Praktische Anwendungen des Brianchon'schen Satzes auf die Kreis-Perspektive

Autor(en): **Benteli, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1906)**

Heft 1609-1628

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-319164

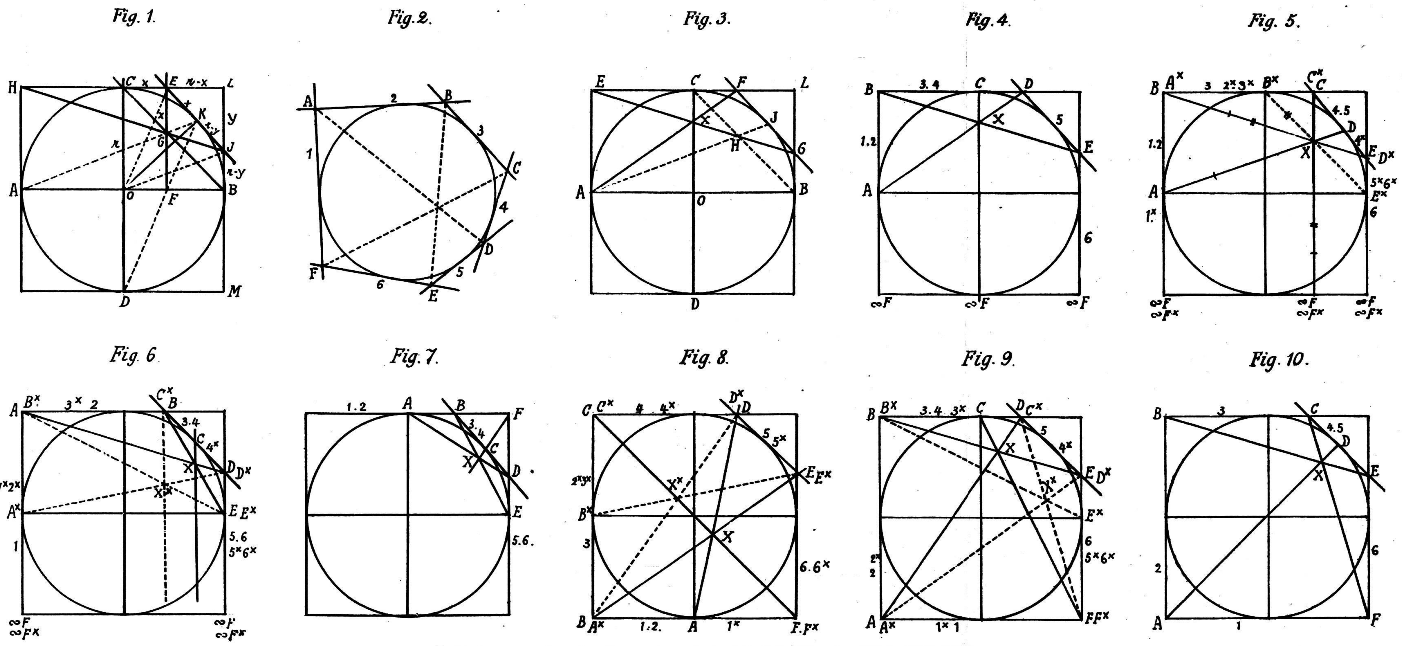
Alb. Benteli.

Praktische Anwendungen des Brianchon'schen Satzes auf die Kreis-Perspektive.

Bei der Perspektive des Kreises stützt man sich gewöhnlich auf ein dem Kreise umschriebenes Quadrat mit den rechtwinkligen Durchmessern der Berührungspunkte. Dies ist leicht erklärlich, da man die Fluchtpunkte der Richtungen der Quadratseiten gewöhnlich schon hat oder dieselben sich wenigstens sehr leicht verschaffen kann. So bekommt man für die Ellipse — Perspektive des Kreises — vier Tangenten mit ihren Berührungspunkten, was für kleine Ellipsen genügen mag. Ganz leicht lassen sich übrigens vier weitere Tangenten mit ihren Berührungspunkten finden, wenn man das umschriebene Quadrat benutzt, das gegen das erste um 45° gedreht erscheint.

