O. Schenker.

Neun Kreisscharen am Dreieck.

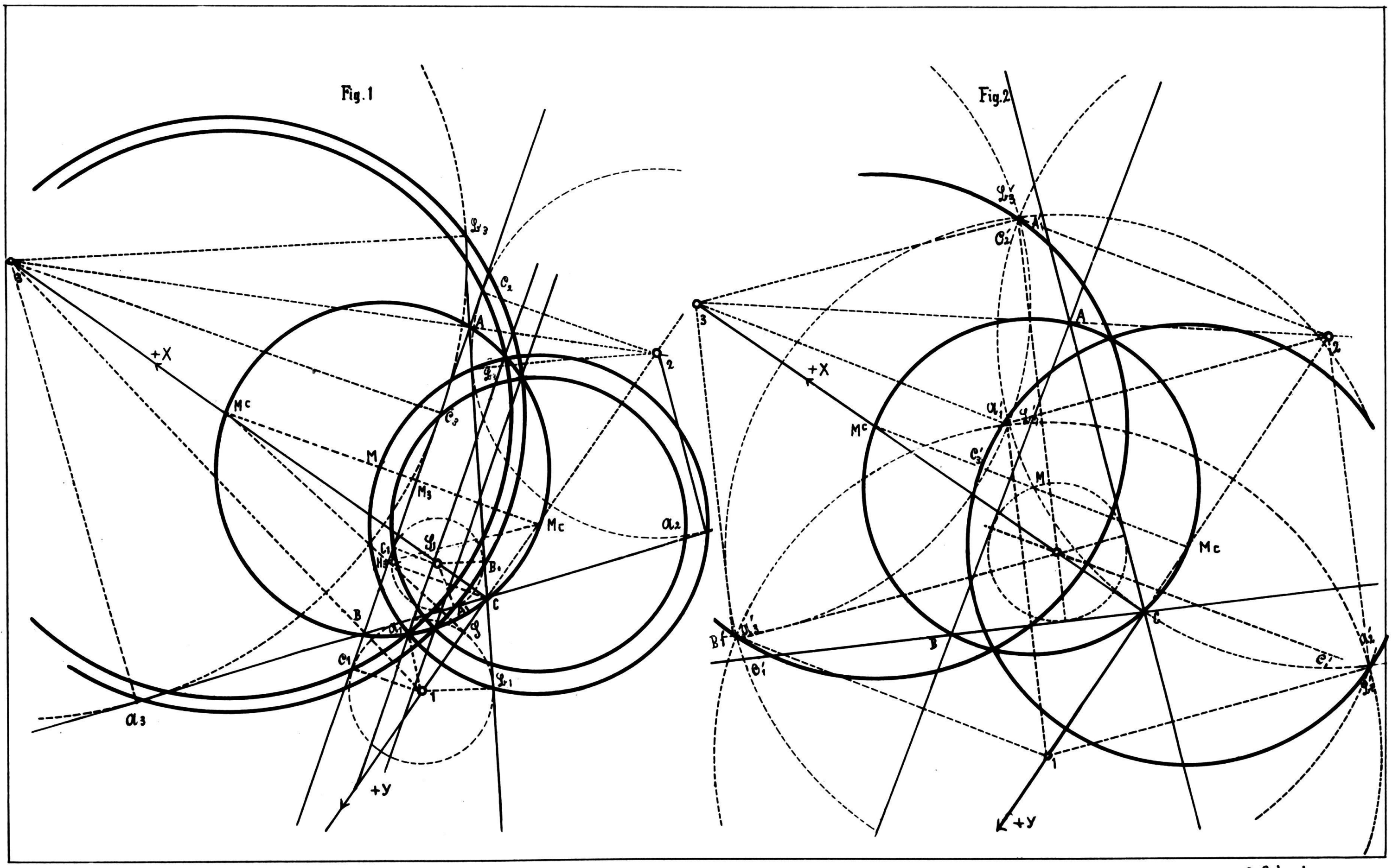
(Allgemeiner Fall und Übertragung auf die Ankreise).

(Eingereicht im Dezember 1906).

1. Satz: Im ebenen Dreieck ABC treffen die innern und äussern Winkelhalbierenden (CM^C und CM_C) eines Winkels (C) den Umkreis in zwei Punkten M^C und M_C, welchen die Eigenschaft zukommt, dass die Kreise mit M^C und M_C zu Zentren gezogen durch die zwei zugehörigen Berührungspunkte (A_1 und B_1), des Inkreises und durch seinen Berührungspunkt (C_1) an der dritten Seite, sich im Umkreis schneiden.

