

Die Flächenteilung des Dreiecks mit Hilfe der Hyperbebel

Autor(en): **Flükiger, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): - **(1910)**

Heft 1740-1769

PDF erstellt am: **16.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-319206>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

H. Flükiger.

Die Flächenteilung des Dreiecks mit Hilfe der Hyperbel.

(Mit drei Tafeln.)

I. Teilung des Dreiecks mit Benutzung der Hyperbel.

§ 1. Die Halbierungslinien des Dreiecks als Tangenten an Hyperbelbogen.

Durch jeden Punkt X einer Seite des Dreiecks ABC der Fig. 1 kann eine Gerade g so gelegt werden, dass sie die Fläche des Dreiecks halbiert. Lässt man den Punkt X mit der Ecke B zusammenfallen, so geht die Halbierungsgerade als Mittellinie durch die Mitte M_b der gegenüberliegenden Seite b . Bewegt sich X auf der Seite c von B bis nach M_c , so rückt der Schnittpunkt X' der Geraden mit b von M_b nach C . Die eine Hälfte des gegebenen Dreiecks bildet dabei fortwährend wieder ein Dreieck XAX' . Dessen Winkel α bleibt konstant, und die Seite XX' , die Halbierungsgerade g , gleitet auf den Schenkeln dieses Winkels. Bewegt sich aber eine Gerade so, dass sie von einem konstanten Winkel ein Dreieck von festem Inhalt abschneidet, so umhüllt sie eine Hyperbel. Alle Halbierungsgeraden des Dreiecks ABC , die die Seite c zwischen B und M_c und die Seite b zwischen M_b und C schneiden, sind also Tangenten einer Hyperbel. Die verlängerten Seiten c und b sind deren Asymptoten; A ist der Mittelpunkt, α der Asymptotenwinkel und die Halbierungslinie h_α des Winkels α die Hauptachse. Diese Hyperbel werde mit H_α bezeichnet. In gleicher Weise sind die Halbierungslinien, die die Dreieckseiten zwischen M_c und A einerseits und C und M_a andererseits schneiden, Tangenten einer Hyperbel H_β mit c und a als Asymptoten, B als Mittelpunkt, β als Asymptotenwinkel und der Halbierenden h_β des Winkels β als reeller Achse. Die Halbierungsgeraden, die mit den Dreieckseiten zwischen A und M_b und zwischen M_a und B zum Schnitte kommen, berühren die Hyperbel H_γ , zu der b und a die Asymptoten sind und C der Mittelpunkt, γ der Asymptotenwinkel und h_γ die Hauptachse ist.

