\,)$, puis en appliquant le théorème de *Poncelet.*

Ces triangles jouissent des propriétés suivantes:

1° L'orthocentre décrit une circonférence de centre O et de rayon $(a-b)$; le centre de gravité décrit une circonférence de centre O et de rayon $\frac{a-b}{3}$; le centre du cercle d'Euler décrit une circonférence de centre O et de rayon $\frac{a-b}{2}$.

2° Le cercle d'Euler reste constamment tangent aux deux cercles décrits sur les axes de E, ce qui est évident puisque

$$a = \frac{1}{2}(R + OH) \text{ et } b = \frac{1}{2}(R - OH)$$

On sait que dans tout triangle on a:

$$\overline{OH}^2 = R^2 (1 - 8 \cos A. \cos B. \cos C.)$$

$$\text{et } \overline{OH}^2 = 9R^2 - (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2)$$

De là:

3° Dans chaque triangle ABC on a:

$$\cos A. \cos B. \cos C = -\frac{a. b.}{2 (a+b)^2}$$

4° Dans chaque triangle ABC on a:

$$\sum \overline{AB}^2 = 4 (2 a^2 + 2 b^2 + 5 a b)$$

De là aisément comme AB = 2 R sin A.

5°
$$\sum \sin^2 A = 2 + \frac{a b}{(a+b)^2}$$

$$\sum \cos^2 A = 1 - \frac{a b}{(a+b)^2}$$

$$\sum \cos 2 A = -1 - \frac{2 ab}{(a+b)^2}$$

6° Dans chaque triangle ABC, le produit des segments supérieurs des hauteurs est constant et égal à:

$$AH. BH. CH = 8 R^3 \cos A. \cos B. \cos C$$
$$= 4 ab (a+b)$$

7° Dans chaque triangle ABC, le produit des segments inférieurs des hauteurs est constant et égal à:

$$HH_a. HH_b. HH_c = 8 R^3 \cos^2 A \cos^2 B. \cos^2 C$$
$$= \frac{2 a^2 b^2}{a+b}$$

8° En représentant par x, y, z les coordonnées normales de O dans le triangle ABC, on a:

$$x y z = \frac{ab (a+b)}{2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + ab.$$

9° Le produit des distances du centre O à l'un des côtés de ABC et à la droite joignant les points milieux des 2 autres côtés est constant et égal à:

$$R^2 \cos A. \cos B. \cos C = \frac{a\,b}{2}$$

10° Le produit des distances du centre O aux côtés du triangle complémentaire de ABC est constant et égal à:

$$\frac{a^3\,b^3}{8} : \frac{ab\,(a+b)}{2} = \frac{a^2\,b^2}{4\,(a+b)}$$

11° Le produit des diamètres de l'ellipse, parallèles aux côtés de ABC est constant et égal à

$$16\,\frac{a^2\,b^2}{a+b}$$

II^me partie.

Des formules connues:

$$\begin{aligned} a &= b \cos C + c \cos B \\ b &= a \cos C + c \cos A \\ c &= a \cos B + b \cos A, \end{aligned}$$

on déduit en éliminant les côtés:

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} = 0$$

d'où la formule bien connue aussi:

$$\text{I)}\ \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A. \cos B \cos C = 1$$

Portons $AC' = BH_c$, $AB' = CH_b$; on sait qu'il existe une ellipse E tangente aux trois côtés aux conjugués isotomiques des pieds des hauteurs et dont le centre est O. (figure I).

A est donc le pole de $B'C'$ et par conséquent AO bisecte $B'C'$.

Théorème: Soient $A'B'C'$ les conjugués isotomiques des pieds des hauteurs et $\alpha\ \beta\ \eta$ les points milieux des droites $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$, les trois droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\eta$ se coupent au centre O du cercle circonscrit au triangle ABC.

Calcul de $A\alpha$: On a $AC' = BH_c = a \cos B$

$$AB' = CH_b = a \cos C$$

$$\text{donc } \overline{B'C'}^2 = a^2 \cos^2 B + a^2 \cos^2 C - 2\, a^2 \cos A \cos B \cos C$$

$$= 4\, R^2 \sin^2 A\, [\cos^2 B + \cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C]$$

$$\text{Or: } \overline{AC'}^2 + \overline{AB'}^2 = 2\, \overline{C'\alpha}^2 + 2\, \overline{A\alpha}^2$$

$$\text{donc: } 2\, \overline{A\alpha}^2 = 2\, R^2 \sin^2 A [\cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C]$$

$$= 2\, R^2 \sin^4 A \quad \text{(d'après formule I)}$$

$$A\alpha = R \sin^2 A$$

$$O\alpha = R \cos^2 A$$

Cherchons sur la droite OA, les points x et y tels que O soit le milieu de x y et que x et y divisent $A\alpha$ harmoniquement.

On aura: $Ox^2 = Oy^2 = O\alpha .\ OA = R^2 \cos^2 A$

$$Ox = Oy = R \cos A$$

$$\text{Donc } xy = AH$$

Théorème: Le diamètre de la conique E dirigé suivant OA est égal au segment supérieur AH de la hauteur AH_a.

Triangle orthique d'un triangle ABC.

Le triangle orthique $H_a\ H_b\ H_c$ est inscrit au cercle d'Euler de ABC. *Le lieu du centre* O_9 *du cercle circonscrit à ce triangle* est donc une circonférence de centre O et de *rayon* $\frac{a-b}{2}$. L'orthocentre H du triangle ABC est le centre du cercle inscrit au triangle orthique, donc: *Le lieu du centre* H du cercle inscrit est une circonférence de centre O et de rayon (a—b)

Le rayon du cercle circonscrit à $H_a\ H_b\ H_c$ reste constant $R' = \frac{R}{2} = \frac{a+b}{2}$; il est facile de démontrer que le rayon r' du cercle inscrit à $H_a\ H_b\ H_c$ reste aussi constant.