2. Satz: Im ebenen Dreieck ABC treffen die innern und äussern Winkelhalbierenden CM^C und CM_C eines Winkels (C) den Umkreis in zwei Punkten M^C und M_C, welchen die Eigenschaft zukommt, dass die Kreise mit M^C und M_C zu Zentren gezogen durch die zwei zugehörigen Berührungspunkte ($\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{B}_3$) des vom Winkel C eingeschlossenen Ankreises und durch seinen Berührungspunkt ($\mathfrak{C}_3$) an der dritten Seite, sich im Umkreis schneiden.

3. Satz: Im Dreieck ABC treffen die äussern und innern Winkelhalbierenden (CM_C und CM^C) eines Winkels (C) den Umkreis in zwei Punkten (M_C und M^C), welche an die Eigenschaft gebunden sind, dass die Kreise mit M_C und M^C zu Zentren gezogen durch die zugehörigen Berührungspunkte ($\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ bezw. $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_2$) eines der beiden Ankreise, welche dem Winkel A bezw. dem Winkel B gegenüber liegen, und durch seinen Berührungspunkt ($\mathfrak{C}_1$ resp. $\mathfrak{C}_2$) an der dritten Seite, sich im Umkreis schneiden.



O. Schenker.

Festlegung des Koordinatensystems.

Als Koordinatenaxen, wählen wir die Winkelhalbierenden von C mit der angegebenen Richtung (S. Figur). Der Umkreisdurchmesser sei die Längeneinheit, so sind die Dreiecksseiten sin A, sin B und sin C und der Inkreis hat den Radius:

$$\varrho = 2 \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}$$

$$\Bigg(\text{denn } \triangle ABC = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{2} \cdot \varrho =$$

$$\frac{\sin A . \sin B . \sin C}{2} \quad \text{woraus} \quad \varrho = 8 \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} \cdot$$

$$\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} : \; 4 \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}$$

wegen $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} . \cos\frac{C}{2}$

oder $\varrho = 2 \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}\Bigg)$

Der Ankreis (Zentrum O_3), welcher C gegenüberliegt, hat den Radius: $\varrho_3 = 2 \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}$

$$\Bigg(\text{denn } \triangle ABC = \frac{\sin A + \sin B - \sin C}{2} \cdot \varrho_3$$

$$= \frac{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}{2} \qquad \text{woraus}$$

$$\varrho_3 = 8 \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}$$

$$: 4 \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} \qquad \text{wegen}$$

$$\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} \qquad \text{oder}$$

$$\varrho_3 = 2 \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}\Bigg)$$

Der Ankreis (Zentrum O_1), welcher A gegenüberliegt, hat den Radius: $\varrho_1 = 2\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}$

$$\left(\text{denn } \triangle ABC = \frac{\sin B + \sin C - \sin A}{2}\cdot\varrho_1 = \frac{\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}{2},\right.$$

$$\text{woraus } \varrho_1 = 8\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$$

$$: 4\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}, \text{ wegen } \sin B + \sin C - \sin A$$

$$\left. = 4\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\right)$$

M und O seien die Zentren des Umkreises, bezw. des Inkreises und die Berührungspunkte der Kreise O, O_1 und O_3 an den Seiten BC, CA und AB, A_1, B_1, C_1 | bezw. $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ | bezw. $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{C}_3$ | .

Berücksichtigt man, dass $\sphericalangle$ (MC + X)

$$= \sphericalangle\frac{B - A}{2} = \sphericalangle (+ XOC_1),$$

(Man denkt sich dabei einen positiven Winkel durch Drehung eines Strahls um seinen Anfangspunkt im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers entstanden oder auch im Sinne der Bewegung der Erde um ihre Axe oder um die Sonne), so leitet man an Hand der Figur 1 die Koordinaten ab, wie sie in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind:

	x	y
A_1	$2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos^2\frac{C}{2}$	$2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$
B_1	$2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos^2\frac{C}{2}$	$-2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$
C_1	$2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$	$-2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$
$\mathfrak{A}_1$	$2\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$	$2\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$
$\mathfrak{B}_1$	$-2\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$	$2\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$
$\mathfrak{C}_1$	$2\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$	$2\cos\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}-2\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$
$\mathfrak{A}_3$	$2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos^2\frac{C}{2}$	$2\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$
$\mathfrak{B}_3$	$2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos^2\frac{C}{2}$	$-2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$
$\mathfrak{C}_3$	$2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}-2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$	$2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$

Hieran schliessen sich noch die Koordinaten von M, M_C und M^C:

	x	y
M	$\frac{1}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2}$	$\frac{1}{2} \sin\frac{A-B}{2}$
M_C	0	$\sin\frac{A-B}{2}$
M^C	$\cos\frac{A-B}{2}$	0

Beweis zu Satz 1.