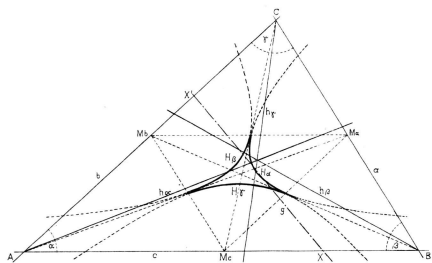


Fig. 1

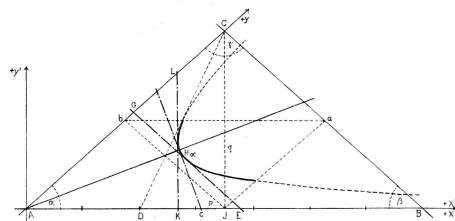


Fig. 3

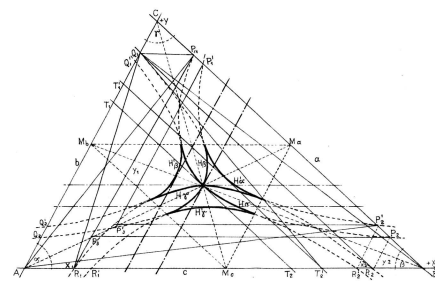


Fig. 5

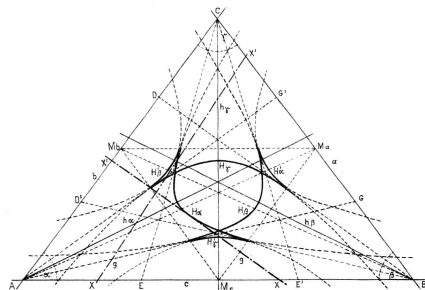


Fig. 2

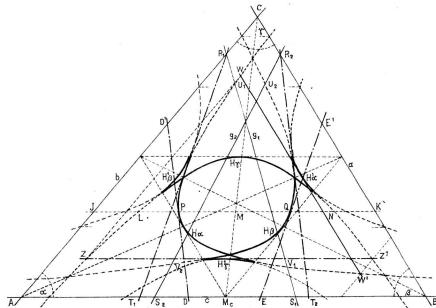


Fig. 4

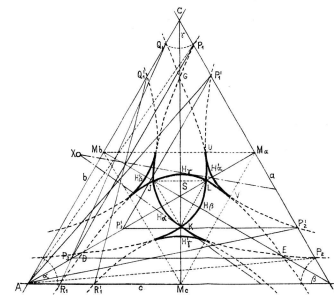


Fig. 6

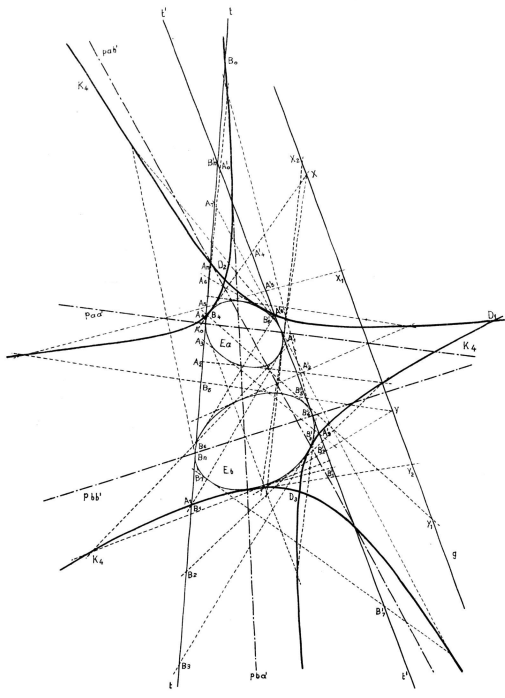


Fig. 15

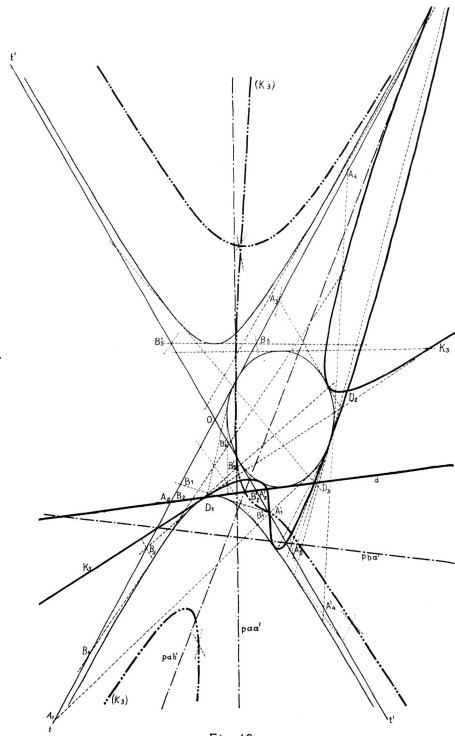


Fig. 16

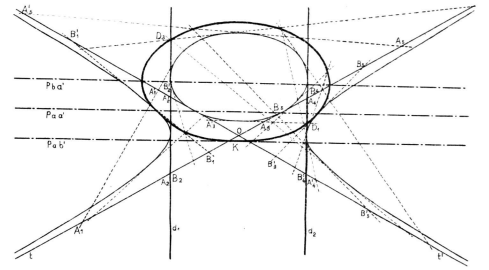


Fig. 17

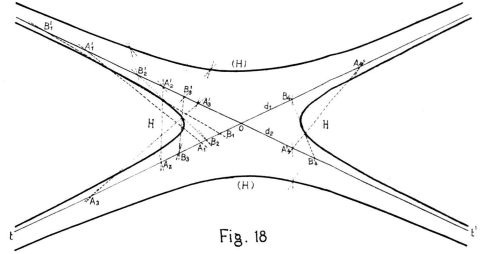


Fig. 18

Jede dieser Hyperbeln hat mit den beiden andern je eine Asymptote gemein. Die Mittellinie, die von der Mitte der gemeinschaftlichen Asymptote zweier Hyperbeln ausgeht, scheidet die Halbierungsgeraden von einander, von denen die beiden Hyperbeln berührt werden. Sie ist gemeinschaftliche Tangente der beiden Kurven. Ihre Mitte ist nach den Eigenschaften der Hyperbeltangente Berührungspunkt. Sie muss also in diesem Punkte beide Hyperbeln zugleich berühren, und daher müssen die Mittelpunkte der Mittellinien Berührungspunkte der Hyperbeln sein.

Die Hyperbeln berühren sich ausserdem in den unendlich fernen Punkten der gemeinschaftlichen Asymptoten und gehen somit eine doppelte Berührung ein. Die Berührungssehnen sind den Dreieckseiten parallel und bestimmen die Seiten des ersten Komplementärdreiecks $M_a M_b M_c$.

Da die Mittellinien die Halbierungsgeraden, die an die Hyperbeln tangieren, abschliessen, so sind ihre Mitten die letzten Hyperbelpunkte, die durch den Schnitt zweier unendlich benachbarten Halbierungsgeraden erzeugt werden. Die Halbierungsgeraden eines Dreiecks umhüllen also Hyperbelbogen, die die Mittelpunkte der Mittellinien miteinander verbinden. Umgekehrt stellt jede Tangente dieser Hyperbelbogen eine Halbierungslinie des Dreiecks dar.

§ 2. Beliebige Teilungsgeraden als Hyperbeltangenten.

Eine Gerade g der Fig. 2 schneide die Seiten c und b des gegebenen Dreiecks ABC von der Fläche F in X und X' . Sie bestimme mit c und b ein Dreieck XAX' , dessen Inhalt $\frac{m}{n} \cdot F$ sei. Der übrige Teil des Dreiecks ABC , das Viereck $XX'CB$, messe also noch $\frac{n-m}{n} \cdot F$. Es sei $\frac{m}{n}$ zunächst kleiner als $\frac{1}{2}$. In der Figur ist der Wert $\frac{3}{10}$.

Die Gerade g nehme nun nacheinander alle Lagen an, in denen sie das Dreieck im gegebenen Verhältnis teilt. X falle zunächst auf die Ecke B . Dann muss X' in einem Punkte D'

auf b liegen, der von A um $\frac{m}{n} \cdot b$ absteht, weil die Fläche des Dreiecks ABC gleich $\frac{bc \cdot \sin \alpha}{2}$ ist und das durch g abgeschnittene Dreieck $\frac{m}{n} \cdot \frac{bc \sin \alpha}{2}$ betragen soll. Der Punkt X bewege sich dann nach A hin, X' also gegen C zu. Wenn X in E angelangt ist, wo $AE = \frac{m}{n} \cdot c$, so befindet sich X' in C . Die Gerade hat inzwischen vom konstanten Winkel α ein Dreieck von festem Inhalt abgeschnitten. Sie war somit Tangente an die Hyperbel H_α , deren Asymptoten c und b sind, und deren Mittelpunkt in A liegt.

Wenn sich X weiter nach A hin bewegt, so wird statt b die Seite a von g geschnitten. Das abgetrennte Stück des Dreiecks mit der Fläche $\frac{m}{n} \cdot F$ wird so zum Viereck $XACX'$. Der übrige Teil ist das Dreieck $X'BX$. Seine Fläche ist $\frac{n-m}{n} \cdot F$. Die Gerade berührt, bis X mit A und X' mit G' zusammenfällt, wo $CG' = \frac{m}{n} \cdot a$, eine Hyperbel mit den Asymptoten c und a und dem Mittelpunkt B . Diese Hyperbel soll das Zeichen H'_β erhalten.

