2 Kreissysteme am Dreieck

O. Schenker.

2 Kreissysteme am Dreieck.

(Eingereicht den 9. April 1906).

1. **Satz:** Die drei Kreise durch die bezw. Dreiecksecken A, B u. C, deren Mittelpunkte A′, B′ u. C′ erhalten werden, indem man die Normalen A′A, B′B u. C′C in den Ecken A, B u. C zu den Umkreisradien AM, BM u. CM mit den Gegenseiten in A′, B′ bezw. C′ zum Schnitt bringt,
2. gehen durch dieselben zwei Punkte O und O′ im Endlichen und schneiden sich unter dem unveränderlichen Winkel von 120°.

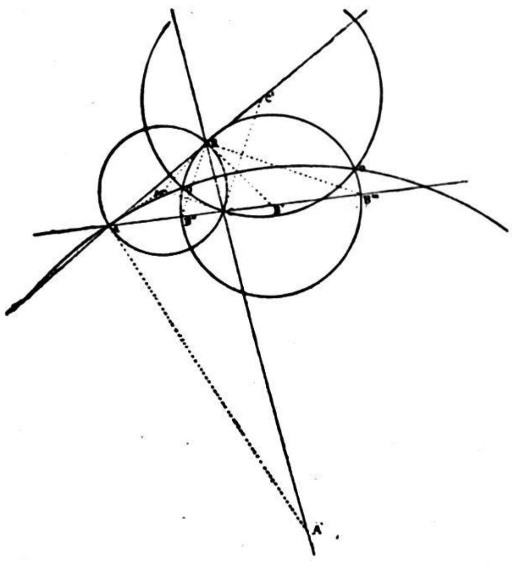

Fig. 1.

3. Diese drei Kreise gehen ausserdem durch die bezw. Schnittpunkte B‴ u. B″ | C‴ u. C″ | A‴ u. A″ der äussern und innern Winkelhalbierenden mit den Gegenseiten (siehe Figur 1).

Hist. Bemerkung: Dieses Kreissystem wird dem Apollonius von Perga (in Pamphylien) mit dem Beinamen des grossen Geometers zugeschrieben, der um 200 v. Chr. zu Alexandria lebte und ein Werk über die Kegelschnitte (De Sectionibus conicis) schrieb.

Beweis zu 1. Am einfachsten rechnen wir in trimetrischen Koordinaten, indem wir einen beliebigen Punkt P durch seine Abstände x_1, x_2, x_3 von den bezw. Dreiecksseiten $BC = s_1$. $CA = s_2$ und $AB = s_3$ bestimmen, wobei x_1, x_2 u. x_3 durch die Beziehung verbunden sind:

$$\underline{x_1 . s_1 + x_2 . s_2 + x_3 . s_3 = s_1 . s_2 . \sin C = s_2 . s_3 . \sin A = s_3 . s_1 . \sin B}$$

Bezeichnet d den Durchmesser vom Umkreis des Fundamentaldreiecks (ABC), so folgt aus der Figur:

$$s_1 = d . \sin A, s_2 = d . \sin B, s_3 = d . \sin C, \quad \text{also}$$

$$\underline{x_1 . \sin A + x_2 . \sin B + x_3 . \sin C = d . \sin A . \sin B . \sin C}$$

Der Abstand zweier Punkte x_1', x_2', x_3' u. x_1'', x_2'', x_3'' wird durch den Ausdruck gegeben:

$$\sqrt{\frac{s_1 . s_2 . s_3}{s_1^2 . s_2^2 . \sin^2 C}\Big[(x_1' - x_1'')^2 . s_1 . \cos A + (x_2' - x_2'')^2 . s_2 . \cos B + (x_3' - x_3'')^2 . s_3 . \cos C\Big]}$$

oder indem man $s_1 = d . \sin A, s_2 = d . \sin B, s_3 = d . \sin C$ einführt

durch $$\sqrt{\frac{1}{2 . \sin A . \sin B . \sin C}\Big[(x_1' - x_1'')^2 \sin 2A + (x_2' - x_2'')^2 \sin 2B + (x_3' - x_3'')^2 \sin 2C\Big]}$$

Anmerkung: Die Formel ergibt sich folgendermassen (s. Fig. 2). Bezeichnen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ resp. $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{C}''$ die Fusspunkte der Senkrechten aus P' und P'' auf die Dreiecksseiten, so ist:

$$\overline{P'P''}^2 = \overline{\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''}^2 + (P'\mathfrak{A}' - P''\mathfrak{A}'')^2 \quad \text{oder da}$$

