Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1902)

Heft: 1519-1550

Artikel: Konstruktionen gleichschenkliger Dreiecke mit Hilfe von Kurven höherer Ordnung

Autor: Krebs, A.

Kapitel: VII

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319122

Wir führen den Wert von x aus (2) in (1) ein und erhalten

$$y^4 + 2by^3 + \frac{3b^4 - 2b^2c^2 + 2c^4}{2b^2}y^2 + \frac{b^3 - 2bc^2}{2}y + \frac{b^4 - 4b^2c^2}{16} = 0. \quad (5)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung 4. Grades in y sind die Ordinaten der Schnittpunkte D. Die kubische Hilfsgleichung dazu erscheint in der Form

$$v^3 - \frac{c^4(4b^4 - 2b^2c^2 + c^4)}{3b^4}v - \frac{c^6(16b^6 + 15b^4c^2 - 6b^2c^4 + 2c^6)}{27b^6} = 0.$$

Als Diskriminante erhält man

$$\Delta = \frac{c^{14}(32b^4 - 13b^2c^2 + 4c^4)}{27b^6}.$$

Es wird $\Delta = 0$ nur für $c = 0$ wie beim ersten Verfahren. Auch hier giebt es die beiden gleichen Hauptfälle, nämlich

A. $\Delta = 0$ für $c = 0$.

Wir erhalten wie beim ersten Verfahren 4 zusammenfallende rechtwinklige Dreiecke; denn in Gleichung (5) wird $y = -\frac{b}{2}$ 4mal.

B. $\Delta = \text{pos.}$ für $c \neq 0$.

Für jeden von 0 verschiedenen Wert von c liefert Gleichung (5) 2 reelle Wurzeln und damit 2 reelle Dreiecke, also dasselbe Ergebnis wie beim ersten Verfahren. Setzt man in Gleichung (5) Spezialwerte ein

$y = 0$ für das unendlich kleine Dreieck,

$y = \pm\frac{b}{2}$ » » rechtwinklige »

$y = \pm\frac{b}{4}$ » » gleichseitige »

so erhält man die nämlichen Werte für c wie auf Seite 143.

VII.

§ 20. *Siebente Aufgabe: Konstruktion des gleichschenkligen Dreieckes, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Schenkel und dem an die Basis angrenzenden Schenkelabschnitt gegeben sind.*

Gegeben: 1. b,

2. $s \pm m = \pm c$.

Bedingungen: 1. $s + m \geqq b\sqrt{2}$,

2. $m - s \leqq \pm \frac{b}{2}$.

Sie Summe $s + m$ ist ein Minimum beim rechtwinkligen Dreieck, und da ist $s = m = \frac{b}{2}\sqrt{2}$. $m - s$ erreicht den Maximalwert $\frac{b}{2}$ bei einem unendlich kleinen Dreieck und nimmt mit wachsendem h_b stetig ab. So lange das Dreieck noch stumpfwinklig ist, bleibt $m - s$ noch positiv. $m - s$ wird zu 0 beim rechtwinkligen und negativ beim spitzwinkligen Dreieck und kann hier dann jeden Wert von 0 bis $-\infty$ annehmen.

§ 21. *Erstes Lösungsverfahren: Bestimmung der Punkte B.*

a) Konstruktion der Hilfskurve. Taf. III, Fig. 12.

Es sei $OA = b$ die Basis des Dreiecks. Wir ziehen den Grundkreis, die Mittelsenkrechte MM_1 und einen Hilfskreis um O mit dem Radius $r = c$. Ein Strahl durch O schneide den Grundkreis in Q und den Hilfskreis in H und H_1. Nun tragen wir auf dem Strahl OQ von O aus die Strecken QH und QH_1 jede nach beiden Seiten ab, machen also

$$OP_1 = OP_3 = QH \text{ und}$$
$$OP_2 = OP_4 = QH_1.$$

Für die Punkte P_1 und P_3 gilt die Relation:

