A. Bohren.

Ueber die Integrale $\int_0^\pi x^m \cos n x\, dx$ und $\int_0^\pi x^m \sin n x\, dx$ (m und n ganze Zahlen)

(Eingereicht den 5. Juli 1906).

In Tabellen über bestimmte Integrale finden sich[1])

$$\int_0^\pi x \sin n x\, dx = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}$$

$$\int_0^\pi x \cos n x\, dx = -\frac{1}{n^2}\left[1 + (-1)^{n+1}\right]$$

$$\int_0^\pi x^2 \sin n x\, dx = \frac{2}{n^3}\left[-1 + (-1)^n\left(1 - \frac{n^2\pi^2}{2}\right)\right]$$

$$\int_0^\pi x^2 \cos n x\, dx = (-1)^n \cdot \frac{2\pi}{n^2}$$

Mit Hilfe dieser Spezialfälle lassen sich nun auch die oben angegebenen Integrale leicht ausführen.

Durch partielle Integration erhalten wir zunächst

$$F(m) = \int_0^\pi x^m \sin n x\, dx = -\left(\frac{1}{n} x^m \cos n x\right)_0^\pi + \frac{m}{n}\int_0^\pi x^{m-1} \cos n x\, dx$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi^m}{n} + \frac{m}{n}\int_0^\pi x^{m-1} \cos n x\, dx$$

$$f(m) = \int_0^\pi x^m \cos n x\, dx = -\frac{m}{n}\int_0^\pi x^{m-1} \sin n x\, dx$$

[1]) Nouvelles tables d'intégrales définis de Bierens de Haan. Meyer, Bestimmte Integrale.

also
$$F(m) = (-1)^{n+1}\frac{\pi^m}{n} + \frac{m}{n} f(m-1)$$
$$f(m) = -\frac{m}{n} F(m-1)$$

Mit Hilfe dieser Rekursionsformeln gelangen wir auf $F_{(1}$ und $f_{(1)}$, mit den oben angegebenen Werten.

Es ist demnach

$$F_1 = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{n} \qquad f_1 = -\left[1 + (-1)^{n+1}\right]\frac{1}{n^2}$$
$$F_2 = \pi F_1 + \frac{2}{n} f_1 \qquad f_2 = -\frac{2}{n} F_1$$
$$F_3 = \pi^2 F_1 + \frac{3}{n} f_2 \qquad f_3 = -\frac{3}{n} F_2$$
$$F_4 = \pi^3 F_1 + \frac{4}{n} f_3 \qquad f_4 = -\frac{4}{n} F_3$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$
$$F_m = \pi^{m-1} F_1 + \frac{m}{n} f_{m-1} \qquad f_m = -\frac{m}{n} F_{m-1}$$

Werden die entsprechenden Werte eingesetzt, so erhalten wir für die F_1 nach geraden und ungeraden Indices geordnet:

$$F_1 = F_1$$
$$F_2 = \pi F_1 + \frac{2}{n} f_1$$
$$F_3 = \pi^2 F_1 - \frac{2.3}{n^2} F_1$$
$$F_4 = \pi^3 F_1 - \frac{3.4}{n^2} \pi F_1 - \frac{2.3.4}{n^3} f_1$$
$$F_5 = \pi^4 F_1 - \frac{4.5}{n^2} \pi^2 F_1 + \frac{2.3.4.5}{n^4} F_1$$
$$F_6 = \pi^5 F_1 - \frac{5.6}{n^2} \pi^3 F_1 + \frac{3.4.5.6}{n^4} \pi F_1 + \frac{2.3.4.5.6}{n^5} f_1$$
$$F_7 = \pi^5 F_1 - \frac{6.7}{n^2} . \pi^4 F_1 + \frac{4.5.6.7}{n^4} \pi^2 F_1 - \frac{2.3.4.5.6.7}{n^6} F_1$$

— — — — — — — — — — — — — —

Für F_{2m+1} ergibt sich, wenn wir das Gesetz allgemein annehmen

$$F_{2m+1} = F_1 \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} (-1)^{m-\lambda} \cdot \frac{(2m+1)!}{(2\lambda+1)!} \frac{\pi^{2\lambda}}{n^{2(m-\lambda)}}$$

$$= \frac{(2m+1)!}{n^{2m}} F_1 \sum_{\lambda=0}^{m} (-1)^{m-\lambda} \cdot \frac{(\pi n)^{2\lambda}}{(2\lambda+1)!}$$

$$F_{2m+1} = \frac{(2m+1)!}{n^{2m+2}} \sum_{\lambda=0}^{m} (-1)^{m+n+1-\lambda} \cdot \frac{(n\pi)^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!} \qquad \text{oder}$$

1. $$F_{2m+1} = \frac{(2m+1)!}{n^{2m+2}} \cdot (-1)^{m+n+1} \sum_{\lambda=0}^{m} (-1)^{\lambda} \frac{(n\pi)^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!}$$

Die Σ ist die Sinusreihe von $(n\pi)$.

