Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze

Autor(en): **Pexider, J.V.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1906)**

Heft 1609-1628

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-319159

J. V. Pexider.

Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze.

(Eingereicht im Jan. 1906).

I.

Die Anzahl aller Primzahlen, welche kleiner, höchstens gleich sind der positiven reellen Zahl x, sei — wie üblich — mit ψ (x) bezeichnet.

Die Anzahl aller positiven ganzen Zahlen, die den Teiler 2 haben und $\leqq$ x sind, beträgt

$$\sigma_2 = \left[\frac{x}{2}\right],$$

wobei die eckige Klammer das Gauss'sche Funktionszeichen für die zahlentheoretische Funktion E (x) bedeutet, also unter [x] die grösste in x enthaltene ganze Zahl verstanden wird.

Sei ferner der Kürze halber

$$\varDelta\left[\frac{n}{\mu}\right] = \left[\frac{n}{\mu}\right] - \left[\frac{n-1}{\mu}\right]$$

gesetzt; dann ist stets $\varDelta\left[\frac{n}{\mu}\right]$ gleich 1 oder 0, je nachdem $n \equiv 0$ oder $n \not\equiv 0$ ist nach dem Modul μ, also je nachdem μ ein Teiler von n ist oder nicht; demzufolge hat die Differenz

$$1 - \varDelta\left[\frac{n}{\mu}\right]$$

den Wert 0 oder 1, jenachdem μ ein Teiler von n ist oder nicht.

Die Anzahl aller ganzen positiven Zahlen, die durch 3 teilbar und $\leqq$ x sind, beträgt $\left[\frac{x}{3}\right]$; unter diesen sind aber — der Bedeutung des Zeichens $\varDelta$ gemäss —

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{3}\right]} \varDelta\left[\frac{3k}{2}\right]$$

Zahlen durch 2 teilbar. Mithin ist

$$\sigma_3 = \left[\frac{x}{3}\right] - \sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{3}\right]} \varDelta \left[\frac{3\,k}{2}\right]$$

die Anzahl aller Zahlen, die den Teiler 3 aber nicht den Teiler 2 haben und $\leqq$ x sind.

Allgemein gibt der Ausdruck

$$\sigma_\alpha = \left[\frac{x}{\alpha}\right] - \sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]} \varDelta \left[\frac{\alpha\,k}{2}\right] - \sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]} \varDelta \left[\frac{\alpha\,k}{3}\right] \left\{1 - \varDelta \left[\frac{\alpha\,k}{2}\right]\right\} - \cdots$$

$$- \sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]} \varDelta \left[\frac{\alpha\,k}{\alpha - 1}\right] \left\{1 - \varDelta \left[\frac{\alpha\,k}{\alpha - 2}\right]\right\} \left\{1 - \varDelta \left[\frac{\alpha\,k}{\alpha - 3}\right]\right\} \cdots \left\{1 - \varDelta \left[\frac{\alpha\,k}{2}\right]\right\}$$

die Anzahl derjenigen Zahlen an, welche durch α teilbar sind, aber nicht teilbar durch $\alpha - 1$, $\alpha - 2, \cdots 2$, und sämtlich $\leqq$ x sind. Denn von der Anzahl $\left[\frac{x}{\alpha}\right]$, welche die Anzahl aller durch α teilbaren Zahlen $\leqq$ x angibt, ist zuerst die Anzahl aller derjenigen unter ihnen abgezogen worden, die zugleich durch 2 teilbar sind und deren Anzahl

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]} \varDelta \left[\frac{\alpha\,k}{2}\right]$$

beträgt, dann die Anzahl derjenigen unter ihnen, welche durch 3 aber nicht durch 2 teilbar sind und deren Anzahl (mit Berücksichtigung des früher Gesagten)

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]} \varDelta \left[\frac{\alpha\,k}{3}\right] \left\{1 - \varDelta \left[\frac{\alpha\,k}{2}\right]\right\}$$

beträgt, u. s. w.