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'' = B\mathfrak{A}'' - B\mathfrak{A}' = \frac{x_3'}{\sin B} + \frac{x_1'.\cos B}{\sin B} - \frac{x_3''}{\sin B} - \frac{x_1''.\cos B}{\sin B}$$

$$= \frac{x_3' - x_3'' + (x_1' - x_2'')\cos B}{\sin B} \text{ ist}$$

$$\overline{P'P''}^2 = \left[\frac{x_3' - x_3'' + (x_1' - x_2'')\cos B}{\sin B}\right]^2 + (x_1' - x_1'')^2$$

$$= \left[(x_3' - x_3'')^2 + (x_1' - x_1'')^2 + 2(x_3' - x_3'')(x_1' - x_1'')\cos B\right] : \sin^2 B$$

da aber $x_1'.\sin A + x_2'.\sin B + x_3'.\sin C = d.\sin A.\sin B.\sin C$ u.

$x_1''.\sin A + x_2''.\sin B + x_3''.\sin C = d.\sin A.\sin B.\sin C$ ist,

also $(x_1' - x_1'')\sin A + (x_2' - x_2'')\sin B + (x_3' - x_3'')\sin C = 0$,

so folgt durch quadrieren: $2(x_3' - x_3'')(x_1' - x_1'')$

$$= \frac{(x_2' - x_2'')^2\sin^2 B - (x_1' - x_1'')^2\sin^2 A - (x_3' - x_3'')^2.\sin^2 C}{\sin A.\sin C}$$

also $\overline{P'P''}^2 = \Big\{\sin C(x_3' - x_3'')^2(\sin A - \cos B\sin C)$

$$+ \sin A(x_1' - x_1'')^2(\sin C - \cos B\sin A)$$

$+ \sin^2 B\cos B(x_2' - x_2'')^2\Big\} : \sin A.\sin^2 B.\sin C$

$= \Big\{\sin A(x_1' - x_1'')^2\cos A.\sin B + \sin B(x_2' - x_2'')^2\cos B.\sin B$

$+ \sin C(x_3' - x_3'')^2\cos C.\sin B\Big\} : \sin A.\sin^2 B.\sin C$

$$= \Big\{(x_1' - x_1'')^2\sin 2A + (x_2' - x_2'')^2\sin 2B + (x_3' - x_3'')^2\sin 2C\Big\}$$

$$: 2\sin A.\sin B.\sin C \quad \text{w. z. b. w.}$$

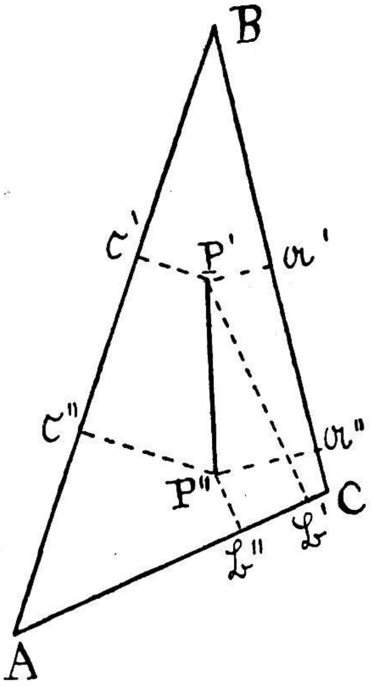

Fig. 2.

Sei nun ABC (Fig. 1) das gegebene Dreieck, das man als Fundamentaldreieck wählt, M der Umkreismittelpunkt; BB′ stehe zum Radius MB senkrecht und treffe die Verlängerung von AC in B′, so ist nach dem Sinussatz im $\varDelta$ABB′:

$AB' = d \,.\, \sin^2 C : \sin(C - A)$ u. im $\varDelta CBB' : CB' = d \,.\, \sin^2 A : \sin(C - A)$,

somit sind die Koordinaten von B′ $\left| \, x_1 = - \dfrac{d \,.\, \sin^2 A \,.\, \sin C}{\sin(C - A)}; \; x_2 = 0 \right.$