Liegt X auf b zwischen A und D , wenn wieder $CD = \frac{m}{n} \cdot b$, und X' auf a zwischen G' und B , so umhüllt g die Hyperbel H_γ , die b und a zu Asymptoten und C zum Mittelpunkt hat. Gehen X und X' auf den Dreiecksseiten weiter, so werden nacheinander noch die Hyperbeln H'_α , H'_β und H'_γ tangiert.

Während die Halbierungslinien drei Hyperbeln berühren, erzeugen die Geraden, die ein Dreieck in zwei ungleich grosse Teile zerlegen, sechs Hyperbeln als Enveloppen. Die Tangenten der drei Hyperbeln H_φ schneiden vom Asymptotenwinkel eine Dreiecksfläche von $\frac{m}{n} \cdot F$, die der drei Hyperbeln H'_φ ein Dreieck von der Grösse $\frac{n-m}{n} \cdot F$ ab.

Je eine Hyperbel H_φ und H'_φ sind ähnlich, ähnlich gelegen und konzentrisch, also koaxial. Sie berühren einander in den unendlich fernen Punkten.

Mit den beiden Hyperbeln H'_φ , mit denen sie nicht koaxial ist, hat jede Hyperbel H_φ eine Tangente und eine Asymptote gemein. Die Berührungssehnen bestimmen, wie bei der Halbierung des Dreiecks, die Seiten des ersten Komplementärdreiecks $M_a M_b M_c$.

Die Hyperbeln H_φ haben unter sich gemeinschaftliche Asymptoten und also im Unendlichen Berührungspunkte. Innerhalb des Dreiecks dagegen müssen sie sich schneiden. Zum Beweise betrachte man H_γ und H_α . H_γ muss die Gerade BD berühren. Da $CD = \frac{m}{n} \cdot b$ und nach Voraussetzung $\frac{m}{n} < \frac{1}{2}$, so ist $CD < CM_b$. Die Hyperbel H_γ muss somit nach C hin über die Mittellinie BM_b hinaus vorrücken. Die Hyperbel H_α berührt die Gerade BD' , und da $AD' < AM_b$, so muss sie nach A hin die Mittellinie BM_b überschreiten. Die beiden Hyperbeln müssen also übereinander greifen und demnach sich schneiden.

Die Hyperbeln H'_φ haben ebenfalls gemeinschaftliche Asymptoten. Sie berühren sich ausser in den unendlich fernen Punkten nicht und können sich auch nicht schneiden.

Wie bei der Halbierung des Dreiecks sind die auf den Seiten des ersten Komplementärdreiecks liegenden Berührungspunkte der Hyperbeln die letzten Kurvenpunkte, die durch den Schnitt zweier aufeinanderfolgenden Teilungsgeraden erzeugt werden. Weil jede Gerade, die das Dreieck ABC im gegebenen Verhältnis teilt, die zwischen diesen Punkten konstruierten Hyperbelbogen berührt, so muss umgekehrt jede Tangente dieser Bogen das Dreieck im voraus bestimmten Verhältnis teilen.

Je kleiner das Verhältnis $\frac{m}{n}$ wird, um so mehr rücken die koaxialen Hyperbeln auseinander. Für $\frac{m}{n} = 0$ muss das Dreieck zwischen den Tangenten und Asymptoten der Hyperbeln H_φ verschwinden, und die Hyperbeln gehen in die Asymptoten über. Die Hyperbeln H'_φ dagegen müssen die Dreieckseiten von aussen

berühren, da die Fläche zwischen ihren Tangenten und Asymptoten dem gegebenen Dreieck gleich sein muss.

Nähert sich $\frac{m}{n}$ dem Werte $\frac{1}{2}$, so rücken je zwei koaxiale Hyperbeln zusammen. Bei $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ vereinigen sie sich, und es entsteht die in § 1 besprochene Figur.

Hat $\frac{m}{n}$ einen Wert zwischen $\frac{1}{2}$ und 1, so ist das Dreieck zwischen den Asymptoten und den Tangenten der Hyperbeln H_φ grösser als das an den Hyperbeln H'_φ . Die Hyperbeln H_φ treten im Vergleich mit dem Falle $\frac{m}{n} < \frac{1}{2}$ an die Stelle der Hyperbeln H'_φ , und umgekehrt.

Ist $\frac{m}{n} = 1$, so berühren die Hyperbeln H_φ die Dreieckseiten, und die Hyperbeln H'_φ sind mit den Asymptoten identisch.

Ist endlich $\frac{m}{n} > 1$, so liegen die Hyperbeln H_φ ganz ausserhalb des Dreiecks ABC, und die koaxialen Hyperbeln sind imaginär.

Nimmt man der Reihe nach $m = 1, 2, 3$ u. s. w. bis $\frac{n}{2}$, wenn n gerade, und $\frac{n-1}{2}$, wenn n ungerade ist, und konstruiert die entsprechenden Hyperbelbogen, so zerlegen deren Tangenten aus jedem Punkte, der auf den Seiten des Dreiecks oder ausserhalb liegt, das Dreieck in n gleiche Teile.

§ 3. Konstruktion der Hyperbeln.

Für die Konstruktion der Hyperbeln erhält man zu den bekannten Asymptoten eine erste Tangente, indem man eine Dreieckseite im Verhältnis von $\frac{m}{n} : \frac{n-m}{n} = m : (n-m)$ teilt und den Teilungspunkt mit der gegenüberliegenden Ecke des Dreiecks verbindet. Ihr Mittelpunkt gibt einen ersten Hyperbelpunkt. Weitere Elemente findet man nach verschiedenen Verfahren in beliebiger Zahl.