1. $OQ + OP_{1,3} = OQ + HQ = OH = c$, während die Punkte P_2 und P_4 die Bedingung erfüllen: 2. $OP_{2,4} - OQ = QH_1 - QO = OH_1 = c$. Dreht sich der Strahl OQ um O, so beschreiben die Punkte P_1 und P_4 eine Kurve und die Punkte P_3 und P_2 das Spiegelbild derselben in Bezug auf die y-Axe. Die Schnittpunkte beider Kurven mit der Mittelsenkrechten ergeben die zunächst gesuchten Punkte B; denn für einen solchen Kurvenpunkt P ist

$OP = OB = s$ und $OQ = OD = m$, und die oben stehenden Relationen werden

$m + s = c$ oder $s - m = c$. Wir haben eine Lösung.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Es seien x und y die rechtwinkligen Koordinaten eines Kurvenpunktes P_2 im gewohnten Koordinatensystem; dann gilt:

$$OP_2 = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (\alpha)$$

Nun ist $OP_2 = H_1Q = OQ + OH = b\cos\varphi + c$, sub. in (α)

$b\cos\varphi + c = \sqrt{x^2 + y^2}$, umgeformt

$$(x^2 + y^2 - bx)^2 - c^2(x^2 + y^2) = 0. \qquad (1)$$

Die Punkte dieser Kurve genügen der Relation

$$s - m = \pm c.$$

Für die Relation: $s + m = c$ bekommt die Gleichung die etwas abweichende Form

$$(x^2 + y^2 + bx)^2 - c^2(x^2 + y^2) = 0. \qquad (2)$$

Die Kurven (1) und (2) sind symmetrisch zueinander gelegen in Bezug auf die y-Axe. Die Gleichung der Kurve, die alle Schnittpunkte B liefert, ist die unächte Kurve 8. Ordnung:

$$[(x^2 + y^2 + bx)^2 - c^2(x^2 + y^2)]\,[(x^2 + y^2 - bx)^2 - c^2(y^2 + x^2)] = 0. \qquad (3)$$

Unser symmetrisches Kurvenpaar besteht aus 2 *Kreiskonchoiden.* Für beide ist die x-Axe Symmetrieaxe. Bei positivem bx liegt die Kurve mehr auf der negativen Seite, bei negativem bx mehr auf der positiven Seite der x-Axe. Ist $c \gtreqless b$, so ist für beide Konchoiden der Punkt O isolierter Punkt, Rückkehrpunkt oder Doppelpunkt. Für $c = 0$ zerfällt jede Konchoide in 2 sich deckende Kreise. Die beiden Kreispaare berühren sich in O und haben in der y-Axe eine gemeinsame Tangente.

c) *Die Lösungen.*

Wir suchen zunächst die Schnittpunkte B der Kurve mit der Mittelsenkrechten. Dabei handelt es sich nur noch um die Bestimmung der Ordinaten dieser Punkte. Lösen wir das bekannte Gleichungssystem nach y auf, so finden wir

1. $y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2c^2 - 3b^2 \pm 2c\sqrt{c^2 - 2b^2}}$, wenn $bx = \text{pos.}$ (4)

und 2. $y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + 2c^2 \pm 2c\sqrt{c^2 + 2b^2}}$, wenn $bx = \text{neg.}$ (5)

Wir bekommen hier 2 gesonderte Lösungsgruppen.

Erste Gruppe für Formel (4).

