Über die Summen 1/k^a [von k=1 bis] und 1/k^a [von k=1 bis n]

A. Bohren.

(Eingereicht den 30. Juni 1909).

Über die Summen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ und $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a}$

Im Intermédiaire des mathématiciens [1]) erscheinen von Zeit zu Zeit Fragen nach den numerischen Werten der Summen. Der dort zur Verfügung stehende Raum erlaubt es nicht, eine unserer Kenntnis entsprechende allgemeine Antwort zu geben. Eine Bibliographie soll auch hier nicht versucht werden; aber es sind in unsern Mitteilungen Arbeiten über Bernoullische Funktionen[2]) erschienen, und da die vielbehandelten Reihen mit ihnen in engem Zusammenhang stehen, so ist vielleicht der folgende Beitrag für die Leser von etwelchem Interesse, für den Kenner deshalb, weil zum ersten Mal eine Berechnung der Werte, wenn $a =$ irrational, versucht wird.

Die Summe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ ist die nach Riemann benannte Funktion, und es haben verschiedene Analytiker wie Scheibner, Genochi, Piltz, Hermite, Jensen, Lipschitz, Poincaré, Cahen, Bachmann, von Mangoldt, de la Vallée-Poussin, Hadamard [3]) sich mit dieser Funktion beschäftigt.

Einen historischen Überblick über die verschiedenen Methoden der Auswertung gibt Johnson. Eine ausgedehnte Tafel der Funktionswerte für $a = 2$ bis $a = 70$ hat Stieltjes berechnet.[4]) Ist $a = 2n$. eine gerade Zahl, so ergibt sich aus der Definition der Bernoullischen Funktion

[1]) Intermédiaire des mathématiciens, 1894, 1901, 1908.

[2]) Renfer, Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern, 1900.

[3]) Hadamard, Preisarbeit, Journal de math. pure et appl., 4e série, t. IX.

[4]) Acta mathematica 1887.

$$\chi(n, x) = -\frac{2}{(2\pi)}\, n \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\cos\left(2\lambda\pi x - n\frac{\pi}{2}\right)}{\lambda^n} \qquad 0 < x < 1$$ [1]

da $\cos(2\lambda\pi x - n\pi) = (-1)^n \cos 2\lambda\pi x$

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\cos 2\lambda\pi x}{\lambda^{2n}} = (-1)^{n-1}\frac{(2\pi)^{2n}}{2}\chi(2n, x)$$

Setzen wir $x = 0$ und berücksichtigen den Wert für $\chi(2n, 0)$, so wird

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2n}} = s_{2n} = \frac{1}{2}\,\frac{(2\pi)^{2n} B_n}{2n!}$$ [2]

Für $n = 2n + 1$ wird $\cos\left(2\lambda\pi x - n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n \sin 2\lambda\pi x$

also

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\sin 2\lambda\pi x}{\lambda^{2n+1}} = (-1)^{n-1}\frac{1}{2}\cdot(2\pi)^{2n+1}\chi(2n+1, x)$$

Für $x = 0, \frac{1}{2}, 1$ resultiert daraus die identische Gleichung $0 = 0$.

Für $x = \frac{1}{4}$ erhalten wir

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda\frac{\pi}{2}}{\lambda^{2n+1}} = 1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{3^{2n+1}} - \frac{1}{7^{2n+1}} + - \cdots$$

$$= (-1)^{m-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot(2\pi)^{2n+1}\chi\left(2n+1, \frac{1}{4}\right).$$

Aehnliche Reihen folgen aus $x = \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}\cdots$

[1]) Aus der Definition nach Schläfli, die als die für die Theorie geeignetste betrachtet werden muss.

[2]) Die Bernoullischen Zahlen sind berechnet und finden sich beispielsweise in ausgedehnten Tafeln in folgenden Arbeiten:

Glaisher, die 250 ersten Bern. Zahlen. Trans. Cambr. Phil. Soc., t. XII, 1873.