Der Kreis aus M_C durch C_1 hat die Gleichung:

$$x^2+\left(y-\sin\frac{A-B}{2}\right)^2=\left[2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\right.$$
$$\left.+2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}\right]^2$$
$$+\sin^2\frac{A-B}{2}\left(1+2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\right)^2$$

und der Kreis aus M^C durch A_1:

$$\left(x-\cos\frac{A-B}{2}\right)^2+y^2=\left(\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos^2\frac{C}{2}\right)^2$$
$$+4\left(\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\right)^2$$

---

daher lautet die Gleichung der gemeinsamen Sehne:

$$2x\cos\frac{A-B}{2}-2y\cdot\sin\frac{A-B}{2}=4\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}$$
$$-4\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}\cdot\cos^4\frac{C}{2}$$
$$-4\cdot\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}\cdot\cos^2\frac{C}{2}\cdot\sin^2\frac{C}{2}$$

$$+ 4\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}\cdot\sin^2\frac{C}{2} + 8\cdot\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$+ 4\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\sin^2\frac{A-B}{2}$$

$$+ 4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos^2\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$= 4\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}\cdot\sin^2\frac{C}{2} + 4\cdot\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}\cdot\sin^2\frac{C}{2}$$

$$+ 8\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$+ 4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\sin^2\frac{A-B}{2}$$

$$+ 4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos^2\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$= 8\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}\cdot\sin^2\frac{C}{2} + 8\cdot\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$+ 4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\sin^2\frac{A-B}{2}$$

$$+ 4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos^2\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$= 16\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}$$

$$+ 4\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\sin^2\frac{A-B}{2}$$

$$+ 4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos^2\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$= 8\cdot\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}$$

$$+ 8\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}$$

$$+ 4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\sin^2\frac{A-B}{2}$$

$$+ 4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos^2\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$= 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \left[\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \right.$$

$$+ \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2}$$

$$+ \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2}$$

$$\left. + \cos \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \right]$$

$$+ 8 \cdot \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2}$$

$$- 8 \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2}$$

$$+ 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A - B}{2}$$

$$= 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \left[\sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \right.$$

$$\left. + \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \right]$$

$$+ 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A - B}{2}$$

$$= 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} + 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

$$= 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \left[\cos \frac{A + B}{2} + \cos \frac{A - B}{2} \right]$$

$$= 8 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2}$$

Die Gleichung der gemeinsamen Sehne hat also die endgültige Gestalt:

$$\underline{\underline{2 x \cos \frac{A - B}{2} - 2 y \cdot \sin \frac{A - B}{2} = 8 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2}}} \tag{1}$$

Die Gleichung des Umkreises ist:

$$\left(x - \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \sin \frac{A-B}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

und daher lautet die Gleichung der gemeinsamen Sehne für die Kreise M^C und M:

$$- x \cdot \cos \frac{A-B}{2} + y \cdot \sin \frac{A-B}{2} = 4 \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2}$$

$$- 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

$$= 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \left[\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} - \cos \frac{A-B}{2}\right]$$

$$= - 4 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \qquad \text{oder}$$

$$\underline{\underline{2x \cdot \cos \frac{A-B}{2} - 2y \cdot \sin \frac{A-B}{2} = 8 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2}}} \qquad (1')$$

da (1) mit (1′) identisch ist, so ist der erste Satz bewiesen.

Beweis zu Satz 2.

Der Kreis aus M^C durch $\mathfrak{A}_3$ hat die Gleichung

$$\left(x - \cos \frac{A-B}{2}\right)^2 + y^2 = \left(2 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} - \cos \frac{A-B}{2}\right)^2$$

$$+ 4 \left(\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}\right)^2$$

und der Kreis aus M_C durch $\mathfrak{C}_3$

$$x^2 + \left(y - \sin \frac{A-B}{2}\right)^2 = \left(2 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2}\right.$$

$$\left.- 2 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2}\right)^2$$

$$+ \sin^2 \frac{A-B}{2} \left(1 - 2 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}\right)^2$$

und daher hat die gemeinsame Sehne die Gleichung:

$$- 2\,x \cdot \cos\frac{A-B}{2} + 2\,y \cdot \sin\frac{A-B}{2} = 4\cos^2\frac{A}{2} \cdot \cos^2\frac{B}{2} \cdot \cos^4\frac{C}{2}$$