Künstler benutzen wohl selten umschriebene Quadrate, sie zeichnen die Kreisperspektive nach der scheinbaren Länge und Höhe der Ellipse, d. h. nach dem Axensystem. Sie denken sich also den Kreis nicht als Zentralprojektion auf die einzige Bildebene für das ganze Bild, sondern sie zeichnen den Kreis, wie sie ihn sehen — Sehaxe nach dem Kreis gerichtet. — Solche Abweichung von der strengen Zentralprojektion auf eine einzige Bildebene darf durchaus nicht als Fehler betrachtet werden, sie wird vielmehr durch den Sehprozess sehr gut begründet. Freilich erwächst dann dem Künstler die Schwierigkeit, die einzelnen Bilder auf einer Bildebene in harmonische Zusammenwirkung zu bringen, so dass das Gesamtbild möglichst gut dem subjektiven Anschauungsbilde zu entsprechen vermag.

Der Architekt dagegen wird konstruieren. Hat er es mit der Perspektive kleiner Kreise zu tun, so wird ihm die Konstruktion aus umschriebenen Quadraten genügen. Sobald aber grosse Kreise in Perspektive zu bringen sind, so wird ihm dies



Verbindungsgeraden der Gegenecken sind: AD, BE, CF oder A^xD^x, B^xE^x, C^xF^x

A. Benteli.

nicht mehr das Nötige bieten, er möchte hauptsächlich an Stellen stärkster Krümmung Tangenten mit Berührungspunkten erhalten. Es kann ihn also eine Konstruktion nur dann befriedigen, wenn sie zeigt, wie man an ganz beliebigen Stellen Tangenten mit Berührungspunkten bekommen kann. Die Werke von Busch, Pohlke (Fig. 1), Balmer u. a. enthalten derartige Konstruktionen, die ganz elementar zu begründen sind, aber nicht unter allen Umständen leicht in die Zentralprojektion übergehen können, da sie sich auf Parallelismus oder auf gleichmässige Einteilungen stützen. Der Vortragende hat schon 1878 in einer Sitzung der math. physikalischen Sektion der naturforschenden Gesellschaft eine Konstruktion mitgeteilt, die weder paralleler Geraden noch gleichmässiger Einteilung bedarf und ebenfalls leicht ganz elementar zu begründen ist. Die Mitteilungen der naturforschenden Gesellschaft vom Jahr 1878 enthalten diese Konstruktion und zwar ist dort der elementaren Begründung noch eine auf synthetische Geometrie sich stützende Beweisführung beigegeben. Diese letztere Begründung ist etwas kompliziert ausgefallen, es möge nun hier mit Hilfe des Satzes von Brianchon eine weit einfachere folgen.

Bekanntlich lautet der Brianchon'sche Satz: Die Verbindungsgeraden der Gegenecken eines einem Kreise umschriebenen Sechsseits (Fig. 2), also AD, BE, CF, schneiden sich in einem Punkte. Die Seiten können verschieden nummeriert werden, A ist der Schnitt von 1 mit 2, B der Schnitt von 2 mit 3, etc. Durch Zentralprojektion geht dieser Satz ohne weiteres über auf Ellipse, Parabel und Hyperbel.

Nähern sich zwei Tangenten immer mehr bis zum Zusammenfallen, so werden die beiden Berührungspunkte und der Tangentenschnittpunkt zuletzt in einen Punkt zusammenfallen, wir können somit eine Tangente als Doppeltangente und den Berührungspunkt als Schnittpunkt der beiden Tangenten betrachten. Dieses Zusammenfallen zweier benachbarter Tangenten kann einmal, zweimal oder dreimal eintreten, so dass der Brianchon'sche Satz auch für umschriebene 5-Ecke, 4-Ecke und 3-Ecke gelten kann. Davon wird hier später Gebrauch gemacht werden.