Sserebrennikow, Table des 90 premiers nombres de Bernoulli. Petersburger Abhandlungen, 8e série, t. XVI.

Adams, Tafel der 62 ersten Bernoullischen Zahlen. Journal von Crelle, t. 85.

Trotz vieler Bemühungen ist es aber nie gelungen, die Summen s_{2n+1} analog s_{2n} darzustellen, ebensowenig ihre Darstellung durch Summen derselben Gattung, aber mit niedrigerem Index.[1])

Anschliessend an Integralformen, lassen sie sich immerhin durch Reihen darstellen, die nach Bernoullischen Zahlen fortschreiten. Wir haben

$$\int_0^1 \chi(2n, x) \operatorname{Log} \sin \pi x dx = \frac{(-1)^n}{(2\pi)^{2n}} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2n+1}}$$

und

$$\int_0^1 \chi(2n+1, x) \operatorname{cotg} \pi x dx = \frac{2(-1)^{n-1}}{(2\pi)^{2n+1}} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2n+1}}$$

Die Integrale lassen die Anwendung der Trapezmethode leicht zu. Es verlangt dies bloss die Kenntnis der numerischen Werte der Bernoullischen Funktionen. Eine Berechnung derselben, d. h. Erstellung einer Tabelle analog den Tabellen der Gamma- und Besselschen Funktionen wäre sicherlich eine verdienstvolle Arbeit.

Zu Reihen, die nach Bernoullischen Zahlen fortschreiten, gelangt man beispielsweise folgendermassen.

Es sei

$$L_q = \int_0^1 (1-x)^{q-1} \frac{\pi x}{2} \operatorname{cotg} \frac{\pi x}{2} dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)^{q-1} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n \cdot \pi^{2n} x^{2n}}{2n!} \right\} dx$$

$$= (q-1)! \left\{ \frac{1}{q!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n \cdot \pi^{2n}}{(2n+q)!} \right\}$$

Nun ist

$$\frac{1}{x} \chi\left(2n+1, \frac{x}{2}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} (1-t)^k \sum_{m=0}^{m \leq \frac{k-1}{2}} \frac{\chi\left(2n-2m, \frac{1}{2}\right)}{2^{2m+1}(2m+1)!}$$

$$\chi\left(2n, \frac{1}{2}\right) = (-1)^n \frac{B_n}{2n!} \left(1 - \frac{1}{2^{2n-1}}\right)$$

[1]) Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunkt., p. 45 u. folg.

und es folgt daher

$$\frac{1}{(2\pi)^{2n}} s_{2n+1} = 2(-1)^n \sum_{k=1}^{k=2n} L_{k+1} \sum_{m=0}^{m \leqq \frac{k-1}{2}} \frac{\chi\left(2n-2m, \frac{1}{2}\right)}{2^{2m+1}(2m+1)!}$$

und z. B. für $n = 1$

$$s_3 = \frac{2}{7}\pi^2 \left[\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n \cdot \pi^{2n}}{(2n+2)!}\right]$$

und aus einer analogen Formel

$$s_3 = \frac{4}{5}\pi^2 \left[\frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n \pi^{2n}}{(2n+3)!}\right]^{1)}$$

Wir können auch im Integral

$$2\int_0^1 \frac{\chi(2n+1,x)}{x}\left[1 - B_1\frac{(2\pi x)^2}{2!} - B_2\frac{(2\pi x)^4}{4!} - \cdots\right] dx$$

die einzelnen Glieder

$$B_m \int_0^1 \frac{\chi(2n+1,x)}{x} \frac{(2\pi x)^{2m}}{2m!} dx$$

auswerten nach der Formel

$$\int_0^1 \chi(2n+1,x)x^m dx = \frac{1}{(2n+1)!}\left[\frac{m(1-2n)-2n(1+2n)}{2(m+2n+1)(m+2n+2)}{}^{2)} + \sum_{\lambda=1}^{n} (-1)^{\lambda-1}\binom{2n+1}{2\lambda} \frac{B\lambda}{m+2n-2\lambda+2}\right]$$

Für die numerische Auswertung kommen die Formeln nicht in Betracht.