En effet: $a' = a \cos A$; $b' = b \cos B$; $c' = c \cos C$.

$$\text{donc } 2\, p' = \Sigma\, a \cos A = \Sigma\, 2\, R \sin A \cos A = R \Sigma \sin 2\, A$$

$$2\, p' = 4\, R \sin A \sin B \sin C$$

$$2 \text{ surface du triangle orthique} = 2\, S' = a'\, b' \sin 2\, C$$

$$2\, S' = ab \cos A \cos B \sin 2\, C$$

$$= R^2 \sin 2\, A \sin 2\, B \sin 2\, C$$

$$r' = \frac{S'}{p'} = 2\ R \cos A \cos B \cos C = \frac{ab}{a+b}$$

On a donc:

$$R' = \frac{a+b}{2};\ r' = \frac{ab}{a+b}$$

Si d'un point P, on mène les quatre normales possibles à une ellipse, on sait d'après un théorème de *Joachimsthal* que trois des pieds des normales et le point diamétralement opposé sur l'ellipse au quatrième pied sont quatre points d'une même circonférence. Cette remarque nous permettra de construire les quatrièmes normales des points N et H à l'ellipse.

Soit donc un triangle ABC inscrit dans le cercle de rayon $R = a+b$ et circonscrit à l'ellipse E [*figure 2*] OH fait avec un. des axes de E un certain angle φ. Construisons la symétrique de OH par rapport aux axes de E et soit Q son point d'intersection avec le cercle. Comme $OQ = a+b$ et $OH = a-b$ et comme l'angle QOH est divisé en parties égales par les axes de E, on sait d'après Chasles, que HQ est normale à l'ellipse en son point milieu P et que $PH = PQ =$ le demi-diamètre conjugué à OP.

La perpendiculaire abaissée de O sur la tangente en P est égale en représentant par α l'angle de OP avec son diamètre conjugué à OP sin α et par conséquent d'après un théorème bien connu d'*Apollonius* en représentant la distance de O à la tangente par d on a:

$$d.\ HP = OP.\ HP \sin \alpha = ab.$$

Supposons une seconde ellipse Σ inscrite dans le triangle ABC et admettant pour foyers O et H. Son centre sera le centre O_9 du cercle des neuf points du triangle. Soit R le symétrique de H par rapport à BC. OR sera le grand axe de l'ellipse Σ et coupera BC au point de contact. Mais d'après un théorème connu de géométrie, les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport à ses côtés appartiennent à la circonférence circonscrite au triangle, donc OR le grand axe de l'ellipse Σ est égal à $a+b$.

On a donc pour cette ellipse $2a' = a+b$

$$2c' = OH = a-b$$

$$2b' = 2\sqrt{ab}$$

On sait que les pieds des perpendiculaires abaissées des foyers d'une ellipse sur les tangentes sont sur le cercle principal de l'ellipse et que le produit des deux perpendiculaires abaissées des foyers sur une tangente quelconque est égal au carré du demi petit axe. Comme d'après une relation précédente

$$d.\ HP = ab = \overline{b'}^2$$

il en résulte que la tangente à E au point P est aussi tangente à Σ d'où le théorème énoncé par Mr. *Böklen* [Dr. O. Böklen, Oberstudienrath à Stoutgart]

Théorème: Les deux ellipses E et Σ ont 4 tangentes communes, les 3 côtés du triangle ABC et une quatrième tangente dont le point de contact avec E est le pied P de la 4^{me} normale de H à l'ellipse. Comme H et N sont symétriques par rapport à O, le point diamétralement opposé de P sur E est le pied de la 4^{me} normale de N à E. Le point P est un des points d'intersection du cercle d'Euler de ABC avec l'ellipse E.

Transformons l'ensemble des deux ellipses E et Σ ainsi que le cercle principal de Σ, ou cercle d'Euler de ABC, par polaires réciproques, par rapport à une circonférence de centre O et de rayon $\varrho = \sqrt{ab}$. (voir figures 3′ et 3″)

L'ellipse E d'axes $AA_1 = 2\,a$ et $BB_1 = 2\,b$ se transforme suivant une ellipse égale E′ tournée autour de O de 90°.

L'ellipse Σ de foyers O et H de grand axe $CC_1 = a+b$ [$OC = a$ et $OC_1 = b$ puisque $OH = a-b$] se transforme suivant un cercle Σ' décrit sur $C'C_1'$ comme diamètre; $OC' = b$ et $OC_1' = a$, le cercle principal de Σ tourné de 180°. Enfin le cercle principal S se transforme suivant une conique S′ de foyer O égale à la conique Σ tournée de 180° autour de O.

Les deux coniques E′ et S′ ainsi obtenues, ayant la même position relative que les coniques E et Σ, il en résulte qu'aux points d'intersection de E et S correspondent 4 tangentes communes des coniques E′ et S′ dont trois forment un triangle inscrit dans une circonférence de centre O et de rayon (a+b). En revenant à la figure primitive on a le théorème suivant de Mr. *Böklen.*

Théorème: Le cercle principal de la conique Σ ou le cercle d'Euler du triangle ABC coupe l'ellipse E en 4 points: un de ces points P est le pied de la 4^{me} normale abaissée de H sur E. Les trois autres points A_2 B_2 C_2 forment un triangle cir-

conscrit à une circonférence fixe de centre O et de rayon $\frac{ab}{(a+b)}$

Les triangles variables $H_a\, H_b\, H_c$ et $A_2\, B_2\, C_2$ sont inscrits dans un même cercle variable, mais de rayon constant $R = \frac{a+b}{2}$ et ont un rayon de cercle inscrit constant $r = \frac{ab}{a+b}$.

Ces triangles jouissent de nombreuses propriétés provenant de l'invariance de R et r.

Ces propriétés seront démontrées en note à la fin du travail.

Démonstration analytique d'un dernier théorème de Mr. Böklen.

Soient de nouveau l'ellipse E, le point H, HP la 4^{me} normale à E; HP étant égal au demi-diamètre conjugué à OP; α étant l'angle excentrique de P, OH est égal à (a—b) et forme un angle α avec le grand-axe de E.