Fig. 1 zeigt die Konstruktion von Pohlke. EF $\parallel$ CD, HG gibt Tangente EJ und DF den Berührungspunkt K. Der pythagoräische Lehrsatz gibt für das rechtwinklige Dreieck ELJ : $y = \frac{2rX}{r+X}$ vorausgesetzt, dass EJ eine Tangente ist. Aus den ähnlichen Dreiecken HLJ und HEG folgt wirklich $y : x = 2r : r + x$, also $y = \frac{2rX}{r+x}$, somit ist die Tangentenkonstruktion richtig. Ferner ist DF $\parallel$ OE, gibt somit auf EJ den Berührungspunkt K, denn betrachtet man K als Berührungspunkt, so ist $\triangle$ COE $\cong$ $\triangle$ EOK, also $\angle$ COK $=$ 2. $\angle$ COE, $\angle$ COK ist aber auch $=$ 2 $\angle$ ODK, somit $\angle$ COE $=$ $\angle$ ODK oder DK $\parallel$ OE. Aus ganz ähnlichen Gründen ist auch AK $\parallel$ OJ. $\angle$ AKD $= 45^0 =$ $\angle$ EOJ. Während also der Winkel AKD $= 45^0$ sich über AD dreht, der Scheitel K dabei stets auf dem Kreise sich fortbewegt, schneiden die Schenkel eines zweiten Winkels von 45^0, dessen Scheitel im Kreiszentrum liegt und dessen Schenkel denjenigen des ersten Winkels parallel laufen, die Quadratseiten HL und LM in zwei Punkten, deren geradlinige Verbindung die Kreistangente zum Scheitel K des ersten Winkels liefert.

In Fig. 3 wird die Parallele EF (Fig. 1) überflüssig. Die Figur zeigt eine Konstruktion von Tangente und Berührungspunkt, die durch Zentralprojektion sofort auf Ellipse, Hyperbel und Parabel übergehen kann. Ein beliebiger Punkt X des Durchmessers CD wird von A nach F auf EL und von E nach G auf LB projiziert, so ist FG eine Tangente und AH gibt auf ihr den Berührungspunkt J. Zu den in den „Mitteilungen 1878“ angebrachten Beweisführungen lassen wir nun als Nachtrag die Begründung durch den Brianchon'schen Satz folgen. Dieser Satz führt freilich noch zu weiteren Konstruktionen für Tangenten und Berührungspunkte.

In Figur 4 haben wir das umschriebene Sechsseit mit zwei Doppeltangenten 1. 2 und 3. 4 und den einfachen Tangenten 5 und 6. Verbindet man die Gegenecken 1. 2 — 4. 5 d. h. A mit D, 2. 3 — 5. 6, d. h. B mit E und 3. 4 — 6. 1, d. h. C mit dem unendlich fernen F, so schneiden sich die drei Verbindungsgeraden in einem Punkt X. Umgekehrt sehen wir demnach, dass die Strahlen AX und BX die Tangente DE geben. Diese

Beweisführung für die Kreistangente hat schon Menteler in Basel im Jahre 1896 in einer hübschen Arbeit, die in den Blättern für den Zeichen- und gewerbl. Berufsunterricht erschienen war, mitgeteilt, aber die Richtigkeit obiger Konstruktion für den Berührungspunkt hat er nicht bewiesen.

Für die Begründung obiger Konstruktion des Berührungspunktes haben wir eine zweifache Anwendung des Brianchon'schen Satzes nötig. In Fig. 5 betrachten wir zunächst das umschriebene Sechsseit 1. 2, 3, 4. 5, 6 und ziehen die Verbindungsgeraden der Gegenecken, also AD, BE, CF, so schneiden sich diese in X. Die 3 Strahlen sind in Figur 5 mit einem Querstrichlein bezeichnet. So bekommen wir schon eine Konstruktion für den Berührungspunkt D, bei welcher aber eine Parallele zu einem Durchmesser nötig ist. Die Notwendigkeit dieser Parallelen fällt dahin, sobald wir im umschriebenen Sechsseit 1*, 2*. 3*, 4*, 5*. 6* die Gegenecken A* D*, B* E* und C* F* geradlinig verbinden, denn die Verbindungsgerade B* E* geht ja dann auch durch X. Man hat also nur von A aus den Schnittpunkt X von BE mit der Diagonalen B* E* auf die Tangente CE zu projizieren, um den gesuchten Berührungspunkt D zu erhalten.