Sei nun kurz

$$\varDelta \left[\frac{\alpha\,k}{\mu}\right] = \delta_\mu$$

geschrieben; hiernach verwandelt sich der Ausdruck für σ_α in den einfachen

$$\sigma_\alpha = \left[\frac{x}{\alpha}\right] + \sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]} \left\{ -1 + (1-\delta_2)(1-\delta_3)\cdots(1-\delta_{\alpha-1}) \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]} \prod_{\mu=2}^{\alpha-1} \left\{ 1 - \delta_\mu \right\}.$$

Weiter bedeute

$$\nu = \left[\sqrt{x}\right].$$

Alsdann gibt, da jede zusammengesetzte Zahl einen Teiler $< \left[\sqrt{x}\right]$ besitzt, wenn sie einen solchen $> \left[\sqrt{x}\right]$ aufweist, die Summe

$$\sum_{\alpha=2}^{\nu} \sigma_\alpha$$

die Anzahl aller Zahlen der Form $\alpha \cdot \beta \leqq [x]$, wobei $\alpha = 2, 3, \cdots k, \cdots \left[\sqrt{x}\right]$ und $\beta = 1, 2, 3, \cdots \left[\frac{x}{k}\right]$ bedeuten, an, d. h. die Anzahl aller zusammengesetzten Zahlen $\leqq$ x und aller Primzahlen $\leqq \left[\sqrt{x}\right]$, die Einheit n i c h t mitgerechnet. Der Ausdruck

$$[x] - 1 - \sum_{\alpha=2}^{\nu} \sigma_\alpha$$

gibt also die Anzahl aller Primzahlen $\leqq$ x, aber $> \left[\sqrt{x}\right]$ an, d. h. es ist

$$[x] - 1 - \sum_{\alpha=2}^{\nu} \sigma_\alpha = \psi(x) - \psi\left(\sqrt{x}\right),$$

wobei
$$\sigma_2 = \left[\frac{x}{2}\right],$$

$$\sigma_\alpha = \sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]} \prod_{\mu=2}^{\alpha-1} \left\{ 1 - \left[\frac{\alpha k}{\mu}\right] + \left[\frac{\alpha k - 1}{\mu}\right] \right\}$$

für $\alpha = 3, 4, 5, \cdots \nu = [\sqrt{x}]$ bedeutet.

Nun hat aber in dem Produkte hinter dem Summenzeichen des Ausdruckes

$$\sigma_{2\beta} = \sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{2\beta}\right]} \left\{ \left(1 - \left[\frac{2\beta k}{2}\right] + \left[\frac{2\beta k - 1}{2}\right] \right) \prod_{\mu=3}^{2\beta-1} \left(1 - \delta_\mu \right) \right\}$$

der erste Faktor für jedes $\beta > 1$ den Wert

$$1 - \beta k + \beta k - 1 = 0,$$

voraus allgemein

$$\sigma_{2\beta} = 0$$

folgt. Überhaupt ist

$$\sigma_z = 0$$

sobald z eine zusammengesetzte Zahl bedeutet; dies folgt unmittelbar aus der früher gegebenen Bedeutung der Summe σ_α von selbst. In der Summe $\Sigma\sigma_\alpha$ erhält man hiernach für σ_α nur dann einen von Null verschiedenen ganzzahligen Wert, wenn α einen Primzahlwert annimmt.

Man kann die Werte σ_3 und σ_5 auf einfache Art ausrechnen und zwar findet man

$$\text{(1)} \qquad \sigma_3 = \left[\frac{x+3}{6}\right] \quad \text{für} \quad \sqrt{x} \geqq 3$$

und

$$\text{(2)} \qquad \sigma_5 = 1 + \left[\frac{x-5}{30}\right] + \left[\frac{x+5}{30}\right] \quad \text{für} \quad \sqrt{x} \geqq 5,$$

so dass sich unter der Voraussetzung $\sqrt{x} \geqq 5$ auch schreiben lässt

$$\text{(3)} \qquad \psi(x) - \psi(\sqrt{x}) = \left[\frac{x-3}{2}\right] - \left[\frac{x+3}{6}\right] - \left[\frac{x-5}{30}\right] - \left[\frac{x+5}{30}\right] - \sum_{\alpha=7,9,\ldots}^{[\sqrt{x}]} \sigma_\alpha .$$

Man setze schliesslich

$$\psi(x) - \psi(\sqrt{x}) = \Psi(x);$$

dann ist offenbar

$$\psi(x) = \Psi(x) + \Psi(x_1) + \Psi(x_2) + \cdots + \Psi(x_{\tau-1}) + 1,$$

wobei

$$x_k = \left[x^{\frac{1}{2^k}}\right]$$

bedeutet und worin die ganze Zahl τ so bestimmt werden muss, dass

$$1 < x^{\frac{1}{2^\tau}} < 2$$

wird, damit die Bedingung

$$\left[x^{\frac{1}{2^\tau}}\right] = 1$$

erfüllt sei.