Unter der Voraussetzung, dass $m = 2$ und $n = 7$ sei, ist in Fig. 3 die Gerade CD als erste Tangente der Hyperbel H_α konstruiert worden.

Zieht man als spezielle Tangente der Hyperbel H_α die Gerade EG parallel zur Dreieckseite BC, so besteht infolge der Ähnlichkeit der Dreiecke AEG und ABC die Proportion:

$$AE^2 : AB^2 = \frac{m}{n} \cdot F : F$$

Also ist $AE = AB \sqrt{\frac{m}{n}}$ oder, $AB = n$ gesetzt, $AE = \sqrt{mn}$. Für $m = 2$ und $n = 7$ erhält man für AE den Ausdruck $\sqrt{14}$, der sich konstruieren lässt als Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten 3 und $\sqrt{5}$.

Will man die Tangente KL senkrecht zu AB konstruieren, so hat man, wenn K der Fusspunkt der Tangente, J der Fusspunkt des von C auf AB gefällten Perpendikels und $AD = \frac{m}{n} \cdot AB$ ist, die Beziehung: $AK^2 = AJ \cdot AD$.

Es verhält sich nämlich infolge der Ähnlichkeit:

$$\triangle AKL : \triangle AJC = AK^2 : AJ^2.$$

Da Dreiecke von gleicher Höhe sich wie ihre Grundlinien verhalten, gilt die Proportion

$$\triangle ADC : \triangle AJC = AD : AJ.$$

Nun sollen die Dreiecke AKL und ADC gleichflächig sein, und daher folgt

$$AK^2 : AJ^2 = AD : AJ$$

und

$$AK^2 = AJ \cdot AD.$$

Um die Scheiteltangenten zu bestimmen, kann das von einer Tangente und den Asymptoten gebildete Dreieck mit Beibehaltung des Asymptotenwinkels gleichschenkelig gemacht werden. Die Basis wird dann zur Scheiteltangente, und die Schenkel kommen der linearen Exzentrizität der Hyperbel gleich. Nun ist die lineare Exzentrizität das geometrische Mittel zwischen den Abschnitten, die eine Tangente auf den Asymptoten erzeugt. Nimmt man bei der Hyperbel H_α den einen Asymptotenabschnitt gleich b , so wird der andere gleich $\frac{m}{n} \cdot c$, und für die lineare Exzentrizität

zität oder einen Schenkel des gesuchten Dreiecks erhält man den Ausdruck $c = \sqrt{\frac{m}{n}} \cdot bc$. Werden die Seiten des gegebenen Dreiecks, die die Asymptoten einer Hyperbel darstellen, allgemein mit s und s' bezeichnet, so erhält man für die Hyperbeln H_φ :

$$c = \sqrt{\frac{m}{n}} \cdot ss'.$$

Für die Hyperbeln H'_φ folgt:

$$c' = \sqrt{\frac{n-m}{n}} \cdot ss'.$$

§ 4. Die Gleichungen der Hyperbeln.

Nimmt man die Asymptoten einer Hyperbel zu Achsen eines schiefwinkligen Koordinatensystems, so gilt für jeden Hyperbelpunkt die Beziehung: $xy = \frac{c^2}{4}$. Setzt man für c den in § 3 gefundenen Wert ein, so erhält man die Asymptotengleichungen der Hyperbeln in der Form

$$H_\varphi: \quad xy = \frac{m}{n} \cdot \frac{ss'}{4}$$

$$H'_\varphi: \quad xy = \frac{n-m}{n} \cdot \frac{ss'}{4}.$$

Für die Halbachsen a und b der Hyperbeln H_φ ergeben sich bei Benutzung des vorigen Wertes für c die Ausdrücke

$$a = \cos \frac{\varphi}{2} \sqrt{\frac{m}{n}} \cdot ss'$$

$$b = \sin \frac{\varphi}{2} \sqrt{\frac{m}{n}} \cdot ss'$$

Somit lautet die Achsengleichung der Hyperbeln

$$H_\varphi: \quad \frac{nx^2}{mss' \cos^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{ny^2}{mss' \sin^2 \frac{\varphi}{2}} - 1 = 0.$$

Entsprechend erhält man die Gleichung

$$H'_\varphi: \quad \frac{nx^2}{(n-m)ss' \cos^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{ny^2}{(n-m)ss' \sin^2 \frac{\varphi}{2}} - 1 = 0.$$

Ist speziell $\alpha = 90^\circ$, so wird

$$a_\alpha = b_\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{n} \cdot 2bc},$$

und man bekommt

$$H_\alpha: \frac{2nx^2}{mbc} - \frac{2ny^2}{mbc} - 1 = 0.$$

Ist $b = c = s$, so ist

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{s^2 - \frac{a^2}{4}}{s^2}; \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a^2}{4}}{s^2},$$

und die Gleichung H_α geht über in

$$\frac{4nx^2}{m(4s^2 - a^2)} - \frac{4ny^2}{ma^2} - 1 = 0.$$

Sind b und c Katheten k eines rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecks, so folgt für H_α :

$$\frac{2nx^2}{mk^2} - \frac{2ny^2}{mk^2} - 1 = 0.$$

Im gleichseitigen Dreieck ist für jede Hyperbel H_φ

$$a = \cos 30^\circ \cdot s \sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{s}{2} \sqrt{3 \cdot \frac{m}{n}}$$

$$b = \sin 30^\circ \cdot s \sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{s}{2} \sqrt{\frac{m}{n}}$$