Le cercle d'Euler de ABC de centre O_9, point milieu de OH passe ainsi que nous l'avons vu par P et le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente en P à E. [fig. 4]

D'après un théorème de Laguerre, on peut considérer ce cercle comme un cercle de Joachimsthal et par conséquent les normales à la conique E, aux points A_2, B_2, C_2 sont concourantes en un point Q, situé sur la normale au point p, diamétralement opposé à P sur E.

Si d'un point Q quelconque, pris sur la normale fixe au point p $(x'\ y')$ de l'ellipse E, on abaisse les trois autres normales à E, leurs pieds sont sur une circonférence qui passe aussi par le point diamétral P de p (coordonnées $-x'-y'$) d'après le théorème de Joachimsthal.

Cette circonférence passe aussi par le pied N de la perpendiculaire abaissée du centre O de l'ellipse sur la tangente au point P (théorème de Laguerre). Si le point de concours Q des normales se déplace sur la normale en p, le lieu du centre du cercle de Joachimsthal est une droite, la perpendiculaire à NP en son point milieu.

Le cercle d'Euler passant par P et N est donc bien un cercle *de Joachimsthal.*

Le symétrique du centre O de l'ellipse par rapport au centre du cercle J (ici H) et le symétrique Q' du point Q de concours des normales par rapport à O sont évidemment sur la normale en P.

Mais on peut démontrer que ces deux points sont isotomiques sur cette droite par rapport aux axes.

En effet soient x', y' les coordonnées de p et α, β celles du point Q; l'équation du cercle de Joachimsthal sous la forme que lui a donnée Mr. de Longchamps sera:

$$x^2 + y^2 + xx' + yy' - u\left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + 1\right) = 0$$

$$\text{où } u = a^2 + \frac{b^2\beta}{y'} = b^2 + \frac{a^2\alpha}{x'^2}.$$

On aura pour les coordonnées de son centre.

$$2x = -x' + \frac{ux'}{a^2} = -x' + \frac{x'}{a^2}\left(a^2 + \frac{b^2\beta}{y^1}\right) = \frac{b^2\beta x'}{a^2 y'}$$

$$2y = -y' + \frac{uy'}{b^2} = \frac{a^2\alpha y'}{b^2 x'}$$

On a donc pour les coordonnées du point H:

$$X = 2x \quad Y = 2y$$

$$\text{Or } XY = \alpha\beta$$

Les points Q, Q' H sont donc sur une hyperbole équilatère de centre O et dont les asymptotes coincident avec les axes de E.

On a donc bien HL = Q'M.[1]

Donc PL + PM = PH + PQ'.

Or comme PH = b'

on sait que $PL = \frac{b}{a}b'$ et $PM = \frac{a}{b}b'$

$$\text{Donc } \frac{b}{a}b' + \frac{a}{b}b' = b' + PQ'$$

Il en résulte PQ' = γ. PH. Le lieu du point Q' est donc une ellipse coaxiale à la proposée; il en sera de même pour le lieu du point Q. Voici d'ailleurs son équation:

Les coordonnées du point P sont: $-x' = a\cos\varphi$; $-y' = b\sin\varphi$

nous avons trouvé pour H: $x = \frac{b^2\beta x'}{a^2 y'}$; $y = \frac{a^2\alpha y'}{b^2 x'}$

Mais on sait aussi que:

$$x = (a-b)\cos\varphi \text{ et } Y = -(a-b)\sin\varphi$$

Donc: $(a-b)\cos\varphi = \dfrac{b^2\beta\, a\cos\varphi}{a^2 b\sin\varphi}$

$$-(a-b)\sin\varphi = \frac{a^2\alpha\, b\sin\varphi}{b^2 a\cos\varphi}$$

ou: $\sin\varphi = \dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{\beta}{(a-b)}$; $\cos\varphi = -\dfrac{a}{b}\,\dfrac{\alpha}{(a-b)}$

et pour le lieu du point Q l'ellipse

$$\frac{\alpha^2}{\frac{b^2}{a^2}(a-b)^2} + \frac{\beta^2}{\frac{a^2}{b^2}(a-b)^2} = 1$$

1re Note relative à un problème de Steiner.

Une conique est inscrite dans un triangle ABC. Soient A', B', C' les points de contact sur les côtés BC, AC, AB. Déterminer le centre M de la conique.

1re solution (fig. 5).

On sait que dans toute conique à centre, le produit sur deux tangentes parallèles, des segments déterminés par une tangente variable quelconque est égal au carré du demi-diamètre de la conique, parallèle aux tangentes fixes.

Menons à notre conique, une tangente parallèle à BC, qui coupe AB et AC respectivement en ß et γ et dont le point de contact soit α.

On a d'après le théorème cité:

$$\text{I} \qquad \alpha\beta.\, A'B = \alpha\gamma.\, A'C$$

A α coupe BC en A''; on aura: $\alpha\beta : A''B = \alpha\gamma : A''C$

$$\text{II} \qquad \alpha\beta.\, A''C = \alpha\gamma.\, A''B$$

De ces deux égalités on déduit: $\dfrac{A'B}{A'C} = \dfrac{A''C}{A''B}$

Il en résulte que les points A' et A'' sont isotomiques sur BC. Le point milieu A_0 de A'A'' est donc aussi le point milieu de BC.

Soit D le point milieu de AA'. La droite DA_0 parallèle à AA'' divisera donc aussi $\alpha A'$ en parties égales. Or $\alpha A'$ est un diamètre de la conique.

Le centre M. point milieu de $\alpha A'$ est donc situé sur DA_0.

Théorème : Une conique est tangente aux trois côtés d'un triangle ABC. aux points A', B', C'. Soient A_0 B_0 C_0 les points milieux des côtés. Les trois droites qui joignent les points milieux des droites AA', BB', CC' respectivement aux points A_0 B_0 C_0 se coupent au centre M de la conique.