$x_3 = \dfrac{d \,.\, \sin^2 C \,.\, \sin A}{\sin(C - A)} \,\Big|$ und der Kreis durch B mit B′ zum Zentrum hat offenbar die Gleichung:

$$d^2 \left\{ \left[\frac{\sin^2 A \,.\, \sin C}{\sin(C - A)} \right]^2 \sin 2A + (\sin A \,.\, \sin C)^2 \,.\, \sin 2B + \left[\frac{\sin^2 C \,.\, \sin A}{\sin(C - A)} \right] \sin 2C \right.$$

$$= \left[x_1 + \frac{d \sin^2 A \,.\, \sin C}{\sin(C - A)} \right]^2 . \sin 2A + x_2^2 \,.\, \sin 2B$$

$$+ \left[x_3 - \frac{\sin^2 C \,.\, \sin A}{\sin(C - A)} \right]^2 . \sin 2C$$

da ja die Koordinaten der Ecke B $\Big| : x_1 = 0, \; x_2 = d \,.\, \sin A \,.\, \sin C$

$x_3 = o$ sind. Durch Vereinfachung wird die Kreisgleichung

$$d^2 . \sin^2 A . \sin^2 C . \sin 2B = \frac{2x_1 . d . \sin 2A . \sin^2 A . \sin C}{\sin (C - A)}$$

$$- \frac{2x_3 . d . \sin 2C . \sin^2 C . \sin A}{\sin (C - A)} + x_1^2 . \sin 2A + x_2^2 . \sin 2B + x_3^2 . \sin 2C.$$

Die entsprechende Gleichung für den Kreis durch die Ecke C erhält man durch Vorrücken der Buchstaben und Indicess:

$$d^2 . \sin^2 B . \sin^2 A . \sin 2C = \frac{2x_2 . d . \sin 2B . \sin^2 B . \sin A}{\sin (A - B)}$$

$$- \frac{2x_1 d . \sin 2A . \sin^2 A . \sin B}{\sin (A - B)} + x_1^2 . \sin 2A + x_2^2 . \sin 2B + x_3^2 . \sin 2C.$$

Die gemeinsame Sehne dieser beiden Kreise bezw. deren Gleichung erhält man durch Substraktion der beiden Kreisgleichungen:

$$d^2 . \sin^2 A . \sin^2 C . \sin 2B - d^2 . \sin^2 B . \sin^2 A . \sin 2C = 2dx_1 . \sin 2A . \sin^2 A .$$

$$. \left\{ \frac{\sin (A - B) \sin C + \sin (C - A) . \sin B}{\sin (A - B) . \sin (C - A)} \right\} - \frac{2dx_2 . \sin 2B . \sin^2 B . \sin A}{\sin (A - B)}$$

$$- \frac{2dx_3 \sin 2C . \sin^2 C . \sin A}{\sin (C - A)}$$ oder durch Vereinfachung:

$$d . \sin A . \sin B . \sin C . \sin (C - B)$$

$$= x_1 \sin 2A . \sin A \left[\frac{\cos 2B - \cos 2A + \cos 2A - \cos 2C}{\sin (A - B) . \sin (C - A)} \right.$$

$$- \frac{2x_2 . \sin 2B . \sin^2 B}{\sin (A - B)} - \frac{2x_3 . \sin 2C . \sin^2 C}{\sin (C - A)}$$ oder

$$d . \sin A . \sin B . \sin C = \frac{2x_1 \sin 2A . \sin^2 A}{\sin (A - B) . \sin (C - A)}$$

$$+ \frac{2x_2 . \sin 2B . \sin^2 B}{\sin (B - C) . \sin (A - B)} + \frac{2x_3 . \sin 2C . \sin^2 C}{\sin (C - A) . \sin (B - C)}$$ oder wegen

$d . \sin A . \sin B . \sin C = x_1 \sin A + x_2 \sin B + x_3 \sin C$ wird die Gleichung der Sehne:

$$\underline{(x_1 \sin A + x_2 \sin B + x_3 \sin C) \sin(A - B).(B - C).\sin(C - A)}$$

$$\underline{- 2 x_1 \sin 2A . \sin^2 A \sin(B - C) - 2 x_2 \sin 2B . \sin^2 B . \sin(C - A)}$$

$$\underline{- 2 x_3 \sin 2C . \sin^2 C . \sin(A - B) = o}$$

Durch Vorrücken der Buchstaben und Indicess wird diese Gleichung nicht geändert, d. h. unsere drei Kreise haben eine gemeinsame Sehne im Endlichen, gehen also durch zwei feste Punkte O u. O′ im Endlichen w. z. b. w.