Die Hyperbeln erhalten demnach die Gleichung

$$H_\varphi: \frac{4nx^2}{3ms^2} - \frac{4ny^2}{ms^2} - 1 = 0.$$

Analog folgt

$$H'_\varphi: \frac{4nx^2}{3(n-m)s^2} - \frac{4ny^2}{(n-m)s^2} - 1 = 0.$$

Es sollen die Gleichungen der Hyperbeln noch auf rechtwinklige Koordinatensysteme bezogen werden, deren eine Achse auf eine Dreiecksseite, die für die betreffenden Hyperbeln Asymptote ist, fällt. Für H_α und H'_α sei in Fig. 3 die Richtung AB die positive X-Achse und die Senkrechte in A die positive Y-Achse. Transformiert man die Asymptotengleichungen, denen das schiefwinklige Achsensystem BAC zu Grunde

liegt, auf das neue rechtwinklige System $X'AY'$, so gelten die Formeln

$$x = x' - y' \cdot \cotg \alpha; \quad y = \frac{y'}{\sin \alpha}$$

Durch Einsetzen dieser Werte für x und y in die Gleichung H_α :

$$xy = \frac{m}{n} \cdot \frac{bc}{4}$$

ergibt sich

$$\frac{x'y'}{\sin \alpha} - \frac{y'^2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{m}{n} \cdot \frac{bc}{4} = 0.$$

Es sei nun p die Abszisse und q die Ordinate der Ecke C des gegebenen Dreiecks ABC in Bezug auf $X'AY'$. Dann ist $\sin \alpha = \frac{q}{b}$

und $\cos \alpha = \frac{p}{b}$. Setzt man diese Werte in der letzten Gleichung ein, so geht sie über in

$$\frac{bx'y'}{q} - \frac{bp y'^2}{q^2} - \frac{m}{n} \cdot \frac{bc}{4} = 0$$

oder
$$4npy^2 - 4nqxy + mcq^2 = 0.$$

Die Gleichung der Hyperbel H'_α unterscheidet sich von der Gleichung der Hyperbel H_α nur im konstanten Gliede. Transformiert heisst sie daher:

$$4npy^2 - 4nqxy + (n - m) cq^2 = 0.$$

Nimmt man zu den Hyperbeln H_β und H'_β die Richtung BA als positive X -Achse und die Senkrechte in B als positive Y -Achse und zu den Hyperbeln H_γ und H'_γ , wenn γ wie in Fig. 3 ein stumpfer Winkel ist, die Seite b in der Richtung AC als positive X -Achse und die Senkrechte in C in der Richtung gegen das Dreieck zu als positive Y -Achse, und werden die Koordinaten der nicht auf den Achsen liegenden Ecke des Dreiecks jeweilen wieder mit p und q bezeichnet, so lauten die Transformationsformeln für diese Hyperbeln gleich wie für H_α und H'_α . Setzt man noch die Länge der als Achse benutzten Seite gleich s , so kann man daher die Gleichungen in allgemeiner Form schreiben

$$H_\varphi: \quad 4npy^2 - 4nqxy + msq^2 = 0.$$

$$H'_\varphi: \quad 4npy^2 - 4nqxy + (n - m) sq^2 = 0.$$

§ 5. Die Schnitte der Hyperbeln mit Transversalen des Dreiecks.

An die Hyperbeln H_α und H_β der Fig. 4 seien die Tangenten DD' und EE' so konstruiert, dass sie auf der Dreieckseite c die gleichen Abschnitte AD und BE bestimmen. Es haben dann die Dreiecke ADD' und BEE' die gleiche Grösse und gleiche Basis, und somit ist auch ihre Höhe gleich. Die Berührungspunkte P und Q der Tangenten liegen in der Mitte zwischen D und D' und E und E' , also in der halben Höhe der Dreiecke, und ihre Verbindungslinie ist folglich zur Basisgeraden c parallel. Schneidet diese Parallele zu c die Seite b in J und die Seite a in K , so ist $PJ = QK$ als Hälfte der Dreiecksbasis AD oder BE , und daher ist auch $PK = QJ$. Wenn M den Schnittpunkt der Parallelen zu c mit der Mittellinie CM_c bezeichnet, so ist noch $MP = MQ$. Die Parallele zu c wird also von den beiden Hyperbeln und den nicht parallelen Dreieckseiten so geteilt, dass zwischen ihnen bezw. gleiche Abschnitte entstehen, oder dass die Schnittpunkte mit der Hyperbel symmetrisch zum Schnittpunkt mit der die Seite c halbierenden Mittellinie sind. Da man die gleichen Abschnitte AD und BE auf c beliebig gross wählen kann, so gilt dies für jede Parallele zu c . Was für die Hyperbeln H_α und H_β gezeigt worden ist, lässt sich ebenso für H'_α und H'_β beweisen.

Schneidet die zu c parallele Gerade die noch übrigen Hyperbeln H_γ und H'_γ in L und N und L' und N' , so folgt aus dem Satze, dass die beiderseitigen Abschnitte einer Sekante zwischen der Hyperbel und den Asymptoten gleich lang sind, dass auch diese Punkte symmetrisch zum Schnittpunkt M mit der Mittellinie CM_c liegen.

Die gleichen Verhältnisse, wie für die Parallelen zur Dreieckseite c , bieten sich auch für jede Gerade, die zu den Seiten a oder b parallel ist. Es folgt also, dass auf jeder Parallelen zu einer Dreieckseite die Hyperbeln an den beiden nicht parallelen Seiten gleiche Abschnitte erzeugen, oder dass sämtliche Hyperbeln in der Richtung jeder Dreieckseite symmetrisch angeordnet sind in Bezug auf die Mittellinie, die die Seite halbiert.

Aus dieser Beziehung ergibt sich sofort, dass die Punkte, in denen die Hyperbeln H_φ sich schneiden, auf die Mittellinien des Dreiecks fallen, und dass die Schnittpunkte der Hyperbeln mit den Dreieckseiten auf Parallelen zu den Dreieckseiten sind. Im weitern folgt aus ihr, dass die Hyperbeln die Geraden, wie g_1 und g_2 oder a und b , die in der Richtung einer Seite symmetrisch liegen zu der die Seite halbierenden Mittellinie, proportional teilen.

Die Beziehung kann auch benutzt werden zur Konstruktion der Hyperbeln.

§ 6. Die Schnitte der Hyperbeln mit den Dreieckseiten.

