

Ueber die Integrale $x^m \cos nx \, dx$ und $x^m \sin nx \, dx$ (m und n ganze Zahlen) [mit den Integralgrenzen von 0 bis]

Autor(en): **Bohren, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): - **(1906)**

Heft 1609-1628

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-319165>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

A. Bohren.

Ueber

**die Integrale $\int_0^\pi x^m \cos nx \, dx$ und $\int_0^\pi x^m \sin nx \, dx$
(m und n ganze Zahlen)**

(Eingereicht den 5. Juli 1906).

In Tabellen über bestimmte Integrale finden sich¹⁾

$$\int_0^\pi x \sin nx \, dx = \frac{(-1)^{n+1} \pi}{n}$$

$$\int_0^\pi x \cos nx \, dx = -\frac{1}{n^2} [1 + (-1)^{n+1}]$$

$$\int_0^\pi x^2 \sin nx \, dx = \frac{2}{n^3} \left[-1 + (-1)^n \left(1 - \frac{n^2 \pi^2}{2} \right) \right]$$

$$\int_0^\pi x^2 \cos nx \, dx = (-1)^n \frac{2\pi}{n^2}$$

Mit Hilfe dieser Spezialfälle lassen sich nun auch die oben angegebenen Integrale leicht ausführen.

Durch partielle Integration erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} F(m) &= \int_0^\pi x^m \sin nx \, dx = -\left(\frac{1}{n} x^m \cos nx \right)_0^\pi + \frac{m}{n} \int_0^\pi x^{m-1} \cos nx \, dx \\ &= (-1)^{n+1} \frac{\pi^m}{n} + \frac{m}{n} \int_0^\pi x^{m-1} \cos nx \, dx \end{aligned}$$

$$f(m) = \int_0^\pi x^m \cos nx \, dx = -\frac{m}{n} \int_0^\pi x^{m-1} \sin nx \, dx$$

¹⁾ Nouvelles tables d'intégrales définies de Bierens de Haan.
Meyer, Bestimmte Integrale.

also
$$F(m) = (-1)^{n+1} \frac{\pi^m}{n} + \frac{m}{n} f(m-1)$$

$$f(m) = -\frac{m}{n} F(m-1)$$

Mit Hilfe dieser Rekursionsformeln gelangen wir auf $F_{(1)}$ und $f_{(1)}$, mit den oben angegebenen Werten.

Es ist demnach

$F_1 = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{n}$	$f_1 = -\left[1 + (-1)^{n+1}\right] \frac{1}{n^2}$
$F_2 = \pi F_1 + \frac{2}{n} f_1$	$f_2 = -\frac{2}{n} F_1$
$F_3 = \pi^2 F_1 + \frac{3}{n} f_2$	$f_3 = -\frac{3}{n} F_2$
$F_4 = \pi^3 F_1 + \frac{4}{n} f_3$	$f_4 = -\frac{4}{n} F_3$
.
$F_m = \pi^{m-1} F_1 + \frac{m}{n} f_{m-1}$	$f_m = -\frac{m}{n} F_{m-1}$

Werden die entsprechenden Werte eingesetzt, so erhalten wir für die F_1 nach geraden und ungeraden Indices geordnet:

$$F_1 = F_1$$

$$F_2 = \pi F_1 + \frac{2}{n} f_1$$

$$F_3 = \pi^2 F_1 - \frac{2.3}{n^2} F_1$$

$$F_4 = \pi^3 F_1 - \frac{3.4}{n^2} \pi F_1 - \frac{2.3.4}{n^3} f_1$$

$$F_5 = \pi^4 F_1 - \frac{4.5}{n^2} \pi^2 F_1 + \frac{2.3.4.5}{n^4} F_1$$

$$F_6 = \pi^5 F_1 - \frac{5.6}{n^2} \pi^3 F_1 + \frac{3.4.5.6}{n^4} \pi F_1 + \frac{2.3.4.5.6}{n^5} f_1$$

$$F_7 = \pi^5 F_1 - \frac{6.7}{n^2} \pi^4 F_1 + \frac{4.5.6.7}{n^4} \pi^2 F_1 - \frac{2.3.4.5.6.7}{n^6} F_1$$



Für F_{2m+1} ergibt sich, wenn wir das Gesetz allgemein annehmen

$$\begin{aligned} F_{2m+1} &= F_1 \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} (-1)^{m-\lambda} \frac{(2m+1)!}{(2\lambda+1)!} \frac{\pi^{2\lambda}}{n^{2(m-\lambda)}} \\ &= \frac{(2m+1)!}{n^{2m}} F_1 \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} (-1)^{m-\lambda} \frac{(\pi n)^{2\lambda}}{(2\lambda+1)!} \\ F_{2m+1} &= \frac{(2m+1)!}{n^{2m+2}} \sum_{\lambda=0}^m (-1)^{m+n+1-\lambda} \frac{(n\pi)^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!} \quad \text{oder} \end{aligned}$$

$$1. \quad \underline{F_{2m+1} = \frac{(2m+1)!}{n^{2m+2}} \cdot (-1)^{m+n+1} \sum_{\lambda=0}^m (-1)^\lambda \frac{(n\pi)^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!}}$$

Die Σ ist die Sinusreihe von $(n\pi)$.

