A. Hartmann.

Ueber homothetische Ellipsen.

(Eingereicht den 3. März 1906.)

Nach einem von Steiner aufgestellten Satze (Werke II, pag. 676) sind die einem Dreieck eingeschriebenen Ellipsen im allgemeinen je vier und vier homothetisch (Ellipsen mit parallelen und proportionalen gleichnamigen Axen oder ähnlich und ähnlich gelegene Ellipsen); ihre Mittelpunkte liegen allemal in den Ecken eines vollständigen Vierecks, dessen drei Paar Gegenseiten sich in den Ecken des gegebenen Dreiecks schneiden.

Aus diesem Satz entspringt die Aufgabe: Die vier Ellipsen zu konstruieren, welche die Seiten eines gegebenen Dreiecks berühren und einer gegebenen Ellipse homothetisch sind.

Zu einer Konstruktion dieser Ellipsen und zugleich zu einer Verallgemeinerung des genannten Satzes gelangen wir durch folgende einfache Ueberlegung. Bekanntlich kann jede Ellipse orthogonal in einen Kreis projiziert werden, indem man die Projektionsebene so wählt, dass ihre Schnittlinie mit der Ebene der gegebenen Ellipse der kleinen Axe dieser letzteren parallel ist, und zugleich so, dass der Cosinus des von den beiden Ebenen eingeschlossenen Winkels dem Verhältnis $b : a$ der kleinen Axe zur grossen Axe gleich ist. Alsdann wird die Projektion der Ellipse ein Kreis vom Radius b (kleine Halbaxe der Ellipse), und es entsprechen sich im Original und Bild die Mittelpunkte. Demnach werden, durch dieses Verfahren, homothetische Ellipsen, welche in der nämlichen Ebene liegen, gleichzeitig orthogonal in Kreise projiziert. Denkt man nun die Originalebene um ihre Spur in die Projektionsebene umgelegt, so sind die Systeme der Ellipsen und der Kreise orthogonal affine Systeme in perspektivischer Lage. Die Spur der Originalebene (parallel zu den kleinen Axen der Ellipsen) ist die Axe und das Verhältnis $b : a$ der kleinen Axen zu den grossen Axen der Ellipsen die Charakteristik der Affinität.

Somit erhalten wir folgende einfache Konstruktion der vier Ellipsen, welche einer gegebenen Ellipse homothetisch sind und die Seiten eines gegebenen Dreiecks A B C berühren.

Wir nehmen eine beliebige Affinitätsaxe parallel zur kleinen Axe der Ellipse an und bestimmen mit der Charakteristik b : a (b kleine, a grosse Halbaxe der Ellipse) das zum Dreieck A B C orthogonal affine Dreieck A′ B′ C′. In demselben zeichnen wir die vier eingeschriebenen Kreise und konstruieren die entsprechenden Ellipsen im System A B C. Die Konstruktion liefert sofort die Axenkreuze der gesuchten Ellipsen.

Die Mittelpunkte der Kreise und der Ellipsen sind entsprechende Punkte der beiden Systeme. Da die Kreismittelpunkte in den Ecken des vollständigen Vierecks liegen, dessen drei Paar Gegenseiten die Winkel des Dreiecks A′ B′ C′ halbieren, liegen notwendig auch die Mittelpunkte der vier Ellipsen in den Ecken des entsprechenden Vierecks im System A B C. Jedem Kreis des Systems A′ B′ C′ entspricht im System A B C eine Ellipse, welche der gegebenen Ellipse homothetisch ist. So entspricht dem Feuerbach'schen Kreis des Dreiecks A′ B′ C′ im gegebenen Dreieck A B C eine zur gegebenen Ellipse homothetische Ellipse, welche die vier eingeschriebenen Ellipsen berührt und nach diesem Verfahren aus dem entsprechenden Feuerbach'schen Kreis leicht konstruiert werden kann. Steiner hat diese Ellipse in verschiedenen Abhandlungen erwähnt.