Aus der Beziehung $x^{\frac{1}{2^\tau}} < 2$ bestimmt sich die Zahl τ, wie folgt: es muss die Ungleichung

$$\tau > \frac{\lg\left(\frac{\lg x}{\lg 2}\right)}{\lg 2}$$

befriedigt werden und τ selbst die nächstgrösste ganze Zahl sein, d. h. τ hat den Wert

$$\tau = \left[\frac{\lg\left(\frac{\lg x}{\lg 2}\right)}{\lg 2}\right] + 1.$$

So ist z. B. für $x = 1.000000$ die Zahl $\tau = 5$ und

$$x_1 = 1000,\ x_2 = 31,\ x_3 = 5,\ x_4 = 2,\ \Psi(x_4) = 1,$$

so dass

$$\psi(1000\,000) = \Psi(1000\,000) + \Psi(1000) + \Psi(31) + \Psi(5) + 2.$$

Für alle Zahlen $4 \leqq x < 9$ ist

$$\Psi(x) = [x] - 1 - \sigma_2 = \left[\frac{x-1}{2}\right] = \Psi_2,$$

da $\sigma_2 = \left[\frac{x}{2}\right]$ ist und $\left[\sqrt{x}\right] = 2$ wird, und demzufolge ist die Anzahl der Primzahlen selbst durch den Ausdruck

$$\psi(x) = \left[\frac{x+3}{2}\right]$$

gegeben; für alle Zahlen x, die der Bedingung $9 \leqq x < 25$ genügen, ist

$$\Psi(x) = \Psi_2 - \sigma_3 = \left[\frac{x-1}{2}\right] - \left[\frac{x+3}{6}\right] = \Psi_3$$

und somit

$$\psi(x) = \left[\frac{x+3}{2}\right] - \left[\frac{x-3}{6}\right];$$

für die weitere Gruppe von Zahlen $25 \leqq x < 49$ erhält man

$$\Psi(x) = \Psi_3 - \sigma_5 = \left[\frac{x-3}{2}\right] - \left[\frac{x+3}{6}\right] - \left[\frac{x-5}{30}\right] - \left[\frac{x+5}{30}\right] = \Psi_5$$

und für $\psi(x)$ den Ausdruck

$$\psi(x) = \left[\frac{x+3}{2}\right] - \left[\frac{x-3}{6}\right] - \left[\frac{x-5}{30}\right] - \left[\frac{x+5}{30}\right].$$

So ist z. B. für $x = 48$

$$\psi(48) = 25 - (7 + 1 + 1) = 16$$

und die zugehörige Gruppe von Primzahlen die Zahlenreihe

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

II.

Es bietet keine Schwierigkeit mit Hilfe der zahlentheoretischen Funktionen $E(x)$ und $\Delta(x)$ andere Ausdrücke für die Funktion $\psi(x)$ aufzustellen.

Wenn die ganze positive Zahl $\alpha > 2$ durch keine kleinere ganze Zahl > 1 teilbar ist, so ist sie eine Primzahl; alsdann ist der Ausdruck

$$1 - \Delta\left[\frac{\alpha}{\mu}\right]$$

stets gleich 1 für $\mu = 2, 3, 4, \cdots \alpha - 1$ und demzufolge auch das Produkt

$$\prod_{\mu=2}^{\alpha-1}\left\{1 - \Delta\left[\frac{\alpha}{\mu}\right]\right\}, \quad \alpha > 2.$$

Ist aber α keine Primzahl, so ist mindestens ein Faktor des Produktes Π gleich Null, indem dann die Funktion Δ mindestens einmal den Wert 1 erhält. Das Produkt Π hat also nur dann einen von Null verschiedenen Wert und zwar den Wert Eins, wenn α eine ungerade Primzahl ist. Rechnet man nun für die Primzahlen 1 und 2 dem Produkte Π die Zahl 2 zu, so gibt der Ausdruck

$$\psi(x) = 2 + \sum_{\alpha=3}^{[x]} \prod_{\mu=2}^{\alpha-1} \left\{ 1 - \Delta\left[\frac{\alpha}{\mu}\right] \right\} \tag{4}$$

die Anzahl aller Primzahlen $\leqq [x]$, die Einheit inbegriffen, an.

Damit α eine Primzahl sei, genügt es jedoch, dass sie keinen Teiler $\leqq [\sqrt{\alpha}]$ besitze; mit Rücksicht darauf erhält man für die Funktion $\psi(x)$ auch den Ausdruck

$$\psi(x) = 2 + \sum_{\alpha=3}^{[x]} \prod_{\mu=2}^{[\sqrt{\alpha}]} \left\{ 1 - \Delta\left[\frac{\alpha}{\mu}\right] \right\}. \tag{5}$$

Zwischen den Gliedern dieser zwei nur formal verschiedenen Summen (4) und (5) findet selbstverständlich die Beziehung

$$\prod_{\mu=2}^{\alpha-1} \left\{ 1 - \Delta\left[\frac{\alpha}{\mu}\right] \right\} = \prod_{\mu=2}^{[\sqrt{\alpha}]} \left\{ 1 - \Delta\left[\frac{\alpha}{\mu}\right] \right\}$$

statt.