Für die F_{2m} ergibt sich das folgende allgemeine Bildungsgesetz

$$\begin{aligned} F_{2m} &= (-1)^{m-1} 2m! \frac{f_1}{n^{2m-1}} + \\ &\quad + F_1 \sum_{\lambda=1}^m (-1)^{m-\lambda+n+1} \frac{2m!}{2\lambda!} \cdot \frac{\pi^{2\lambda}}{n^{2(m-\lambda)}} \\ &= (-1)^m \frac{2m!}{n^{2m+1}} \left[1 + (-1)^{n+1} \right] + \\ &\quad + \frac{2m!}{n^{2n+1}} \sum_{\lambda=1}^m (-1)^{m+n-\lambda+1} \frac{(n\pi)^{2\lambda}}{2\lambda!} \\ &= \frac{2m!}{n^{2m+1}} \left[(-1)^m + (-1)^{m+n+1} + \sum_{\lambda=1}^m (-1)^{m+n+1-\lambda} \frac{(n\pi)^{2\lambda}}{2\lambda!} \right] \\ &= \frac{2m!}{n^{2m+1}} \left[(-1)^m + \sum_{\lambda=0}^m (-1)^{m+n+1-\lambda} \frac{(n\pi)^{2\lambda}}{2\lambda!} \right] \\ 2. \quad \underline{F_{2m} = \frac{2m!}{n^{2m+1}} \left[(-1)^m + (-1)^{m+n+1} \sum_{\lambda=0}^m (-1)^\lambda \frac{(n\pi)^{2\lambda}}{2\lambda!} \right]} \end{aligned}$$

Die Σ ist die Cosinusreihe von $(n\pi)$.

Die Integrale f ergeben sich wie folgt

$$f_m = -\frac{m}{n} F_{m-1}$$

$$m = 2m$$

$$f_{2m} = -\frac{2m}{n} F_{2m-1}$$

$$= \frac{2m!}{n^{2m+1}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} (-1)^{m+n+1-\lambda} \frac{(n\pi)^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!}$$

$$3. \quad \underline{f_{2m} = (-1)^{m+n+1} \frac{2m!}{n^{2m+1}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} (-1)^\lambda \frac{(n\pi)^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!}}$$

$$m = 2m + 1 \quad (\Sigma = \text{Sinusreihe von } n\pi).$$

$$f_{2m+1} = -\frac{2m+1}{n} F_{2m}$$

$$4. \quad \underline{f_{2m+1} = -\frac{(2m+1)!}{n^{2m+2}} \left[(-1)^m \right.$$

$$\left. + (-1)^{m+n+1} \sum_{\lambda=0}^m (-1)^\lambda \frac{(n\pi)^{2\lambda}}{2\lambda!} \right]}$$

$$(\Sigma = \text{Cosinusreihe von } n\pi).$$

Wir haben also:

$$I. \quad \int_0^\pi x^{2m+1} \sin nx = (-1)^{m+n+1} \frac{(2m+1)!}{n^{2m+2}} \sum_{\lambda=0}^m (-1)^\lambda \frac{(n\pi)^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!}$$

$$II. \quad \int_0^\pi x^{2m} \sin nx = \frac{2m!}{n^{2m+1}} \left[(-1)^m + \right. \\ \left. + (-1)^{m+n+1} \sum_{\lambda=0}^m (-1)^\lambda \frac{(n\pi)^{2\lambda}}{2\lambda!} \right]$$

$$III. \quad \int_0^\pi x^{2m+1} \cos nx = -\frac{(2m+1)!}{n^{2m+2}} \left[(-1)^m + \right. \\ \left. + (-1)^{m+n+1} \sum_{\lambda=0}^m (-1)^\lambda \frac{(n\pi)^{2\lambda}}{2\lambda!} \right]$$

$$\text{IV. } \int_0^{\pi} x^{2m} \cos nx = (-1)^{m+n+1} \frac{2m!}{n^{2m+1}} \sum_{\lambda=0}^{m-1} (-1)^{\lambda} \frac{(n\pi)^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!}$$

Für $m=1$ erhalten wir aus I x III

$$\int_0^{\pi} x^3 \sin nx = (-1)^n \frac{3!}{n^4} \left[n\pi - \frac{(n\pi)^3}{3!} \right]$$

$$\int_0^{\pi} x^3 \cos nx = \frac{3!}{n^4} \left[1 + (-1)^{n+1} \left(1 - \frac{(n\pi)^2}{2!} \right) \right]$$

Für $n=1$.

$$\int_0^{\pi} x^3 \sin x = \pi \frac{3}{3!} \pi$$

$$\int_0^{\pi} x^3 \cos x = 12 - 3\pi^2$$

etc.

Da die Integrale bei Entwicklungen von Funktionen nach trig. Reihen auftreten, so scheint mir ihre allgemeine Lösung von einigem Interesse zu sein.