Für die F_{2m} ergibt sich das folgende allgemeine Bildungsgesetz

$$F_{2m} = (-1)^{m-1} \cdot 2m! \frac{f_1}{n^{2m-1}} +$$

$$+ F_1 \sum_{\lambda=1}^{m} (-1)^{m-\lambda+n+1} \frac{2m!}{2\lambda!} \cdot \frac{\pi^{2\lambda}}{n^{2(m-\lambda)}}$$

$$= (-1)^m \cdot \frac{2m!}{n^{2m+1}} \left[1 + (-1)^{n+1}\right] +$$

$$+ \frac{2m!}{n^{2n+1}} \sum_{\lambda=1}^{m} (-1)^{m+n-\lambda+1} \frac{(n\pi)^{2\lambda}}{2\lambda!}$$

$$= \frac{2m!}{n^{2m+1}} \left[(-1)^m + (-1)^{m+n+1} + \sum_{\lambda=1}^{m} (-1)^{m+n+1-\lambda} \cdot \frac{(n\pi)^{2\lambda}}{2\lambda!}\right]$$

$$= \frac{2m!}{n^{2m+1}} \left[(-1)^m + \sum_{\lambda=0}^{m} (-1)^{m+n+1-\lambda} \frac{(n\pi)^{2\lambda}}{2\lambda!}\right]$$

2. $$F_{2m} = \frac{2m!}{n^{2m+1}} \left[(-1)^m + (-1)^{m+n+1} \sum_{\lambda=0}^{m} (-1)^{\lambda} \cdot \frac{(n\pi)^{2}}{2\lambda!}\right]$$

Die Σ ist die Cosinusreihe von $(n\pi)$.

Die Integrale f ergeben sich wie folgt

$$f_m = -\frac{m}{n} F_{m-1}$$

$m = 2m$

$$f_{2m} = -\frac{2m}{n} F_{2m-1}$$

$$= \frac{2m!}{n^{2m+1}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} (-1)^{m+n+1-\lambda} \cdot \frac{(n\pi)^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!}$$

3. $$\underline{f_{2m} = (-1)^{m+n+1} \cdot \frac{2m!}{n^{2m+1}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} (-1)^{\lambda} \cdot \frac{(n\pi)^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!}}$$

$m = 2m+1$ (Σ = Sinusreihe von $n\pi$).

$$f_{2m+1} = -\frac{2m+1}{n} F_{2m}$$

4. $$\underline{f_{2m+1} = -\frac{(2m+1)!}{n^{2m+2}} \Big[(-1)^m}$$

$$\underline{+ (-1)^{m+n+1} \sum_{\lambda=0}^{m} (-1)^{\lambda} \frac{(n\pi)^{2\lambda}}{2\lambda!} \Big]}$$

(Σ = Cosinusreihe von $n\pi$).

Wir haben also:

I. $$\int_0^{\pi} x^{2m+1} \sin nx = (-1)^{m+n+1} \cdot \frac{(2m+1)!}{n^{2m+2}} \sum_{\lambda=0}^{m} (-1)^{\lambda} \frac{(n\pi)^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!}$$

II. $$\int_0^{\pi} x^{2m} \sin nx = \frac{2m!}{n^{2m+1}} \Big[(-1)^m +$$

$$+ (-1)^{m+n+1} \sum_{\lambda=0}^{m} (-1)^{\lambda} \frac{(n\pi)^{2\lambda}}{2\lambda!} \Big]$$

III. $$\int_0^{\pi} x^{2m+1} \cos nx = -\frac{(2m+1)!}{n^{2m+2}} \Big[(-1)^m +$$

$$+ (-1)^{m+n+1} \sum_{\lambda=0}^{m} (-1)^{\lambda} \frac{(n\pi)^{2\lambda}}{2\lambda!} \Big]$$

$$\text{IV.} \quad \int_0^{\pi} x^{2m} \cos nx = (-1)^{m+n+1} \frac{2m!}{n^{2m+1}} \sum_{\lambda=0}^{m-1} (-1)^{\lambda} \frac{(n\pi)^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!}$$

Für $m = 1$ erhalten wir aus I x III

$$\int_0^{\pi} x^3 \sin nx = (-1)^n \frac{3!}{n^4} \left[n\pi - \frac{(n\pi)^3}{3!} \right]$$

$$\int_0^{\pi} x^3 \cos nx = \frac{3!}{n^4} \left[1 + (-1)^{n+1} \left(1 - \frac{(n\pi)^2}{2!} \right) \right]$$

Für $n = 1$.

$$\int_0^{\pi} x^3 \sin x = \pi^3 \frac{\pi}{3!}$$

$$\int_0^{\pi} x^3 \cos x = 12 - 3\pi^2$$

etc.

Da die Integrale bei Entwicklungen von Funktionen nach trig. Reihen auftreten, so scheint mir ihre allgemeine Lösung von einigem Interesse zu sein.