$$+ 4\cos^2\frac{A}{2} \cdot \cos^2\frac{B}{2} \cdot \cos^2\frac{C}{2} \cdot \sin^2\frac{C}{2}$$

$$- 4 \cdot \cos^2\frac{A}{2} \cdot \cos^2\frac{B}{2}$$

$$- 4 \cdot \cos^2\frac{A}{2} \cdot \cos^2\frac{B}{2} \cdot \sin^2\frac{C}{2}$$

$$- 4\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos^2\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2}$$

$$+ 8 \cdot \cos^2\frac{A}{2} \cdot \cos^2\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2}$$

$$+ 4 \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} \cdot \sin^2\frac{A-B}{2}$$

$$= - 8\cos^2\frac{A}{2} \cdot \cos^2\frac{B}{2} \cdot \sin^2\frac{C}{2}$$

$$+ 8 \cdot \cos^2\frac{A}{2} \cdot \cos^2\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2}$$

$$- 4 \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos^2\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2}$$

$$+ 4 \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} \cdot \sin^2\frac{A-B}{2}$$

$$= 8\cos^2\frac{A}{2} \cdot \cos^2\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right]$$

$$- 4 \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos^2\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2}$$

$$+ 4 \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} \cdot \sin^2\frac{A-B}{2}$$

$$= 16 \cdot \cos^2\frac{A}{2} \cdot \cos^2\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}$$

$$- 4 \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos^2\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2}$$

$$+ 4 \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} \cdot \sin^2\frac{A-B}{2}$$

$$= 8 \cdot \cos^2\frac{A}{2} \cdot \cos^2\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}$$

$$+ 8 \cdot \cos^2\frac{A}{2} \cdot \cos^2\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}$$

$$+ 4\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} \cdot \sin^2\frac{A-B}{2}$$

$$- 4\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos^2\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2}$$

$$= 4\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}\Big[\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2}$$

$$+ \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2}$$

$$+ \sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2}\Big]$$

$$+ 8\cos^2\frac{A}{2} \cdot \cos^2\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}$$

$$- 8\cos^2\frac{A}{2} \cdot \cos^2\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}$$

$$- 4\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos^2\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2}$$

$$= 4 \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}\Big[\sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}$$

$$+ \cos\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}\Big]$$

$$+ 8 \cdot \cos^2\frac{A}{2} \cdot \cos^2\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}$$

$$- 8\cos^2\frac{A}{2} \cdot \cos^2\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}$$

$$- 4\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos^2\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2}$$

$$= 4 \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} \cdot \cos^2\frac{C}{2}$$

$$-4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos^2\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$=4\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos^2\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right]$$

$$=-8\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos^2\frac{C}{2}$$

und die Gleichung der gemeinsamen Sehne hat endlich die Gestalt:

$$\underline{\underline{2x\cdot\cos\frac{A-B}{2}-2y\cdot\sin\frac{A-B}{2}=8\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos^2\frac{C}{2}}} \qquad (2)$$

Da dem Umkreis die Gleichung zukommt:

$$\left(x-\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

so ist die Gleichung der gemeinsamen Sehne für die Kreise M^C und M:

$$-x\cdot\cos\frac{A-B}{2}+y\cdot\sin\frac{A-B}{2}=4\cos^2\frac{A}{2}\cdot\cos^2\frac{B}{2}\cdot\cos^2\frac{C}{2}$$

$$-4\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos^2\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos^2\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right]$$

$$=-4\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos^2\frac{C}{2} \qquad \text{oder}$$

$$\underline{\underline{2x\cdot\cos\frac{A-B}{2}-2y\cdot\sin\frac{A-B}{2}=8\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos^2\frac{C}{2}}} \qquad (2')$$

Die Übereinstimmung von (2) und (2′) beweist den 2. Satz:

Folgerung aus (1) und (2).

Die Gleichungen (1) und (2) stimmen miteinander überein und da sie die gemeinsamen Sehnen von Kreissystemen bestimmen, die einen Kreis (nämlich den Umkreis) gemein haben, so sind diese beiden Kreissysteme identisch.

Die Punkte A_1, B_1, $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{B}_3$ liegen auf einem Kreis mit Zentrum M^C.

Beweis zu Satz 3.