Zur Bestimmung der Schnittpunkte der Hyperbeln H_α und H'_α mit der Dreieckseite a sei in Fig. 5 AB die positive X-Achse, AC die positive Y-Achse. Nach § 4 hat dann H_α die Gleichung:

$$x \cdot y = \frac{m}{n} \cdot \frac{bc}{4}.$$

Die Gleichung der Dreieckseite a heisst:

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$

Eliminiert man aus diesen zwei Gleichungen nacheinander y und x , so folgt

$$x = \frac{c}{2} \pm \frac{c}{2} \sqrt{\frac{n-m}{n}}$$

$$y = \frac{b}{2} \pm \frac{b}{2} \sqrt{\frac{n-m}{n}}.$$

Die Schnittpunkte P_1 und P_2 der Hyperbel H_α haben also die schiefwinkligen Koordinaten

$$P_1: x_1 = \frac{c}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{n-m}{n}} \right); \quad y_1 = \frac{b}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{n-m}{n}} \right).$$

$$P_2: x_2 = \frac{c}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{n-m}{n}} \right); \quad y_2 = \frac{b}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{n-m}{n}} \right). \quad (1)$$

Sind R_1 und R_2 die Fusspunkte der Ordinaten y_1 und y_2 , so bestehen infolge der Ähnlichkeit der Dreiecke R_1BP_1 , R_2BP_2 und ABC die Proportionen:

$$BP_1 : a = y_1 : b,$$

und
Somit ist

$$BP_2 : a = y_2 : b.$$

$$BP_1 = \frac{a}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{n-m}{n}} \right)$$

$$BP_2 = \frac{a}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{n-m}{n}} \right).$$

Die Hyperbel H'_α hat, auf die Asymptoten bezogen, die Gleichung:

$$xy = \frac{n-m}{n} \cdot \frac{bc}{4}.$$

Die Kombination mit der Gleichung der Seite a ergibt:

$$x = \frac{c}{2} \pm \frac{c}{2} \sqrt{\frac{m}{n}}$$

$$y = \frac{b}{2} \pm \frac{b}{2} \sqrt{\frac{m}{n}}.$$

Die schiefwinkligen Koordinaten der Schnittpunkte P'_1 und P'_2 haben somit die Werte:

$$P'_1: \quad x_1 = \frac{c}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{m}{n}} \right) \quad ; \quad y_1 = \frac{b}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{m}{n}} \right)$$

$$P'_2: \quad x_2 = \frac{c}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{m}{n}} \right) \quad ; \quad y_2 = \frac{b}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{m}{n}} \right). \quad (2)$$

Wie vorhin findet man:

$$BP'_1 = \frac{a}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{m}{n}} \right)$$

$$BP'_2 = \frac{a}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{m}{n}} \right).$$

Da die Hyperbeln alle Dreieckseiten proportional teilen, so bekommt man bei entsprechender Wahl der Achsen für die Koordinaten der Schnittpunkte der übrigen Hyperbeln mit den Seiten b und c, sowie für die Abstände der Schnittpunkte von den Ecken des Dreiecks analoge Ausdrücke.

Bezeichnet allgemein s eine Seite des Dreiecks und d bzw. d' die Entfernung der Schnittpunkte von einer der Ecken, die die Seite abschliessen, so ist:

$$d = \frac{s}{2} \pm \frac{s}{2} \sqrt{\frac{n-m}{n}} \quad (3)$$

$$d' = \frac{s}{2} \pm \frac{s}{2} \sqrt{\frac{m}{n}}$$

Zieht man nun, Fig. 5, parallel zu der Seite, die von zwei coaxialen Hyperbeln H_φ und H'_φ geschnitten wird, die Tangenten an diese Hyperbeln und bestimmt nach § 3 den Abstand ihrer Schnittpunkte mit den zwei andern Seiten vom Mittelpunkt der Hyperbeln, so findet man, für die nicht parallelen Seiten allgemein s gesetzt:

$$l = s \sqrt{\frac{m}{n}}$$

$$l' = s \sqrt{\frac{n-m}{n}}.$$

Die Entfernung von den beiden andern Ecken des Dreiecks beträgt:

$$e = s - s \sqrt{\frac{m}{n}}$$

$$e' = s - s \sqrt{\frac{n-m}{n}}.$$

Die den beiden Ecken zunächst liegenden Schnittpunkte der Seiten mit den übrigen Hyperbeln sind nach den Formeln (3) entfernt um

$$d = \frac{s}{2} - \frac{s}{2} \sqrt{\frac{n-m}{n}}$$

$$d' = \frac{s}{2} - \frac{s}{2} \sqrt{\frac{m}{n}}.$$

Die Schnittpunkte der Hyperbeln H_φ und H'_φ mit den Dreiecksseiten stehen also von der nähern, auf der gleichen Seite liegenden Ecke des Dreiecks halb soweit ab, wie die Schnittpunkte der zu den andern Seiten parallelen Tangenten der Hyperbeln H'_φ und H_φ .

Aus dieser Beziehung und den übrigen schon erwähnten Eigenschaften der Figur, wie auch aus den Formeln (3) für den Abstand d der Schnittpunkte der Hyperbeln mit den Dreiecksseiten von den Ecken des Dreiecks ergibt sich sofort, dass die gegenseitige Entfernung der Schnittpunkte einer Hyperbel H_φ den Betrag $r = l' = s \sqrt{\frac{n-m}{n}}$ erreicht. Zieht man durch die Schnittpunkte einer dieser Hyperbeln mit der betreffenden Dreiecksseite Geraden parallel zu den andern Seiten, so entsteht somit ein

Dreieck, das dem gegebenen von der Fläche F ähnlich ist, und das den Inhalt $\frac{n-m}{n} \cdot F$ besitzt. Eine Tangente der Hyperbel bildet mit den Asymptoten ein Dreieck von der Grösse $\frac{m}{n} \cdot F$. Als Summe der beiden Dreiecke ergibt sich somit die ganze Dreiecksfläche F .