Im folgenden soll die Eulersche Summenformel angewendet werden zur Berechnung der mehrfach verlangten Werte von

1. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a}$ und 2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ wenn a eine irrationale Zahl.

---

1) Kluyver, J. C. Amst. Ak. Versl.

2) Henneberger. Theorie der Integrale Bernoullischer Funkt. Diss. Bern 1902.

Es ist

$$\sum_{k=x}^{\infty}\frac{1}{k^a}=\frac{1}{(a-1)x^{a-1}}+\frac{1}{2x^a}+A_2\frac{a}{x^{a+1}}+A_4\frac{a(a+1)(a+2)}{x^{a+3}}+\cdots$$

$$+A_{2n-2}\frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+2n-4)}{x^{a+2n-3}}$$

$$+\vartheta A_{2n}\frac{a(a+1)\cdots\cdots(a+2n-2)}{x^{a+2n-1}}$$

wo $$A_{2n}=\frac{(-1)^{n-1}Bn}{1\cdot 2\cdot 3\,(2n-1)2n} \qquad \text{und } o<\vartheta<1.$$

Für grössere Werte von x, die ja allein in Betracht kommen, kann die Reihe Verwendung finden zur Berechnung von $\sum_{k=x}^{\infty}\frac{1}{k^a}$.

Denn es ist

$$\sum_{k=1}^{x-1}\frac{1}{k^a}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^a}-\sum_{k=x}^{\infty}\frac{1}{k^a}$$

Beispielsweise ist für $a=3$

$$\sum_{k=1}^{x-1}\frac{1}{k^3}=s_3-\left[\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2x^3}+\frac{1}{4x^4}-\frac{1}{12x^6}+\frac{1}{12x^8}-\frac{3}{20x^{10}}\right]^{1)}$$

und für $x=10$

$$\sum_{k=1}^{k=9}\frac{1}{k^3}=1{,}202056903159-0{,}005524917485=1{,}196531985674.$$

In ähnlicher Weise kann die Eulersche Summenformel verwendet werden zur Berechnung der Funktionswerte für

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^a} \quad \text{wenn a eine irrationale Zahl darstellt.}$$

Wir setzen

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^a}=\sum_{k=1}^{x-1}\frac{1}{k^a}+\sum_{k=x}^{\infty}\frac{1}{k^a}$$

und berechnen die erste Summe direkt, die 2. mit Hilfe der Summenformel, indem wir für x einen nicht zu kleinen Wert, beispielsweise 10 annehmen.

---

[1]) Siehe eine andere Formel, Schlömilch, Kompendium der höheren Analysis.

Wir erhalten so für

$$a = \sqrt{2} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} = 3{,}022039$$

$$a = \sqrt{3} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} = 1{,}993706.$$

Für $a = \sqrt{5}$ u. s. w. lässt sich die Formel auf gleiche Weise verwenden. Vorteilhafter ist die Anwendung der Formel von Newton unter Benützung der bekannten Werte der Funktionswerte für a = ganze Zahlen.[1])

Es ist

$$F(x) = F(a) + \frac{x-a}{1} \Delta F(a) + \frac{(x-a)(x-a-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 F(a) + \frac{(x-a)(x-a-1)(x-a-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 F(a) + \cdots + \frac{(x-a)(x-a-1)\cdots(x-a-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \Delta^n F(a)$$

mit dem bekannten Fehler.

Für jedes $a > 2$ ergaben sich die entsprechenden Funktionswerte unter Benützung der 3 ersten Glieder mit grosser Genauigkeit.

---

[1]) Stieltjes, acta mathematica; 1887.