Der Kreis von M_C durch $\mathfrak{A}_1$ hat die Gleichung

$$x^2 + \left(y - \sin\frac{A-B}{2}\right)^2 = 4\cos^2\frac{B}{2}\cdot\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{C}{2}\cdot\cos^2\frac{C}{2}$$
$$+ \left(\sin\frac{A-B}{2} - 2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}\sin^2\frac{C}{2}\right)^2$$

und der Kreis aus M^C durch $\mathfrak{C}_1$:

$$\left(x - \cos\frac{A-B}{2}\right)^2 + y^2$$
$$= \cos^2\frac{A-B}{2}\left(1 - 2\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\right)^2$$
$$+ \left(2\cos\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{A}{2} - 2\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}\right)^2$$

die gemeinsame Sehne hat daher die Gleichung:

$$2x\cdot\cos\frac{A-B}{2} - 2y\cdot\sin\frac{A-B}{2} = 4\cdot\cos^2\frac{B}{2}\cdot\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{C}{2}$$
$$- 4\cdot\cos^2\frac{B}{2}\cdot\sin^2\frac{A}{2}$$
$$- 4\cdot\cos^2\frac{B}{2}\cdot\sin^2\frac{A}{2}\cdot\cos^2\frac{C}{2}$$
$$- 4\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$
$$+ 4\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\cos^2\frac{A-B}{2}$$
$$+ 8\cdot\cos^2\frac{B}{2}\cdot\sin^2\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$
$$= - 8\cdot\cos^2\frac{B}{2}\cdot\sin^2\frac{A}{2}\cdot\cos^2\frac{C}{2}$$

$$+ 8\cos^2\frac{B}{2}\cdot\sin^2\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$-4\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$+4\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\cos^2\frac{A-B}{2}$$

$$= 8\cdot\cos^2\frac{B}{2}\cdot\sin^2\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A-B}{2}-\sin\frac{A+B}{2}\right)$$

$$-4\cdot\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$+4\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\cos^2\frac{A-B}{2}$$

$$= -16\cos^2\frac{B}{2}\cdot\sin^2\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}$$

$$-4\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$+4\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\cos^2\frac{A-B}{2}$$

$$= -8\cdot\cos^2\frac{B}{2}\cdot\sin^2\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}$$

$$-8\cdot\cos^2\frac{B}{2}\cdot\sin^2\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}$$

$$+4\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\cos^2\frac{A-B}{2}$$

$$-4\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$= 4\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\Big[\cos^2\frac{A}{2}\cdot\cos^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}$$

$$-\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\Big]$$

$$-8\cdot\cos^2\frac{B}{2}\cdot\sin^2\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}$$

$$+ 8 \cos^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}$$

$$- 4 \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}$$

$$= 4 \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \left[\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \right.$$

$$\left. - \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \right]$$

$$- 4 \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}$$

$$= 4 \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2}$$

$$- 4 \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}$$

$$= 4 \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} \left(\sin \frac{A+B}{2} - \sin \frac{A-B}{2} \right)$$

$$= 8 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2}$$

und die Gleichung der gemeinsamen Sehne gewinnt daher die Gestalt:

$$\underline{2 x \cdot \cos \frac{A-B}{2} - 2 y \cdot \sin \frac{A-B}{2}}$$

$$\underline{= 8 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2}} \tag{3}$$

Mit dem Umkreis:

$$\left(x - \frac{1}{2} \cos \frac{A-B}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \sin \frac{A-B}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

bestimmt der Kreis aus M_C die gemeinsame Sehne von der Gleichung:

$$x \cos \frac{A-B}{2} - y \cdot \sin \frac{A-B}{2}$$

$$= 4 \cdot \cos^2\frac{B}{2} \cdot \sin^2\frac{A}{2} \cdot \sin^2\frac{C}{2} - 4\cos\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin^2\frac{C}{2} \cdot \sin\frac{A-B}{2}$$

$$= 4 \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin^2\frac{C}{2}\left[\sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A-B}{2}\right]$$

$$= 4 \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \sin^2\frac{C}{2} \qquad \text{oder}$$

$$\underline{\underline{2x \cdot \cos\frac{A-B}{2} - 2y \cdot \sin\frac{A-B}{2} = 8 \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \sin^2\frac{C}{2}}} \qquad (3')$$

Da (3) mit (3′) übereinstimmt, so ist auch dieser Satz bewiesen.