Die Strecke $r' = l$ zwischen den beiden Schnittpunkten einer Hyperbel H'_φ misst $s\sqrt{\frac{m}{n}}$. Sie ist also gleich der Seite eines zu ABC ähnlichen Dreiecks vom Inhalt $\frac{m}{n} \cdot F$. Es ergänzen sich somit auch hier das Dreieck zwischen einer Tangente und den Asymptoten, da dessen Fläche $\frac{n-m}{n} \cdot F$ ist, und das Dreieck, das man erhält, wenn man durch die Schnittpunkte der Hyperbel mit der Dreiecksseite Parallele zu den übrigen Seiten legt, zur ganzen Dreiecksfläche F , oder es ist das mit Benutzung der Hyperbelschnittpunkte als Ecken konstruierte, zu ABC ähnliche Dreieck der Differenz zwischen dem gegebenen und dem durch eine Tangente vom Asymptotenwinkel abgeschnittenen Dreiecke gleich.

Wie die Summe der beiden Dreiecke, die durch eine Tangente und die Asymptoten einer Hyperbel H_φ und H'_φ gebildet werden, der Fläche des gegebenen Dreiecks gleichkommt, so sind nach obigem auch die zwei Dreiecke, die die Schnittpunkte einer Hyperbel H_φ und H'_φ als Ecken besitzen und ABC ähnlich sind, zusammen gleich der ganzen Dreiecksfläche F .

Mit Hilfe der Schnittpunkte der Hyperbeln mit den Dreiecksseiten lassen sich leicht auch Bruchteile der Flächen $\frac{m}{n} \cdot F$ und $\frac{n-m}{n} \cdot F$ finden, wie an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

Zieht man in Fig. 5 die Verbindungsgerade der Schnittpunkte Q_1 und R_1 auf b und c , so entsteht das Dreieck AQ_1R_1 , dessen Grösse sich mit Rücksicht auf (3) berechnet auf

$$\begin{aligned} \triangle AQ_1R_1 &= \frac{1}{2} \left[\frac{b}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{n-m}{n}} \right) \cdot \frac{c}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{n-m}{n}} \right) \right] \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{bc}{4} \left(1 - \frac{n-m}{n} \right) \sin \alpha, \end{aligned}$$

oder
$$\triangle A Q_1 R_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{m}{n} \cdot F.$$

Den gleichen Inhalt besitzt, wie sofort ersichtlich ist, jedes Dreieck, das durch Verbindung zweier durch die Hyperbeln H_φ erzeugten Schnittpunkte, die nicht auf einer Parallelen zu einer Seite des Dreiecks ABC liegen, gebildet wird. Weil $P_1 Q_1 = R_1 A$, so hat auch das Dreieck $P_1 Q_1 R_1$ die gleiche Grösse. Es wird erhalten, indem man zum Punkte P_1 die beiden Schnittpunkte, die sich mit ihm auf Parallelen zu den gegebenen Dreieckseiten befinden, als Ecken wählt.

Mit diesen Dreiecken sind weiter inhaltsgleich das Dreieck $BP_1 Q_1$, das Dreieck $R_2 P_1 T'_2$, wo T'_2 den Schnittpunkt von c mit der zu a parallelen Tangente der Hyperbel H'_α bezeichnet, sowie das Dreieck $R_2 Q_1 T'_2$ und sämtliche Dreiecke, die analog konstruiert werden.

Die Fläche des Dreiecks $BP_1 T'_2$ beträgt, da $BT'_2 = 2 \cdot BR_2$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{m}{n} \cdot F$. Den gleichen Inhalt besitzen das Dreieck $BQ_1 T'_2$, das Parallelogramm $BP_1 Q_1 R_2$, das Parallelogramm $P_1 Q_1 X_1 X_2$, wobei $P_1 X_2$ und $Q_1 X_1$ zwei beliebige Parallele durch P_1 und Q_1 sind und X_1 und X_2 ihre Schnitte mit c bedeuten, sowie jedes entsprechend gebildete Dreieck oder Parallelogramm.

Die Punkte B, P_1, Q_1 und T'_2 bestimmen ein Trapez mit dem Inhalt $\frac{3}{4} \cdot \frac{m}{n} F$.

Als Fläche des Dreiecks $AP_2 P_1$ findet man, wenn der Berechnung die auf das schiefwinklige Achsensystem BAC bezogenen Koordinaten der Ecken zu Grunde gelegt werden:

$$\triangle AP_2 P_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{bc}{4} \left(1 + \sqrt{\frac{n-m}{n}} \right)^2 - \frac{bc}{4} \left(1 - \sqrt{\frac{n-m}{n}} \right)^2 \right] \sin \alpha$$

oder

$$\triangle AP_2 P_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{bc}{4} \cdot 4 \sqrt{\frac{n-m}{n}} \sin \alpha = \sqrt{\frac{n-m}{n}} \cdot F.$$

Es ist demnach dies Dreieck dem geometrischen Mittel zwischen der ganzen Dreiecksfläche F und $\frac{n-m}{n} \cdot F$ gleich.

Verbindet man die Punkte P_1 und P_2 mit M_c oder M_b oder einem Punkt der Verbindungslinie von $M_c M_b$, so erhält man ein

Dreieck mit der gleichen Basis und der halben Höhe des vorigen Dreiecks. Seine Fläche misst also $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{n-m}{n}} \cdot F$.

Werden die Schnittpunkte der Dreieckseiten mit den Hyperbeln H'_φ in gleicher Weise benutzt, wie die mit den Hyperbeln H_φ , so ist, um die Grösse analoger Flächenstücke zu erhalten, in den obigen Ausdrücken für den Inhalt $\frac{m}{n}$ durch $\frac{n-m}{n}$ und umgekehrt zu ersetzen.

§ 7. Flächeninhalt der Hyperbeln.