II^{me} solution (même figure).

Le pôle de la droite AA_0 doit se trouver sur le rayon conjugué de AA_0 par rapport à AB et AC; or A_0 étant le milieu de BC, ce rayon sera parallèle à BC. Il doit aussi se trouver sur la polaire B' C' de A par rapport à la conique. Le point L, où ces deux droites se croisent sera le pôle cherché. A' L sera donc la polaire de A_0. Soit N le second point d'intersection de A' L avec la conique, par conséquent, le point de contact de la deuxième tangente menée de A_0 à cette courbe. Les 4 points A' (AA_0, A' L), N et L sont harmoniques; comme AL est parallèle à A' A'', il en résulte que A' A_0 $=A_0$ A''. Le diamètre passant par A_0, doit diviser en parties égales la polaire A' N de ce point; il est par conséquent parallèle à AA''; il divise donc aussi AA' en parties égales en D; d'où le théorème.

III^{me} solution (fig. 6).

D'après la méthode de Schroeter.

On sait que les paires de tangentes parallèles à une conique donnée, déterminent sur une tangente fixe, une série involutive. Le point de contact sur cette dernière est le centre de l'involution. La réciproque de cette proposition est exacte.

Soit M le centre cherché; menons les droites symétriques de AC et AB par rapport au point M. Ces droites sont tangentes à la conique et si elles rencontrent BC respectivement en γ et β, les paires de points B β et C γ déterminent sur la tangente B C l'involution produite par les paires de tangentes parallèles. Cette involution est donc parfaitement déterminée.

Projetons centralement, du sommet A sur la parallèle b_1, c_1, à BC, (b, milieu de AC) cette involution: On obtient ainsi les deux paires de points c_1, γ_1, et b_1, β_1,. β_1, étant le point milieu de A γ et les deux droites AC et $\gamma\,\varepsilon$ étant parallèles, on a évidemment pour A_0 comme milieu de BC: M β_1, parallèle de $A_0\,c_1$, et M γ_1, parallèle de $A_0\,b_1$,; *s* intersection de MA_0 avec b_1, c_1,

$$\text{Donc: } \frac{s\,b_1}{s\,\gamma'} = \frac{s\,A_0}{s\,M} = \frac{s\ c_1}{s\ \beta_1} \text{ ou: } s\,b.\ s\,\beta, = s\,c_1.\ s\,\gamma_1$$

s est donc le point central de l'involution sur la droite $b_,\ c_,$ et comme elle est parallèle à BC, la projection centrale de s sur BC sera aussi le point central de l'involution sur $BC_,$ c'est-à-dire le point de contact de cette droite avec la conique. La droite qui joint le point milieu de AA_1 au point milieu de BC passe donc bien par le centre M de la conique.

Note seconde (fig. 7).

Une transversale tourne autour d'un point fixe P et coupe les côtés d'un triangle ABC, BC en A', AC en B', et AB en C'. Soient sur le côté BC, A'' le point isotomique de A'; sur AC, B'' l'isotomique de B' et sur AB, C'' l'isotomique de C'.

$A''\ B''\ C''$ est une ligne droite, la transversale réciproque de $A'\ B'\ C'$ (nomenclature de Mr. de Longchamps; démonstration évidente par application du théorème de Ménélaüs).

Quelle est l'enveloppe de $A''\ B''\ C''$, lorsque $A'\ B'\ C'$ tourne autour du point P. ?

B et C, A' et A'' sont les couples d'une involution ponctuelle dont les points doubles sont A_0, le point milieu de BC et le point infini sur BC.

De même A et B, C' et C'' sont les couples d'une involution centrale dont les points doubles sont C_0 et le point ∞ de AB.

Or les ponctuelles A' et C' sont perspectives; il en résulte que les ponctuelles A'' et C'' sont homographiques et par conséquent la droite $A''\ C''$ enveloppe une conique tangente aux trois côtés du triangle. Comme il est facile de le voir, le point α isotomique sur BC, du point d'intersection de cette droite avec PA sera le point de contact de BC avec son enveloppe. A α et AP étant conjuguées isotomiques, il en résulte que A α, B β, C γ se croisent en un même point, le *point de Gergonne* de la conique, point réciproque de P.

Il est facile de trouver le centre de la conique enveloppée. On pourrait utiliser le théorème de la note précédente. D'après ce théorème, le centre M se trouve sur la droite A_0 D qui joint les points milieux de BC et A α. Soit G le centre de gravité du triangle ABC; PG coupe A_0 D en M. Les triangles MGA_0 et GAP étant semblables on a: GP = 2 GM.

M est donc un point fixe de la droite GP, donc les trois transversales telles que A_0 D passent par ce point qui sera le centre de la conique.

M est le complémentaire de P qui est le réciproque du point de Gergonne de la conique.

Si par ex: on fait tourner une transversale autour de l'orthocentre du triangle, les transversales réciproques enveloppent une conique, tangente aux trois côtés du triangle, aux points isotomiques des pieds des hauteurs et dont le centre coïncide avec le centre du cercle circonscrit.

Note troisième.

Dans cette dernière note, nous développerons quelques formules, dont chacune d'elles fournirait un théorème commun aux triangles variables H_a H_b H et A_2 B_2 C_2

Dans tout triangle on a:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1+4 \sin\frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$r = p \operatorname{tg} \frac{A}{2} . \operatorname{tg}\frac{B}{2} . \operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

$$R = \frac{p}{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

$$\text{donc } \frac{r}{R} = 4 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}$$

et par conséquent:

Formule 1: $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$

Donc dans chacun des triangles variables H_a H_b H_c et A_2 B_2 C_2 la somme des cosinus de leurs angles reste toujours constante. Dans ce qui suit, nous ne ferons plus que citer la formule.