A. $c > \frac{3b}{2}$.

2 reelle Wurzeln für y für das positive Zeichen der innern Wurzel; 2 symmetrische spitzwinklige Dreiecke.

$$\text{B.}\quad \frac{3b}{2} \geqq c \geqq b\sqrt{2}.$$

4 reelle Wurzeln für y, welche paarweise absolut gleich sind; 4 wirkliche Dreiecke, welche paarweise symmetrisch sind.

$$1.\quad c = \frac{3b}{2}.$$

$$y_{1,2} = \pm \frac{b}{2}\sqrt{3} \quad \text{und} \quad y_{3,4} = 0.$$

2 gleichseitige Dreiecke, bedingt durch das positive Zeichen der innern Wurzel und 2 unendlich kleine, bedingt durch das negative Zeichen der innern Wurzel.

$$2.\quad \frac{3b}{2} > c > b\sqrt{2};\ \text{Fig. 12, Taf. III, Kurve II.}$$

Das positive Zeichen der innern Wurzel erzeugt 2 spitzwinklige, das negative Zeichen 2 stumpfwinklige Dreiecke. Mit abnehmendem c werden die spitzwinkligen immer weniger spitzwinklig und die stumpfwinkligen weniger stumpfwinklig.

$$3.\quad c = b\sqrt{2};$$

$$y = \pm \frac{b}{2} \ \text{je 2mal.}$$

Die Kurve berührt von der negativen Seite her die Mittelsenkrechte in den 2 Punkten $\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$ und $\left(\frac{b}{2}, -\frac{b}{2}\right)$. 4 rechtwinklige Dreiecke, welche paarweise sich decken und paarweise symmetrisch sind.

$$\text{C.}\quad c < b\sqrt{2}.$$

Alle y-Werte sind imaginär, daher keine reellen Lösungen.

Alle Dreiecke der ersten Lösungsgruppe erfüllen die Bedingung $s + m = c$.

Für den Flächeninhalt derselben bekommen wir die allgemeine Formel:

$$F = \frac{b}{4}\sqrt{2c^2 - 3b^2 \pm 2c\sqrt{c^2 - 2b^2}}. \tag{6}$$

Zweite Gruppe für Formel (5).

A. $c > \frac{b}{2}$. Fig. 12, Kurve I.

2 reelle Wurzeln für y und 2 imaginäre, letztere für das negative Zeichen der innern Wurzel. 2 symmetrische spitzwinklige Dreiecke, deren Basiswinkel $> 60^{\circ}$.

B. $c \leqq \frac{b}{2}$.

4 reelle Wurzeln für y, daher 4 reelle Lösungen, welche paarweise symmetrisch sind.

1. $c = \frac{b}{2}$, Grenzfall.

Für das positive Zeichen der innern Wurzel wird $y = \pm \frac{b}{2}\sqrt{3}$, bedingt 2 gleichseitige Dreiecke. Für das negative Zeichen der innern Wurzel wird $y = \pm 0$, was 2 unendlich kleine Dreiecke zur Folge hat.

2. $\frac{b}{2} > c > 0$.

2 spitzwinklige Dreiecke für das positive und 2 stumpfwinklige für das negative Vorzeichen der innern Wurzel. Mit abnehmendem c nähern sich beide Formen dem rechtwinkligen Dreieck.

3. $c = 0$.

Die Kurve ist der doppelte gelegte Kreis $x^2 - bx + y^2 = 0$, welcher die Mittelsenkrechte in den Punkten $\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$ und $\left(\frac{b}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ schneidet; 4 rechtwinklige Dreiecke wie oben unter B_3.

Sämtliche Dreiecke dieser Gruppe genügen der Relation

$$s - m = \pm c.$$

Ihre Inhaltsformel lautet:

$$F = \frac{b}{4}\sqrt{b^2 + 2c^2 \pm 2c\sqrt{2b^2 + c^2}}. \tag{7}$$

§ 22. *Zweites Lösungsverfahren: Bestimmung der Schnittpunkte D.*

Die Voraussetzungen sind dieselben wie in § 20.

Wir referieren über diesen Fall in gedrängter Kürze.

Analog dem ersten Verfahren erhalten wir als Hilfskurve eine unächte Kurve 8. Ordnung. Dieselbe hat die Form

$$\left[(x^2+y^2)\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-c^2x^2\right]\left[(x^2+y^2)\left(x-\frac{b}{2}\right)^2-c^2x^2\right]=0. \quad (8)$$

Die Kurve besteht aus 2 *Konchoiden des Nikomedes.* Für beide ist die x-Axe Symmetrieaxe. Die Konchoide des Klammerausdrucks links hat die Gerade $x=-\frac{b}{2}$, diejenige des Klammerausdrucks rechts die Gerade $x=\frac{b}{2}$ zur Leitlinie.