Beweis zu 2. Nach dem Cosinussatz ergibt sich (Fig. 1) $\overline{C'B'}^2 = \overline{C'O}^2 + \overline{B'O}^2 - 2 C'O . B'O . \cos(C'OB')$ und anderseits $\overline{C'B'}^2 = \overline{AB'}^2 + \overline{AC'}^2 - 2 \overline{AB'} . \overline{AC'} . \cos A$ od. da aus $\triangle ABB'$ folgt: $AB' = d . \sin^2 C : \sin(C - A)$ u. $B'O = B'B = \dfrac{d . \sin A . \sin C}{\sin(C - A)}$ und aus $\triangle ACC' : AC' = d . \sin^2 B : \sin(B - A)$ u.

$C'O = CC' = d . \sin B . \sin A : \sin(B - A)$ (nach dem Sinussatz)

$$\frac{d^2 . \sin^4 C}{\sin^2(C - A)} + \frac{d^2 . \sin^4 B}{\sin^2(A - B)} + \frac{d^2 . 2 . \sin^2 C . \sin^2 B . \cos A}{\sin(C - A) . \sin(A - B)}$$

$$= d^2 \left[\frac{\sin A . \sin C}{\sin(C - A)}\right]^2 + d^2 \left[\frac{\sin B . \sin A}{\sin(A - B)}\right]^2$$

$$+ \frac{2 d^2 . \sin^2 A . \sin B . \sin C . \cos(C'OB')}{\sin(C - A) . \sin(A - B)}$$

od. durch Vereinfachung:

$$\frac{\sin^2 C (\sin^2 C - \sin^2 A)}{\sin^2(C - A)} + \frac{\sin^2 B (\sin^2 B - \sin^2 A)}{\sin^2(A - B)}$$

$$+ \frac{2 \sin^2 C . \sin^2 B . \cos A}{\sin(C - A) . \sin(A - B)} = + \frac{2 \sin^2 A . \sin B . \sin C . \cos(C'OB')}{\sin(C - A) . \sin(A - B)}$$

od. $$\frac{\sin^2 C . \sin B}{\sin(C - A)} - \frac{\sin^2 B . \sin . C}{\sin(A - B)} + \frac{2 \sin^2 C . \sin^2 B . \cos A}{\sin(C - A) . \sin(A - B)}$$

$$= + \frac{2 \sin^2 A . \sin B . \sin C . \cos O}{\sin(C - A) . \sin(A - B)}$$ oder

$$\frac{\sin C}{\sin(C-A)} - \frac{\sin B}{\sin(A-B)} + \frac{2\sin C.\sin B.\cos A}{\sin(C-A).\sin(A-B)}$$

$$= \frac{+2\sin^2 A.\cos O}{\sin(C-A).\sin(A-B)}$$

woraus: $\sin C.\sin(A-B) - \sin B.\sin(C-A) + 2\sin C.\sin B.\cos A$ $= +2\sin^2 A.\cos O$ oder

$\sin C(\sin A.\cos B - \cos A.\sin B) - \sin B(\sin C.\cos A - \cos C.\sin A)$ $+ 2\sin C.\sin B.\cos A = +2\sin^2 A.\cos O$ oder $\sin^2 A = 2\sin^2 A.$ $\cos O$, also $\underline{\cos O = +\frac{1}{2}}$ d. h. $\sphericalangle \underline{C'OB' = 60^0}$; in gleicher Weise ist $\sphericalangle \underline{A'OC'} = \underline{120^0}$ u. $\sphericalangle \underline{B'OA'} = \underline{60^0}$ w. z. b. w.

Beweis zu 3 (Fig. 1). Sind BB″ u. BB‴ die innern und äussern Winkelhalbierenden in $\triangle$ ABC an der Ecke B, so ist:

$\sphericalangle B''BC = \frac{B}{2}$; $\sphericalangle CBB' = A$, also $\sphericalangle B''BB' = A + \frac{B}{2}$,

ferner ist $\sphericalangle BB''B' = A + \frac{B}{2}$, als Aussenwinkel des Dreiecks ABB″, darum $\sphericalangle B''BB' = \sphericalangle BB''B'$, somit

$\underline{B'B = B'B''}$ w. z. b. w.

Gleicherweise ist $\sphericalangle B'BB''' = 90 - A - \frac{B}{2}$ nach dem vorigen u. $\sphericalangle BB'''B' = 90 - A - \frac{B}{2}$ als Folge des vorangegangenen, somit

$\sphericalangle B'BB''' = \sphericalangle BB'''B'$, d. h.