Comme $1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2}$

$$\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\left[3 + \cos A + \cos B + \cos C\right]$$

Formule 2: $\sum \cos^2\frac{A}{2} = 2 + \frac{r}{2\,R}$

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = \sum \left(1 - \cos^2 \frac{A}{2}\right)$$

$$= 3 - \sum \cos^2\frac{A}{2}$$

Formule 3: $\sum \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{r}{2\,R}$

Formule 4: $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4\,R}$

$$\frac{abc}{2p} = \frac{4RS}{2p} = 2\,R\frac{S}{p}$$

donc:

Formule 5: $\frac{abc}{2p} = 2\,R\,r$

La perpendiculaire abaissée du centre O du cercle circonscrit a pour valeur $x = R \cos A$.

$$\Sigma\, x = R\, \Sigma \cos A$$

Formule 6: $\Sigma\, x = R + r$ (formule de Carnot)

$$a \operatorname{ctg} A + b \operatorname{ctg} B + c \operatorname{ctg} C = \Sigma\, 2\,R \sin A . \frac{\cos A}{\sin A}$$

Formule 7: $\Sigma\, a \operatorname{ctg} A = 2\,(R + r)$

Soit H l'orthocentre; on sait que $AH = 2\,x$

Formule 8: $AH + BH + CH = 2\,(x + y + z) = 2\,(R + r)$

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{p}{S}$$

Formule 9: $\frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} = \frac{1}{r}$

Formule 10: $r' + r'' + r''' = 4\,R + r$

Formule 11: $\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''} = \frac{1}{r}$

On a comme conséquence d'une formule d'Euler

$$\overline{OI'}^2 + \overline{OJ''}^2 \ \overline{OJ'''}^2 = \Sigma\,(R^2 + 2\,R r')$$
$$= 3\,R^2 + 2\,R\,(r' + r'' + r''')$$
$$= 3\,R^2 + 2\,R\,(4\,R + r)$$

Formule 12: $\overline{OJ'}^2 + \overline{OJ''}^2 + \overline{OJ'''}^2 = 11\,R^2\,2 + R r$

Comme $\overline{AJ}^2 = \frac{p-a}{p}\,b\,c$

$$\overline{AJ}^2 . \overline{BJ}^2 . \overline{CJ}^2 = \frac{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{p^4}\,a^2 b^2 c^2 = \frac{S^2}{p^4}\,a^2\,b^2\,c^2$$

$$\overline{AJ} . \overline{BJ} . CJ = \frac{S}{p^2}\,a\,b\,c = \frac{4\,R\,S^2}{p^2}$$

Formule 13: $\overline{AJ}.\ \overline{BJ}.\ \overline{CJ} = 4\,R\,r^2.$

$$AJ' = \frac{p}{\cos\frac{A}{2}};\ AJ = \frac{p-a}{\cos\frac{A}{2}};\ \text{donc } JJ' = \frac{a}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$JJ'.\ JJ''.\ JJ''' + \frac{a\,b\,c}{\cos\frac{A}{2}\,\cos\frac{B}{2}\,\cos\frac{C}{2}} \quad \text{d'où}$$

Formule 14: $JJ'.\ JJ''.\ JJ''' = 16\,R^2.\ r$

$$\overline{JJ'}^2 + \overline{J''J'''}^2 = 16\,R^2$$

Formule 15: $\overline{JJ''}^2 + \overline{J'J'''}^2 = 16\,R^2$

$$\overline{JJ'''}^2 + \overline{J'J''}^2 = 16\,R^2$$

Ces formules dérivent immédiatement des formules connues $\overline{AH}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{4\,R}^2$, le rayon de la circonférence circonscrite au triangle $J'\ J''\ J'''$ étant égal à 2 R.

On trouve aisément aussi $J''\ J''' = 4\,R\,\cos\frac{A}{2}$

$$\overline{JJ'}^2 + \overline{JJ''}^2 + \overline{JJ'''}^2 = 48\,R^2 - 16\,R^2\left[\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}\right]$$

Formule 16: $\overline{JJ'}^2 + \overline{JJ''}^2 + \overline{JJ'''}^2 = 16\,R^2 - 8\,R r$

Formule 17: $\overline{J''J'''}^2 + \overline{J'J''}^2 + \overline{J'J'''}^2 = 32\,R^2 + 8\,R\,r.$

Porrentruy ce 1er Août 1900.

Figure 1.

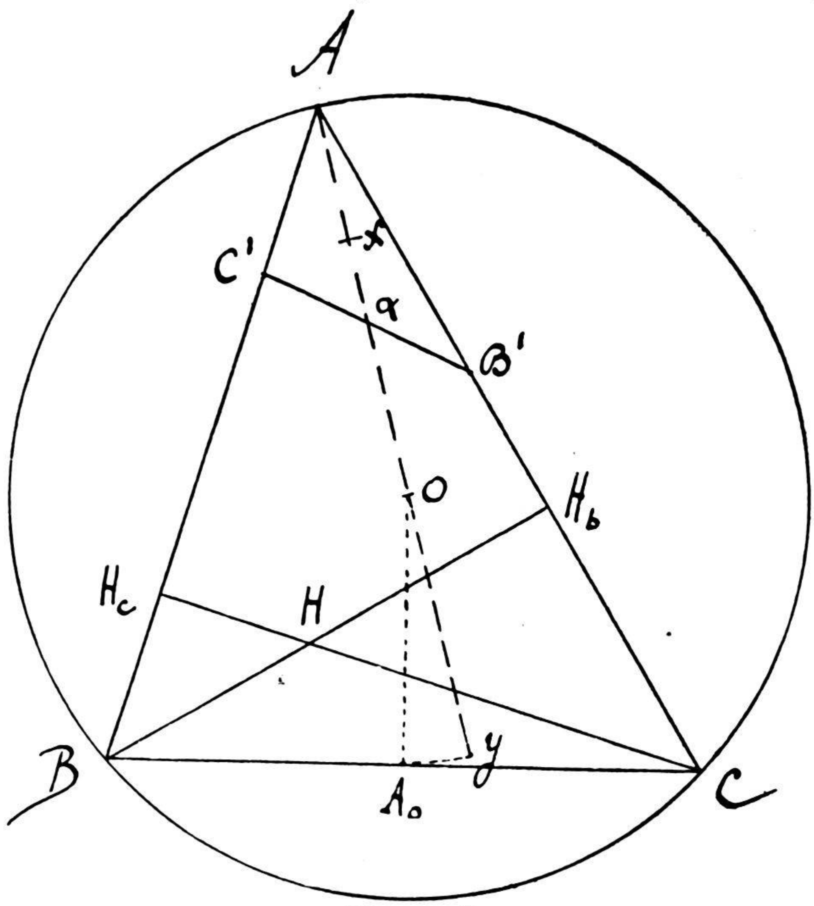


Figure 2.