Die geradlinigen Verbindungen der Gegenecken, AD, BE, CF im umschriebenen Sechsseit 1., 2, 3. 4, und 5. 6 (Fig. 6) schneiden sich in X, die Parallele zum Durchmesser durch X gibt also auch auf BD den Berührungspunkt C. Für das umschriebene Sechsseit 1*. 2*, 3*, 4*, 5*. 6* erhalten wir den Brianchon'schen Punkt X*. Dies führt auf eine neue Tangentenkonstruktion, freilich wieder mit Hilfe einer Parallelen zu einem Durchmesser.

Aus dem aus drei Doppeltangenten 1. 2, 3. 4, 5. 6 bestehenden umschriebenen Sechsseit (Fig. 7) erhalten wir eine Konstruktion für den Berührungspunkt C, die ohne weiteres in die Zentralprojektion übergeht. Die Verbindungsgeraden der Gegenecken, AD, BE, CF, schneiden sich in X. Die Verbindungsgerade XF gibt somit auf der Tangente BD den Berührungspunkt C. Zu demselben Resultate kommt man auch durch Anwendung des Ceva'schen Satzes auf Dreieck BFD mit den Punkten A, C und E auf den Dreieckseiten, deren Produkt der

Punktwerte gleich —1 wird, wie leicht einzusehen ist, also müssen sich BE, DA und FC in einem Punkte schneiden.

Zum Schlusse betrachten wir noch fünf verschiedene umschriebene Sechsseit, bestehend aus den vier Seiten des umschriebenen Quadrats und irgend einer Zwischentangente, wobei der Reihe nach eine Tangente nach der andern als Doppeltangente aufzufassen ist.

In Fig. 8 führt der Brianchon'sche Satz für das Sechsseit 1. 2, 3, 4, 5, 6 auf eine Tangentenkonstruktion. Projiziert man Punkt X der Quadratdiagonalen CF von A aus auf 4 nach D und von B aus auf 6 nach E, so ist DE eine Tangente. Das Sechsseit 1*, 2*. 3*, 4*, 5*, 6* führt auf dieselbe Tangentenkonstruktion mit den Projektionscentra in A* und B*, statt in A und B.

Die beiden umschriebenen Sechsseit 1, 2, 3. 4, 5, 6 und 1*, 2*, 3*, 4*, 5*. 6* (Fig. 9) führen wieder auf zwei ganz ähnliche Tangentenkonstruktionen. Nach dem ersten Sechsseit werden Punkte X der Diagonalen CF von A und B aus auf 3. 4 und 6 projiziert nach D und E und nach dem zweiten Sechsseit werden Punkte X* der Diagonalen B* E* von A* und F* aus nach D* und C* auf 3* und 5*. 6* projiziert. Endlich führt uns Sechsseit 1, 2, 3, 4. 5, 6 (Fig. 10) noch auf eine Konstruktion für den Berührungspunkt einer Tangente. Der Schnittpunkt X von BE und CF, von A aus auf die Tangente CE projiziert, gibt den Berührungspunkt D.

Der Brianchon'sche Satz liefert uns also eine ganze Reihe von Konstruktionen der Kreistangenten und -Berührungspunkte, gestützt auf ein umschriebenes Quadrat mit dessen Berührungspunkten. Die meisten dieser Konstruktionen gehen, da sie weder Parallellinien noch gleichmässige Einteilungen enthalten, nicht nur direkt auf Parallelprojektionen, sondern auch auf Zentralprojektionen des Kreises über, sie sind demnach für die Kreis-Perspektive gut zu gebrauchen. — Diese Konstruktionen lassen sich noch wesentlich vermehren, wenn wir nicht in derselben Reihenfolge die Seiten nummerieren, doch gehen dann die Linien über das Quadrat hinaus, und die Anwendung auf die Kreisperspektive wird deswegen unpraktisch.

Zu Konstruktionen der ebenen Kreiskegelschnitte in der darstellenden Geometrie liessen sich obige Konstruktionen auch verwenden, doch benutzt man hiezu gewöhnlich schönere und vollkommenere Wege, die zu Systemen konjugierter Durchmesser oder — besser noch — zu den Axensystemen der Kegelschnitte führen. — Für die Kreisperspektive liegen aber die Verhältnisse gewöhnlich so, dass diese letzteren Wege nicht so leicht einzuschlagen sind.