$\underline{B'B = B'B'''}$ w. z. b. w.

Satz: Im rechtwinkligen Dreieck ABC (Fig. 3) ist die Verbindungslinie der Kathetenmitten Radicalaxe (P_1P_2) eines Kreissystems, bestehend aus drei Kreisen, wozu der Umkreis (M) gehört. Dieser enthält die Mittelpunkte M_1 und M_2 der beiden andern Kreise, welche durch die Berührungspunkte des innerlich berührenden Kreises an den Katheten bezw. durch seinen Berührungspunkt an der Hypothenuse gehen.

Beweis: Wir legen ein rechtwinkliges Koordinatensystem zu Grunde mit Umkreismittelpunkt M zum Anfangspunkt, dessen positive Axenrichtungen Mx u. My parallel den Kathetenrichtungen CB und CA sind. Ist sodann M_1MM_2 in M zur Hypothenuse senkrecht mit M_1 u. M_2 zu Schnittpunkten am Umkreise, so sind M_1, M u. M_2 die Zentren unseres Kreissystems mit der Verbindungslinie der Kathetenmitten zur gemeinsamen Sehne.

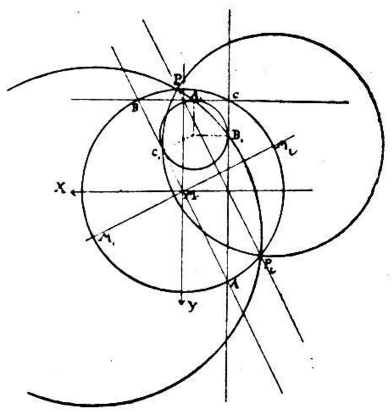

Fig. 3.

Bedeuten P_1 und P_2 die Schnittpunkte dieser Radikalaxe mit dem Umkreis, A_1, B_1, C_1 die bezüglichen Berührungspunkte des Inkreises (Zentrum O), so wird behauptet:

$$\underline{M_1P_1 = M_1A_1 = M_1B_1} \quad \text{u.} \quad \underline{M_2P_1 = M_2C_1}$$

Die Koordinaten von M_1, M_2, A_1, B_1, C_1 u. P_1 sind, wenn wiederum d den Umkreisdurchmesser vorstellt:

$$\text{von } M_1 \left| \; x = \frac{d.\cos A}{2} \quad ; \quad y = \frac{d.\cos B}{2} \right.$$

$$\text{von } M_2 \left| \; x = -\frac{d.\cos A}{2} \quad ; \quad y = -\frac{d.\cos B}{2} \right.$$

$$\text{von } A_1 \left| \; x = d\,\frac{\sin B - 1}{2} \quad ; \quad y = -\frac{\sin B.d}{2} \right.$$

$$\text{von } B_1 \left| \; x = -\frac{\sin A.d}{2} \quad ; \quad y = \frac{\sin A - 1.d}{2} \right.$$

von C_1 | $x = d\sin A \dfrac{\sin B - \sin A}{2}$; $y = d.\sin B \dfrac{\sin A - \sin B}{2}$

von P_1 | $x = d\left[-\sin^2 B.\cos B \pm \cos B\sqrt{\cos^2 B + \sin^4 B}\right] : 2$

$$y = d\left[-\cos^2 B \sin B \mp \sin B\sqrt{\cos^2 B + \sin^4 B}\right] : 2$$

denn der Radius r des Inkreises ist ja:

$$r = d^2 . \sin A . \sin B . \sin C : d(\sin A + \sin B + \sin C)$$

$$= 8d\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} . \sin\frac{C}{2} . \cos\frac{A}{2} . \cos\frac{B}{2} . \cos\frac{C}{2}$$

$$: 4\cos\frac{A}{2} . \cos\frac{B}{2} . \cos\frac{C}{2} = 2d . \sin\frac{A}{2} . \sin\frac{B}{2} . \sin\frac{C}{2}$$

$= d\dfrac{\cos A + \cos B + \cos C - 1}{2} = \dfrac{\sin A + \sin B - 1}{2} . d$ für unsern Fall von $C = 90^0$; woraus für A_1 u. B_1 die angegebenen Werte folgen (Fig. 3).