Bei den Lösungen handelt es sich um die Bestimmung der Koordinaten der Schnittpunkte D der Konchoiden mit dem Grundkreis. Für die Abscisse x erhalten wir die Bestimmungsgleichung

$$bx\left(x\pm\frac{b}{2}\right)^2-c^2x^2=0; \text{ daraus folgt}$$

$$x=\frac{c^2\pm b^2\pm c\sqrt{c^2\pm 2b^2}}{2b};$$

für das positive Zeichen im Ausdruck $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$ wird

$$x=\frac{c^2-b^2\pm c\sqrt{c^2-2b^2}}{2b}. \quad (9)$$

Alle diesbezüglichen Lösungen entsprechen der Relation:

$$s+m=c.$$

Führen wir den Wert für x aus (9) in der Gleichung des Grundkreises ein, so erhält man für die Ordinate y des Punktes D den Ausdruck:

$$y=\pm\frac{1}{2b}\sqrt{6b^2c^2-3b^4-2c^4\pm 2c(2b^2\mp c^2)\sqrt{c^2-2b^2}}. \quad (10)$$

Nun besteht die Proportion:

$$y:x=h_b:\frac{b}{2}.$$

Setzen wir hierin für x und y die gefundenen Werte ein und lösen nach h_b auf, so finden wir:

$$h_b = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2c^2 - 3b^2 \pm 2c\sqrt{c^2 - 2b^2}}. \tag{11}$$

Für das negative Zeichen im Ausdruck $\left(x \pm \frac{b}{2}\right)^2$ erlangt die Abscisse x von D den Wert

$$x = \frac{c^2 + b^2 \pm c\sqrt{c^2 + 2b^2}}{2b} \tag{12}$$

und die Ordinate y den Wert

$$y = \pm \frac{1}{2b} \sqrt{b^4 - 2b^2c^2 - 2c^4 \mp 2c^3\sqrt{c^2 + 2b^2}}. \tag{13}$$

Alle diesbezüglichen Lösungen erfüllen die Bedingung:

$$s - m = \pm c.$$

Für die Basishöhe dieser Dreiecke finden wir auf ähnliche Weise wie oben den Wert

$$h_b = \pm \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + 2c^2 \pm 2c\sqrt{c^2 + 2b^2}}. \tag{14}$$

Vergleichen wir (11) mit (4) und (14) mit (5), so finden wir vollkommene Übereinstimmung in den Ergebnissen beider Auflösungsmethoden.

VIII.

§ 23. *Achte Aufgabe. Konstruktion eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Schenkelhöhe und dem der Basis angrenzenden Schenkelabschnitt gegeben sind.*

Gegeben: 1. b,
2. $h_s \pm m = \pm c =$ konstant.

Bedingungen: 1. $b\sqrt{2} \gtreqless (h_s + m) \geq b$;
2. $b \gtreqless (h_s - m) \geq -b$.

Im rechtwinkligen Dreieck ist $h_s + m = b\sqrt{2} =$ Maximum; denn da ist $h_s = m = \frac{b}{2}\sqrt{2}$. In diesem Fall ist nun $h_s + m = \sqrt{b}\left\{\sqrt{\frac{b}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}}\right\}$. Ist das Dreieck nicht rechtwinklig, so ist $h_s + m = \sqrt{b}\left\{\sqrt{\left(\frac{b}{2} + a\right)} + \sqrt{\left(\frac{b}{2} - a\right)}\right\}$. Es ist aber bekanntlich $\left(\sqrt{\frac{b}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}}\right) > \left(\sqrt{\left(\frac{b}{2} + a\right)} + \sqrt{\left(\frac{b}{2} - a\right)}\right)$.