Folgerung: Wenn wir in (3) und (3′) rechter Hand A mit B vertauschen, so erhalten wir die Gleichung für die gemeinsamen Sehnen zwischen dem Umkreis und dem Kreise aus M_C durch $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_2$ bezw. dem Kreise aus M^C durch $\mathfrak{C}_2$. Da hiebei (3) und (3′) ungeändert bleiben, so heisst das:

Die Kreissysteme, welche aus den Ankreisen O_1 und O_2 (nach Satz 3) abgeleitet werden können, sind identisch; ferner:

Die Punkte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_2$ liegen auf einem Kreis mit Zentrum M_C:

Konstruktion der durch Satz (1) und (3) bestimmten gemeinsamen Sehnen.

$$x \cdot \cos\frac{A-B}{2} - y \cdot \sin\frac{A-B}{2}$$

$$= 4 \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos^2\frac{C}{2}$$

$$= \sin A \cdot \sin B\,\frac{1 + \operatorname{Cos} C}{2}$$

ist die Gleichung der durch Satz (1) und (2) gegebenen gemeinsamen Sehnen. Ihr Abstand vom Koordinatenanfang ist daher:

$$\sin A \cdot \sin B \cdot \frac{1 + \cos C}{2}$$

$$x \cdot \cos\frac{A-B}{2} - y \cdot \sin\frac{A-B}{2}$$
$$= 4 \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \sin^2\frac{C}{2}$$

ist die Gleichung der durch den dritten Satz bestimmten gemeinsamen Sehne und da $4 \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \sin^2\frac{C}{2}$

$$= \sin A \cdot \sin B \cdot \frac{1 - \cos C}{2}$$

so ist die Entfernung vom Koordinatenanfang

$$\sin A \cdot \sin B \cdot \frac{1 - \cos C}{2}$$

um daher die Teilpunkte dieser Sehnen auf der Höhe CH_3 (H_3 = Höhenfusspunkt zu C) zu bestimmen, bezeichne man die Mitte von AB mit M_3, ziehe $M^C H_3$ und $M_C C$ und verbinde ihren Schnittpunkt S mit M_3, so erhalten wir den einen Teilpunkt; zieht man aber $M^C C$ und $M_C H_3$ und verbindet ihren Schnittpunkt S^1 mit M_3, so bekommt man den andern Teilpunkt.

Besonderer Fall: Im Falle von $C = 90^0$ stimmen die Gleichungen (1) und (3) mit einander überein, d. h. die beiden aus der Ecke C abgeleiteten Kreissysteme fallen zusammen.

Durch die bewiesenen Sätze wird die eine Wurzel von quadratischen Gleichungen geometrisch zur Darstellung gebracht. Im folgenden soll auch die andere Wurzel geometrisch anschaulich gemacht werden. Um uns kürzer ausdrücken zu können, geben wir folgende

Definitionen.

Die Ergänzung eines Berührungsradius (zu Kreis O, O_1, O_2 oder O_3) zum Strahle heissen wir Berührungsstrahl (mit O, O_1, O_2 oder O_3 zum Anfangspunkt). Die Ergänzung eines Berührungsstrahls zur Geraden heissen wir Ergänzungsstrahl. Den Punkt auf einem Berührungsstrahl im Abstande 1 vom Anfangspunkt bezeichnen wir als Einheitspunkt und den Punkt auf dem Ergänzungsstrahl im Abstand 1 vom Anfangspunkt Ergänzungspunkt. Alsdann haben wir folgende Sätze:

4. Satz: Im ebenen Dreieck ABC treffen die innern und äussern Winkelhalbierenden (CM^C und CM_C) eines Winkels (C) den Umkreis (Zentrum M) in 2 Punkten (M^C und M_C), welchen die Eigenschaft zukommt, dass die Kreise aus M^C und M_C durch die zugehörigen Ergänzungspunkte (A_1' und B_1') des Inkreises bezw. durch seinen Ergänzungspunkt (C_1') an der dritten Seite sich im Umkreis schneiden.

5. Satz: Im Dreieck ABC treffen die innern und äussern Winkelhalbierenden (CM^C und CM_C) eines Winkels (C) den Umkreis in 2 Punkten (M^C und M_C), welche durch die Eigenschaft ausgezeichnet sind, dass die Kreise aus M^C und M_C durch die zugehörigen Einheitspunkte ($\mathfrak{A}_3'$ und $\mathfrak{B}_3'$) des der Ecke C gegenüberliegenden Ankreises bezw. durch seinen Einheitspunkt ($\mathfrak{C}_3'$) an der dritten Seite, sich im Umkreis schneiden.

6. Satz: Im Dreieck ABC treffen die äussern und innern Winkelhalbierenden (CM_C und CM^C) eines Winkels (C) den Umkreis in 2 Punkten (M_C und M^C), welche die Eigenschaft zeigen, dass die Kreise aus M_C und M^C durch die zugehörigen Einheitspunkte ($\mathfrak{A}_2'$ und $\mathfrak{B}_2'$) des dem Winkel B gegenüberliegenden Ankreises bezw. durch seinen Einheitspunkt ($\mathfrak{C}_2'$) an der dritten Seite, sich im Umkreis schneiden.