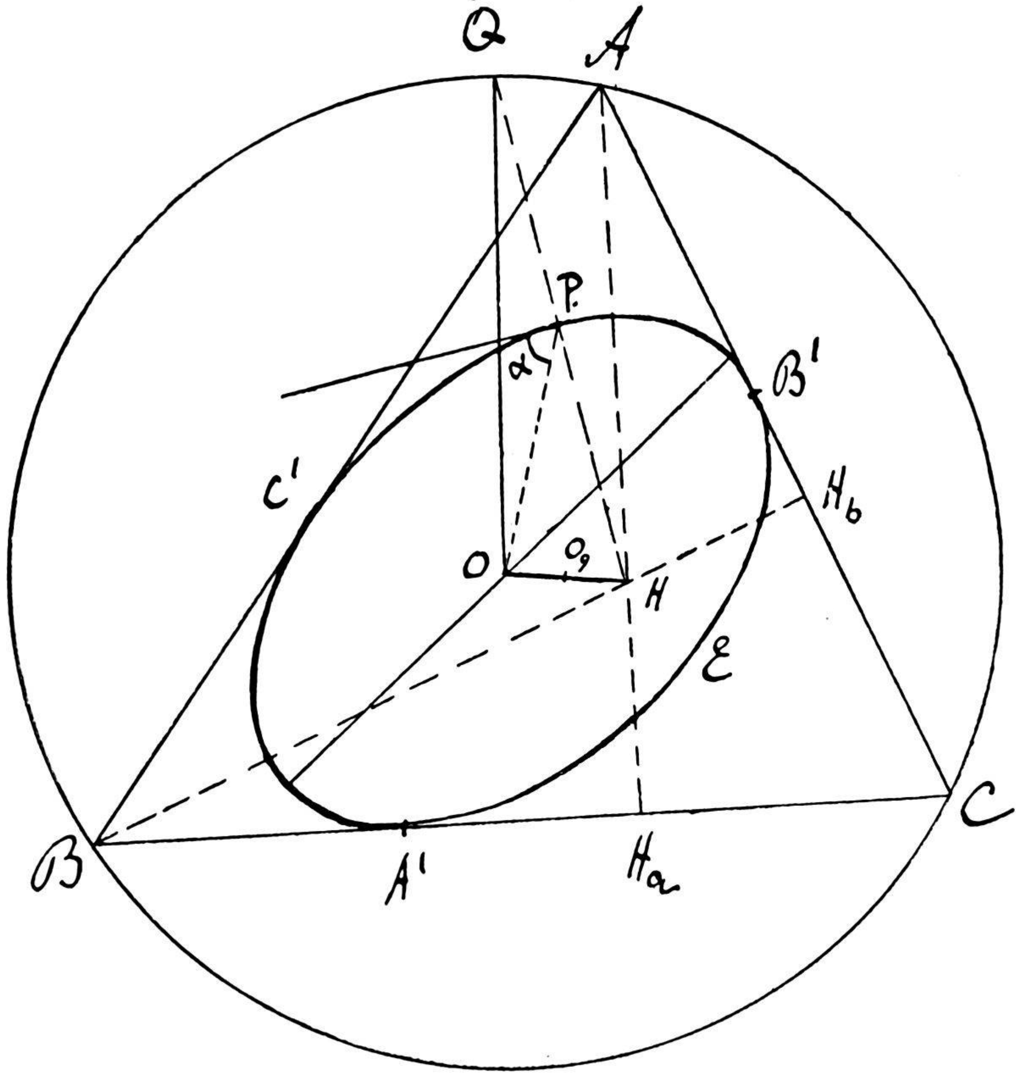
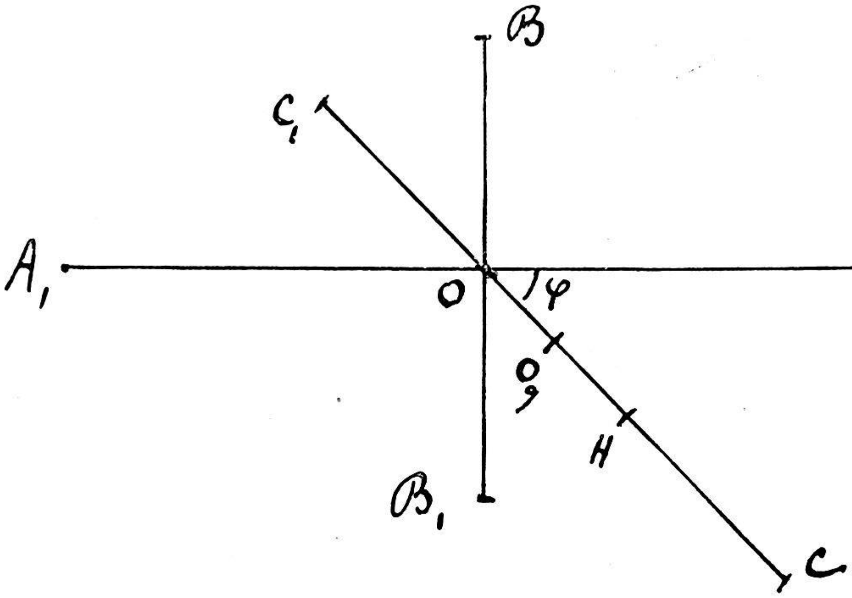
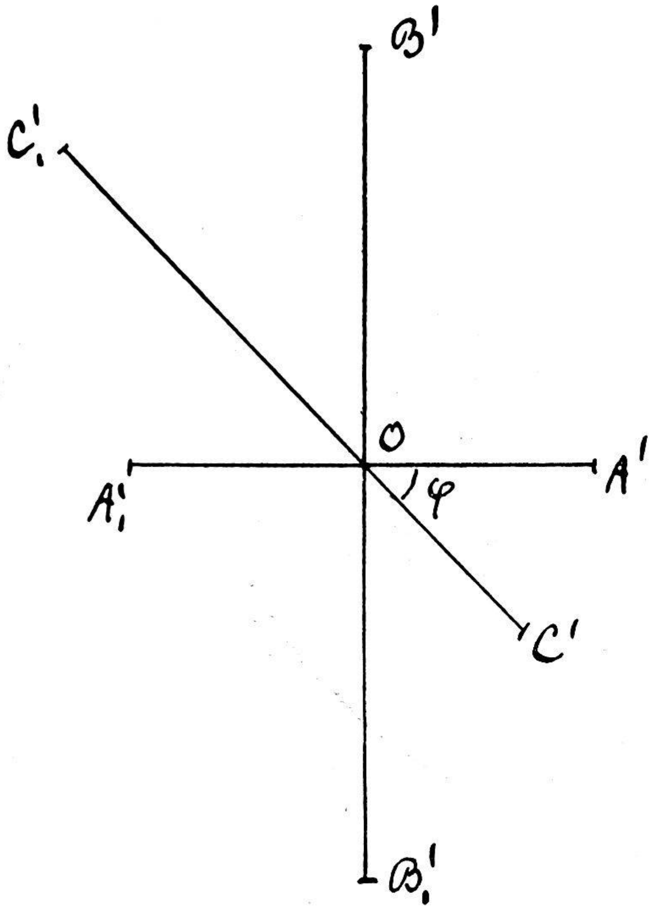