Werden aber diejenigen Primzahlen, die kleiner oder höchstens gleich $\sqrt{x}$ sind, als bekannt vorausgesetzt, so lassen sich die hier abgeleiteten Formeln für $\psi(x)$ vereinfachen.

Es seien $p_1, p_2, p_3, \ldots p_a$ alle Primzahlen 1, 2, 3, 5, ... der Grösse nach geordnet, welche $\leqq \sqrt{\alpha}$ sind; sie sind stets in der Reihe der Primzahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots p_\omega \leqq [\sqrt{x}]$ enthalten, indem α die Werte 3, 4, 5, ... $[x]$ durchläuft, d. h. sie sind nun, der Voraussetzung nach, sämtlich bekannte Grössen. Demzufolge wird

$$\prod_{\mu=2}^{[\sqrt{\alpha}]} \left\{ 1 - \Delta\left[\frac{\alpha}{\mu}\right] \right\} = \prod_{\mu=2}^{a} \left\{ 1 - \Delta\left[\frac{\alpha}{p_\mu}\right] \right\},$$

und die Formel (5) übergeht in die folgende

$$\psi(x) = \psi(\sqrt{x}) + \sum_{\alpha=[\sqrt{x}]+1}^{[x]} \prod_{\mu=2}^{a} \left\{ 1 - \Delta\left[\frac{\alpha}{p_\mu}\right] \right\}.$$

Der Ausdruck (3) erfährt unter diesen Umständen die folgende Umgestaltung. Vorerst wird, indem $\sigma_z = 0$ ist für jede zusammengesetzte Zahl z,

$$\Psi(x) + 1 = [x] - \left[\frac{x}{2}\right] - \sum_{a=3}^{\omega} \sigma(p_a),$$

wobei p_ω die grösste Primzahl bedeuten soll, die der Bedingung, kleiner oder höchstens gleich $\sqrt{x}$ zu sein, genügt; des weiteren ist offenbar

$$\prod_{\mu=2}^{p_a - 1} (1 - \delta_\mu) = \prod_{\mu=2}^{a-1} \left\{ 1 - \delta(p_\mu) \right\},$$

weil die nach p_a nächst kleinere Primzahl eben p_{a-1} ist. Man erhält so

$$\sigma(p_a) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{p_a}\right]} \prod_{\mu=2}^{a-1} \left\{ 1 - \delta(p_\mu) \right\}$$

und für die Anzahl $\Psi(x)$ schliesslich die Relation

$$\Psi(x) + 1 = [x] - \left[\frac{x}{2}\right] - \sum_{a=3}^{\omega} \sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{p_a}\right]} \prod_{\mu=2}^{a-1} \left\{ 1 - \varDelta \left[\frac{p_a k}{p_\mu}\right] \right\}. \tag{6}$$

In diesem Falle lässt sich leicht zeigen, dass der Jonquièressche Satz über die Anzahl von Primzahlen zwischen $\sqrt{x}$ und x eine Folge dieser letzten Formel ist.

Denn, bedient man sich der Kürze wegen statt $\varDelta\left[\frac{p_a k}{p_\mu}\right]$ des Zeichens δ_μ, so ist

$$\sigma(p_a) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{p_a}\right]} \left\{ 1 - \sum_{\mu=2}^{a-1} \delta_\mu - \sum_{\mu.\mu'} \delta_\mu \delta_{\mu'} - \sum_{\mu.\mu'.\mu''} \delta_\mu \delta_{\mu'} \delta_{\mu''} + \cdots \right.$$
$$\left. + (-1)^a \delta_2 \delta_3 \cdots \delta_{a-1} \right\},$$

wobei in den Summen nur Kombinationen verschiedener μ zu nehmen sind.