Das gleiche Verfahren können wir anwenden, um aus dem Apollonischen Kreis-Problem acht homothetische Ellipsen zu konstruieren, welche drei gegebene homothetische Ellipsen berühren. Sind die drei Ellipsen durch ihre Axenkreuze O_1 (a_1 b_1) O_2 (a_2 b_2) O_3 (a_3 b_3) gegeben, so nehmen wir die Affinitätsaxe parallel zu den kleinen Axen der Ellipsen an und bestimmen mit der Charakteristik $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3}$ die entsprechenden Kreise (d. h. die Mittelpunkte O_1' O_2' O_3'; ihre Radien sind den kleinen Halbaxen der entsprechenden Ellipsen gleich). Zu diesen Kreisen zeichnen wir die acht Apollonischen Kreise und konstruieren dann die entsprechenden Ellipsen im System O_1 O_2 O_3. Diese zerfallen, wie die Kreise des Apollonius, in Gruppen zu vier, so dass die Ellipsen jeder Gruppe von einer und derselben homothetischen Ellipse berührt werden. Man erhält diese Ellipsen aus den entsprechenden Kreisen des Systems $O_1' O_2' O_3'$, welche die Gruppen der Apollonischen Kreise berühren. —

Aus der projektivischen Verwandtschaft der Systeme geht ferner hervor, dass die acht homothetischen Ellipsen auch direkt in gleicher Weise, wie die acht Apollonischen Kreise konstruiert werden können. Wir nehmen (Gergonne'sche Konstruktion) von irgend einer der vier Aehnlichkeitsaxen der gegebenen homothetischen Ellipsen in Bezug auf jede den Pol $P_1 P_2 P_3$ und verbinden denselben mit dem Radikalzentrum R. Schneiden diese Sehnen die Ellipsen in den Punktenpaaren $a' b'$; $a'' b''$; $a''' b'''$, so ordnen sich dieselben zweimal zu dreien so, dass die durch $a' a'' a'''$ und die durch $b' b'' b'''$ gehende Ellipse in ihnen die gegebenen berührt. Sie sind bestimmt durch die Punkte $a' a'' a'''$ resp. $b' b'' b'''$ und die Tangenten in diesen Punkten. Wiederholen wir das Verfahren mit jeder der andern Aehnlichkeitsaxen, so erhalten wir die acht homothetischen Apollonischen Ellipsen in vier Paaren. Diese direkte Konstruktion der Ellipsen ist indessen nicht so leicht durchführbar, wie die erst erwähnte und liefert nicht direkt die Mittelpunkte und die Axen der Ellipsen.

Damit sind der Satz über die eingeschriebenen Kreise des Dreiecks und das Apollonische Problem übertragen auf Ellipsen, die durch zwei imaginäre Punkte der unendlich fernen Geraden gehen. Durch Zentralprojektion (Collineation) können wir diese Probleme übertragen auf Kegelschnitte, welche durch zwei beliebige imaginäre Punkte gehen. Wir erhalten dadurch folgende Sätze:

1. Es gibt vier Kegelschnitte, welche die Seiten eines Dreiecks berühren und durch zwei imaginäre Punkte gehen. Die Pole der gemeinsamen Sekante in Bezug auf diese Kegelschnitte liegen in den Ecken eines vollständigen Vierecks, dessen drei Paar Gegenseiten sich in den Ecken des Dreiecks schneiden. Diese vier Kegelschnitte werden von einem fünften Kegelschnitt berührt, der ebenfalls durch die zwei imaginären Punkte geht.
2. Gehen drei Kegelschnitte durch zwei imaginäre Punkte, so gibt es acht Kegelschnitte, welche dieselben berühren und ebenfalls durch die zwei imaginären Punkte gehen. Diese acht Kegelschnitte zerfallen in der Art in Gruppen von vier, dass die Kegelschnitte jeder Gruppe von

einem und demselben Kegelschnitt berührt werden, welcher ebenfalls durch die zwei imaginären Punkte geht.

Diese Sätze können auch als Spezialfälle des erweiterten Apollonischen Problems betrachtet werden (vide W. Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, Band 2, pag 659, und die bezügliche Literaturnachweisung 140).