Für C_1 ergeben sich daraus die Koordinaten:

$$x = d\frac{\sin B - 1}{2} + \frac{d\sin A + \sin B - 1}{2} . \cos A$$

$$= d\frac{\sin A . \sin B + \sin^2 B - 1}{2} = d\sin A \frac{\sin B - \sin A}{2}$$

$$y = \frac{-d . \sin B}{2} + d . \frac{\sin A + \sin B - 1}{2} . \sin A + d\frac{\sin A + \sin B - 1}{2}$$

$= d\dfrac{\sin^2 A + \sin A . \sin B - 1}{2} = d . \sin B . \dfrac{\sin A - \sin B}{2}$ wie angegeben.

Für P_1P_2 aber besteht die Gleichung:

$y + \dfrac{\sin B}{2} . d = -x\,\mathrm{tg} B$ und für den Umkreis $x^2 + y^2 = \dfrac{d^2}{4}$, woraus für P_1 und P_2 folgt:

$$x^2 + \frac{\sin^2 B(\cos . d + 2x)^2}{4 . \cos^2 B} = \frac{d^2}{4} \quad \text{oder}$$

$$4x^2 + 4.\sin^2B.\cos B.d.x - d^2.\cos^2B + d^2\cos^2B.\sin^2B = o$$

od. $4x^2 + 4\sin^2B.\cos B.d.x - d^2.\cos^4B = o$, woraus

$$x_{P_1|P_2} = \left\{ -\sin^2B.\cos B.d \pm d.\cos B\sqrt{\cos^2B + \sin^4B} \right\} : 2$$

$$y_{P_1|P_2} = \left\{ -\cos^2B\sin B.d \mp d.\sin B\sqrt{\cos^2B + \sin^4B} \right\} : 2$$

wie angegeben.

Hiernach ergibt sich:

$$\overline{M_1P_1}^2 = \left[\cos A + \sin^2B.\cos B \mp \cos B\sqrt{\cos^2B + \sin^4B}\right]^2 \frac{d^2}{4}$$

$$+ \left[\cos B + \cos^2B.\sin B \pm \sin B\sqrt{\cos^2B + \sin^4B}\right| \frac{d^2}{4}$$

$$= \left[1 + \sin^2B.\cos^2B + \cos^2B + \sin^4B + 2\sin A.\sin B\right] \frac{d^2}{4}$$

$$= \frac{d^2}{2}\left(1 + \sin A.\sin B\right), \quad \text{ferner}$$

$$\overline{M_1A_1}^2 = \left[\cos A - \sin B + 1\right]^2 \frac{d^2}{4} + \left[\cos B + \sin B\right]^2 \frac{d^2}{4}$$

$$= \frac{d^2}{2}\left(1 + \sin A.\sin B\right) \text{ u.}$$

$$\overline{M_1B_1}^2 = \left(\cos A + \sin A\right)^2.\frac{d^2}{4} + \left[\cos B - \sin A + 1\right]^2.\frac{d^2}{4}$$

$$= \frac{d^2}{2}\left(1 + \sin A.\sin B\right) \text{ also:}$$

$$\underline{\underline{M_1P_1 = M_1A_1 = M_1B_1 = M_1P_2}} \text{ w. z. b. w.}$$

weiter:

$$\overline{M_2P_1}^2 = \left[-\cos A + \sin^2B.\cos B \mp \cos B\sqrt{\cos^2B + \sin^4B}\right]^2.\frac{d^2}{4}$$

$$+ \left[-\cos B + \sin B.\cos^2B \pm \sin B\sqrt{\cos^2B + \sin^4B}\right]^2.\frac{d^2}{4}$$

$$= \frac{d^2}{4}\left[1 + \sin^2B.\cos^2B + \cos^2B + \sin^4B - 2\sin B.\cos B\right]$$

$$= \frac{d^2}{2} \left(1 - \sin A \, . \sin B\right) \text{ u.}$$

$$\overline{M_2 C_1}^2 = \left[- \cos A - \sin A (\sin B - \sin A) \right]^2 . \frac{d^2}{4}$$

$$+ \left[- \cos B - \sin B (\sin A - \sin B) \right]^2 . \frac{d^2}{4}$$

$$= \frac{d^2}{4} \left[1 + (\sin A - \sin B)^2 \right] = \frac{d^2}{2} \; (1 - \sin A . \sin B)$$

woraus folgt:

$$\underline{M_2 P_1 = M_2 C_1 = M_2 P_2 .} \text{ w. z. b. w.}$$