Bestimmung der Koordinaten.

Seien A_1', B_1' und C_1' die Ergänzungspunkte des Inkreises, $\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{B}_2'$, $\mathfrak{C}_2'$ und $\mathfrak{A}_3'$, $\mathfrak{B}_3'$, $\mathfrak{C}_3'$ die Einheitspunkte für die Ankreise O_2 und O_3, so leiten sich aus der Figur 2 die Koordinaten ab, wie sie in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind.

	x	y
A_1'	$2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A-B}{2}$	$-\cos\frac{C}{2}$
B_1'	$\cos\frac{A-B}{2}$	$\cos\frac{C}{2}$
C_1'	$-\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}=-\sin\frac{C}{2}$	$\sin\frac{A-B}{2}$
$\mathfrak{A}_2'$	$-\sin\frac{C}{2}$	$-2\cos\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=\sin\frac{A-B}{2}$
$\mathfrak{B}_2'$	$\sin\frac{C}{2}$	$\sin\frac{A-B}{2}$
$\mathfrak{C}_2'$	$\cos\frac{A-B}{2}$	$-2\cos\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}-\sin\frac{A-B}{2}=-\cos\frac{C}{2}$
$\mathfrak{A}_3'$	$2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A-B}{2}$	$\cos\frac{C}{2}$
$\mathfrak{B}_3'$	$\cos\frac{A-B}{2}$	$-\cos\frac{C}{2}$
$\mathfrak{C}_3'$	$2\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}=\sin\frac{C}{2}$	$\sin\frac{A-B}{2}$

Hieran schliessen sich noch an die Koordinaten von M, M^C und M_C:

	x	y
M	$\frac{1}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}$
M^C	$\cos \frac{A-B}{2}$	0
M_C	0	$\sin \frac{A-B}{2}$

Beweis zu Satz 4.

Der Kreis aus M^C durch A_1' hat die Gleichung:

$$\left(x - \cos \frac{A-B}{2}\right)^2 + y^2 = \cos^2 \frac{C}{2}$$

und derjenige aus M_C durch C_1':

$$\underline{x^2 + \left(y - \sin \frac{A-B}{2}\right)^2 = \sin^2 \frac{C}{2}}$$

Die Gleichung ihrer gemeinsamen Sehne lautet daher:

$$- 2x \cdot \cos \frac{A-B}{2} + 2y \cdot \sin \frac{A-B}{2}$$

$$= \cos^2 \frac{C}{2} - \sin^2 \frac{C}{2} - \cos^2 \frac{A-B}{2} + \sin^2 \frac{A-B}{2}$$

$$= \cos C - \cos (A-B) \qquad \text{oder}$$

$$\underline{- x \cdot \cos \frac{A-B}{2} + y \cdot \sin \frac{A-B}{2} = - \cos A \cdot \cos B} \qquad (4)$$

Der Umkreis aber hat zur Gleichung:

$$\left(x - \frac{1}{2} \cos \frac{A-B}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \sin \frac{A-B}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Seine gemeinsame Sehne mit dem Kreis aus M^C durch A_1' hat deshalb zur Gleichung:

$$-x\cdot\cos\frac{A-B}{2}+y\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$=\cos^2\frac{C}{2}-\cos^2\frac{A-B}{2}$$

$$=\frac{1+\cos C}{2}-\frac{1+\cos(A-B)}{2}$$ oder

$$-x\cdot\cos\frac{A-B}{2}+y\cdot\sin\frac{A-B}{2}=-\cos A\cdot\cos B \qquad (4')$$

Die Übereinstimmung von (4) und (4′) beweist den 4. Satz.

Beweis zu Satz 5.

Der Kreis aus M_C durch $\mathfrak{C}_3'$ hat zur Gleichung:

$$x^2+\left(y-\sin\frac{A-B}{2}\right)^2=\sin^2\frac{C}{2}$$

und derjenige aus M^C durch $\mathfrak{B}_3'$:

$$\left(x-\cos\frac{A-B}{2}\right)^2+y^2=\cos^2\frac{C}{2}$$

daher ist die Gleichung der gemeinsamen Sehne:

$$-2x\cdot\cos\frac{A-B}{2}+2y\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$=\cos^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{C}{2}-\cos^2\frac{A-B}{2}+\sin^2\frac{A-B}{2}$$

$$=\cos C-\cos(A-B)$$ oder

$$-x\cdot\cos\frac{A-B}{2}+y\cdot\sin\frac{A-B}{2}=-\cos A\cdot\cos B \qquad (5)$$