Nun hat aber das Produkt $\delta_\mu\, \delta_{\mu'} \cdots \delta_{\mu^{(k)}}$ stets den Wert 1, wenn in der Reihe der Zahlen $p_a, 2p_a, 3p_a, \cdots \leqq x$ die Zahl kp_a nicht durch $p_\mu\, p_{\mu'} \cdots p_{\mu^{(k)}}$ teilbar ist, wobei jedes $p_\mu < p_a$ ist. Die Anzahl aller solchen Zahlen beträgt aber offenbar

$$\left[\left[\left[\left[\left[\frac{x}{p_a}\right] : p_\mu\right] : p_{\mu'}\right] : \cdots\right] : p_{\mu^{(k)}}\right] = \left[\frac{x}{p_\mu\, p_{\mu'} \cdots p_{\mu^{(k)}} p_a}\right],$$

so dass
$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{p_a}\right]} \delta_\mu\, \delta_{\mu'} \cdots \delta_{\mu^{(k)}} = \left[\frac{x}{p_\mu \cdots p_{\mu^{(k)}}\, p_a}\right],$$

ist. Für die Summe $\sigma(p_a)$ ergibt sich hiernach der Ausdruck

$$\sigma(p_a) = \left[\frac{x}{p_a}\right] - \sum_\mu \left[\frac{x}{p_\mu\, p_a}\right] + \sum_{\mu\,\mu'} \left[\frac{x}{p_\mu p_{\mu'}\, p_a}\right] - \cdots$$
$$+ (-1) \left[\frac{x}{p_2\, p_3 \cdots p_a}\right]$$

und durch Summation über alle a von $a = 3$ bis $a = \omega$ und nach Addition von $\left[\frac{x}{2}\right]$ zu der so entstandenen Summe die Reihe von Reihen

$$\left[\frac{x}{2}\right] + \sum_{a=3}^{\omega} \sigma(p_a)$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{x}{2}\right] \qquad\qquad (7)\\
&+ \left[\frac{x}{3}\right] - \left[\frac{x}{2.3}\right]\\
&+ \left[\frac{x}{5}\right] - \left[\frac{x}{2.5}\right] - \left[\frac{x}{3.5}\right] + \left[\frac{x}{2.3.5}\right]\\
&+ \left[\frac{x}{7}\right] - \left[\frac{x}{2.7}\right] - \left[\frac{x}{3.7}\right] - \left[\frac{x}{5.7}\right] + \left[\frac{x}{2.3.7}\right] + \left[\frac{x}{2.5.7}\right]\\
&\qquad + \left[\frac{x}{3.5.7}\right] - \left[\frac{x}{2.3.5.7}\right]
\end{aligned}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\left[\frac{x}{p^{\omega}}\right]-\sum_{\mu}\left[\frac{x}{p_\mu\, p_\omega}\right]+\sum_{\mu\,\mu'}\left[\frac{x}{p_\mu\, p_{\mu'}\, p_\omega}\right]-\cdots$$

$$+(-1)^{\omega}\left[\frac{x}{p_2 p_3 \cdots p_\omega}\right]$$

$$=\sum_{\mu}\left[\frac{x}{p_\mu}\right]-\sum_{\mu.\mu'}\left[\frac{x}{p_\mu\, p_{\mu'}}\right]+\sum_{\mu.\mu'.\mu''}\left[\frac{x}{p_\mu\, p_{\mu'}\, p_{\mu''}}\right]-\cdots$$

$$+(-1)^{\omega}\left[\frac{x}{p_2 p_3 \cdots p_\omega}\right],$$

wobei in den Summen alle verschiedenen Kombinationen der Elemente μ, μ', μ'', ... zu nehmen sind.

Man erhält so das bekannte Resultat von Jonquières[1])

$$\Psi(x)+1=[x]-\sum\left[\frac{x}{p}\right]+\sum\left[\frac{x}{pp'}\right]-\sum\left[\frac{x}{p\,p'\,p''}\right]+\cdots,$$

indem man einfach p, p′, p″,··· statt p_μ, $p_{\mu'}$, $p_{\mu''}$,··· schreibt und die Bedingung im Auge behält, dass die Summen über alle verschiedenen Kombinationen zu je zwei, resp. drei u. s. w. Elementen aus der Reihe derjenigen Primzahlen p, p′, p″ ··· genommen werden müssen, die $\leqq [\sqrt{x}]$ sind.

Aus dem Vergleiche des Systems (7) und den Ausdrücken (1) und (2) folgert man noch die Beziehungen

$$\left[\frac{x}{3}\right]-\left[\frac{x}{2.3}\right]=\left[\frac{x+3}{6}\right]$$

$$\left[\frac{x}{5}\right]-\left[\frac{x}{2.5}\right]-\left[\frac{x}{3.5}\right]+\left[\frac{x}{2.3.5}\right]=\left[\frac{x+5}{30}\right]+\left[\frac{x+25}{30}\right],$$

die gültig sind für jede positive reelle Zahl x.

---

1) **Jonquières**, Formule pour déterminer combien il y a de nombres premiers n'excédant pas un nombre donné. Paris, Comptes rendus, tome 95, p. 1144 und p. 1343.