Figure 3a.



(3')

Figure 3b.



(3")

Figure 4.

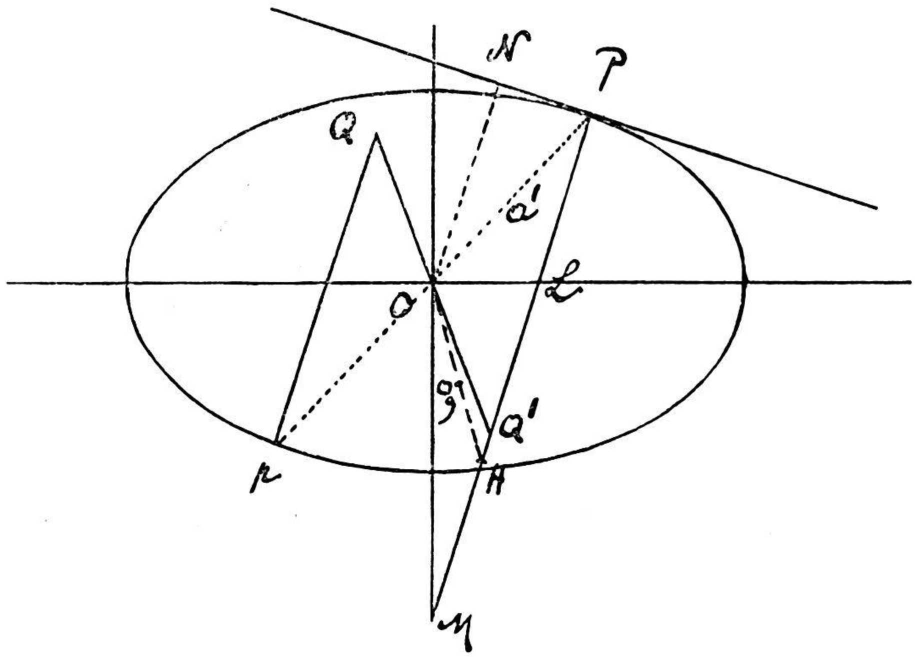


Figure 5.