Der Umkreis hat zur Gleichung:

$$\left(x-\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\sin\frac{A-B}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

Seine gemeinsame Sehne mit dem Kreis aus M_C durch $\mathfrak{C}_3'$ hat daher die Gleichung:

$$-x\cdot\cos\frac{A-B}{2}+y\cdot\sin\frac{A-B}{2}=\sin^2\frac{A-B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= \frac{1 - \cos(A - B)}{2} - \frac{1 - \cos C}{2}$$

$$= \frac{\cos C - \cos(A - B)}{2} \quad \text{oder}$$

$$-x \cdot \cos\frac{A - B}{2} + y \cdot \sin\frac{A - B}{2} = -\cos A \cdot \cos B \qquad (5')$$

Der Vergleich von (5) und (5′) vollendet den Beweis zum 5. Satz.

Folgerung: Da die Gleichungen (4) und (5) miteinander übereinstimmen, so heisst das:

Die Kreissysteme von Satz (4) und (5) fallen zusammen.

Beweis zu Satz 6.

Der Kreis aus M_C durch $\mathfrak{A}_2'$ hat zur Gleichung:

$$x^2 + \left(y - \sin\frac{B - B}{2}\right)^2 = \sin^2\frac{C}{2}$$

und derjenige aus M^C durch $\mathfrak{C}_2'$:

$$\left(x - \cos\frac{A - B}{2}\right)^2 + y^2 = \cos^2\frac{C}{2}$$

und ihre gemeinsame Sehne bestimmt die Gleichung:

$$-2x \cdot \cos\frac{A - B}{2} + 2y \cdot \sin\frac{A - B}{2}$$

$$= \cos^2\frac{C}{2} - \sin^2\frac{C}{2} - \cos^2\frac{A - B}{2} + \sin^2\frac{A - B}{2}$$

$$= \cos C - \cos(A - B) \quad \text{oder}$$

$$-x \cdot \cos\frac{A - B}{2} + y \cdot \sin\frac{A - B}{2} = -\cos A \cos B \qquad (6)$$

Die Gleichung für den Umkreis ist wiederum:

$$\left(x - \frac{1}{2}\cos\frac{A - B}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\sin\frac{A - B}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

seine gemeinsame Sehne mit dem Kreis aus M_C durch $\mathfrak{A}_2'$ hat daher zur Gleichung:

$$-x \cdot \cos\frac{A-B}{2} + y \cdot \sin\frac{A-B}{2} = \sin^2\frac{A-B}{2} - \sin^2\frac{C}{2}$$

$$= \frac{1 \quad \cos(A-B)}{2} - \frac{1-\cos C}{2} \quad \text{oder}$$

$$-x \cdot \cos\frac{A-B}{2} + y \cdot \sin\frac{A-B}{2} = -\cos A \cdot \cos B \qquad (6')$$

Folgerung: Wenn wir in (6) rechter Hand A mit B vertauschen, so bekommen wir die Gleichung der gemeinsamen Sehne zwischen den Kreisen M, M_C (durch $\mathfrak{A}_1'$) und M^C (durch $\mathfrak{C}_1'$). Da hiebei (6) ungeändert bleibt, so heisst das:

Die Kreissysteme, welche nach Satz 6. aus den Kreisen O_1 und O_2 abgeleitet werden können, sind identisch.

Durch Vergleich von (5), (6) und (7) ergibt sich:

Die Kreissysteme der Sätze (5), (6) und (7) fallen zusammen.

Konstruktion der gemeinsamen Sehne.

Die Gleichung derselben lautet für alle 3 Sätze:

$$-x\cos\frac{A-B}{2} + y \cdot \sin\frac{A-B}{2} = -\cos A \cdot \cos B \qquad \text{oder}$$

$$x \cdot \cos\frac{B-A}{2} + y \cdot \sin\frac{B-A}{2} = \cos A \cdot \cos B.$$

Ihr Abstand vom Anfangspunkt C des Koordinatensystems ist somit: $\cos A \cdot \cos B$.

Daraus ergibt sich die Konstruktion weil

$$\cos A \cdot \cos B = \sin A \cdot \sin B + \cos(A+B)$$
$$= \sin A \cdot \sin B - \cos C$$

gleich ist die Höhe des Dreiecks ABC aus C vermindert bezw. vermehrt, um den doppelten Abstand des Umkreismittelpunktes von der Seite AB:

Man drehe die Seite AB im Umkreis um 180°, so fällt sie mit der gemeinsamen Sehne zusammen.