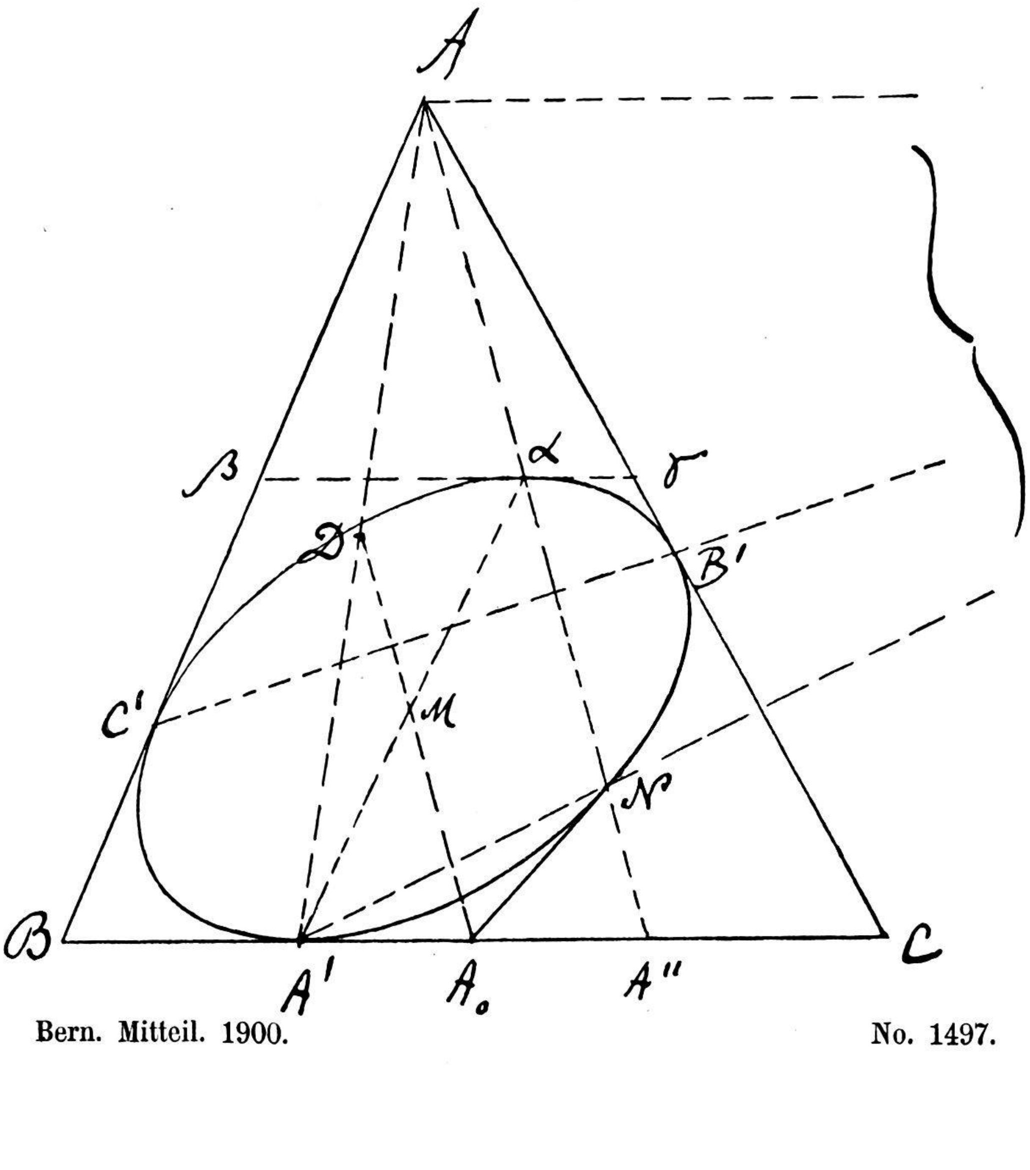


Figure 6.

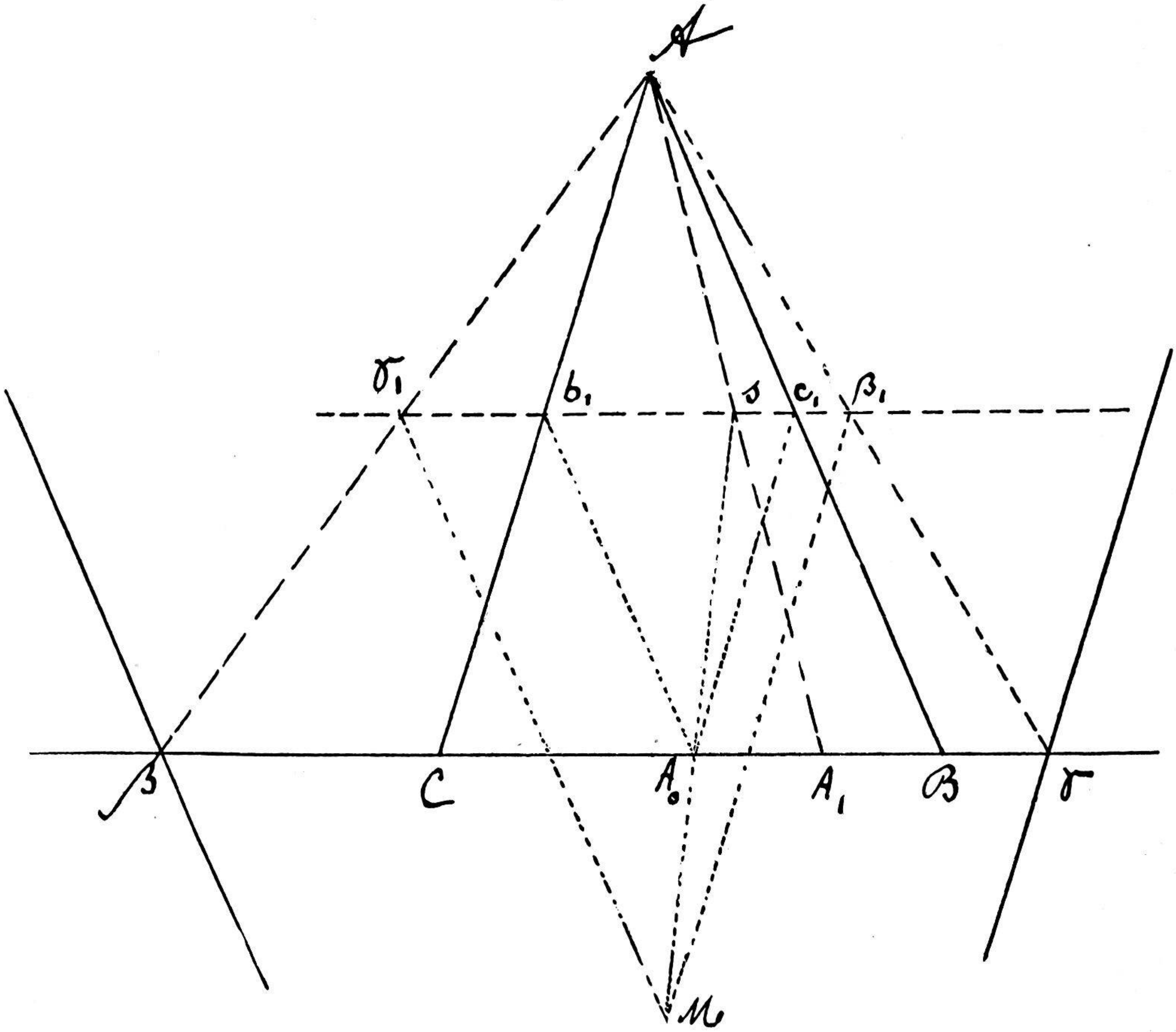


Figure 7.