Auf jeder zu einer Dreieckseite parallelen Geraden werden nach § 5, an den beiden nicht parallelen Seiten durch die Hyperbeln entsprechend gleiche Abschnitte erzeugt. Diese Beziehung lässt die Folgerung zu, dass die Hyperbeln H_φ , wie auch alle Hyperbeln H'_φ , mit den Dreieckseiten gleiche Flächen einschliessen müssen. Da die Schnitte je zweier Hyperbeln H_φ oder H'_φ mit den Dreieckseiten auf Parallelen zur nicht geschnittenen Seite liegen, so lassen sich nämlich die entsprechenden Flächen, die von den beiden Hyperbeln und den Dreieckseiten bestimmt werden, durch Parallele zur nicht geschnittenen Seite in eine gleiche Anzahl Trapeze zerlegen. Ein Trapez der einen Fläche stimmt nach der oben angeführten Beziehung in den beiden parallelen Seiten mit einem Trapez der andern Fläche überein. Weil nach Konstruktion auch die Höhen gleich sind, so bekommen also die zwei Trapeze, sobald ihren parallelen Seiten ein unendlich kleiner Abstand gegeben wird, auch die nämliche Grösse, und eine Summierung der Trapeze muss demnach für die bezüglichen Flächen den gleichen Wert bringen.

Die absolute Grösse eines durch eine Dreieckseite abgeschnittenen Hyperbelsegments kann dadurch festgestellt werden, dass von dem Dreieck, das der Mittelpunkt der Hyperbel und die Schnittpunkte mit der Seite bilden, der durch die selben Punkte bestimmte Hyperbelsektor subtrahiert wird (Fig. 6). Die Fläche des Dreiecks beläuft sich nach § 6 bei einer Hyperbel H_φ auf $\sqrt{\frac{n-m}{n}} \cdot F$ und bei einer Hyperbel H'_φ auf $\sqrt{\frac{m}{n}} \cdot F$.

Der Hyperbelsektor ist nach einem Lehrsatz über die Hyperbel gleich dem halben Rechteck aus den halben Achsen multipliziert mit der Differenz der Logarithmen der Projektionen der Radien auf die eine Asymptote in der Richtung der andern. Es werde nach diesem Satze zuerst der Sektor einer Hyperbel H_φ bestimmt. Für das halbe Rechteck aus den halben Achsen hat man dann, da seine Fläche die Hälfte des Dreiecks ist, das eine Tangente mit den Asymptoten bildet, zu setzen:

$$\frac{ab}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{n} \cdot F.$$

Die erforderlichen Projektionen der Radien sind die auf die Asymptoten bezogenen Abszissen oder Ordinaten der Schnittpunkte der Hyperbel und haben die Werte

$$\frac{r'_1}{r'_2} = \frac{s}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{n-m}{n}} \right).$$

Die Differenz der Logarithmen beträgt also

$$\text{Log } r'_1 - \text{Log } r'_2 = \text{Log} \frac{\frac{s}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{n-m}{n}} \right)}{\frac{s}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{n-m}{n}} \right)} = \text{Log} \frac{(\sqrt{n} + \sqrt{n-m})^2}{m}$$

Der Inhalt des Hyperbelsektors ist somit

$$J = \left[\frac{m}{2n} \cdot \text{Log} \frac{(\sqrt{n} + \sqrt{n-m})^2}{m} \right] \cdot F,$$

und die gesuchte Grösse des Segments wird

$$S = \left[\sqrt{\frac{n-m}{n}} - \frac{m}{2n} \cdot \text{Log} \frac{(\sqrt{n} + \sqrt{n-m})^2}{m} \right] \cdot F.$$

Analog ergibt sich als Fläche zwischen einer Hyperbel H'_φ und der von ihr geschnittenen Dreieckseite

$$S' = \left[\sqrt{\frac{m}{n}} - \frac{n-m}{2n} \cdot \text{Log} \frac{(\sqrt{n} + \sqrt{m})^2}{n-m} \right] \cdot F.$$

Da die gefundenen Ausdrücke bloss von den Verhältniszahlen für die Teilung des Dreiecks abhängig sind, so tritt auch aus ihnen sofort die oben bewiesene Gleichheit der entsprechenden Hyperbelflächen hervor.

Für $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ oder $m = \frac{n}{2}$ erhält man, wie § 2 es verlangt,

$S = S'$, und für $\frac{m}{n} = 1$ oder $m = n$; $S = 0$ und $S' = F$.

Nach den Eigenschaften koaxialer Hyperbeln schneiden ferner die Tangenten der Hyperbeln H'_φ von den koaxialen Hyperbeln H_φ Segmente von konstantem Inhalt ab. Wie leicht zu erkennen ist, stimmen auch diese Segmente der drei Hyperbeln H_φ der Fläche nach miteinander überein; denn legt man in Fig. 4 an die zwei beliebig gewählten Hyperbeln H'_α und H'_γ die Tangenten parallel zu den von ihnen geschnittenen Seiten a und c , so sind infolge der symmetrischen Anordnung der Hyperbeln die Abstände der Tangenten von den parallelen Seiten, in der Richtung der nicht parallelen dritten Seite b gemessen, einander gleich, und die Schnitte W und Z , W' und Z' der Tangenten mit den koaxialen Hyperbeln liegen auf Parallelen zur Seite b . Demzufolge lassen sich die beiden Segmente wie die frühern durch Parallele zu dieser Seite in die gleiche Zahl Trapeze von entsprechend gleichem Inhalt zerlegen, und hieraus resultiert die in Frage stehende gleiche Grösse.

Unter sich inhaltsgleich sind ferner, Fig. 6, die drei Flächenstücke $DKLJ$, $ELJK$ und $GJKL$, die von je zwei Hyperbeln umschlossen werden, weil sie aus einem gemeinschaftlichen Stück KLJ bestehen und die übrigen Teile durch Parallele zu den Dreieckseiten in eine gleiche Zahl flächengleicher Trapeze zerlegt werden können. Um einen Ausdruck für ihren Inhalt zu bekommen, soll die Hälfte der Fläche $GJKL$, nämlich GJK , als Differenz zwischen dem Dreieck AKG und dem durch die gleichen Punkte bezeichneten Sektor der Hyperbel H_α betrachtet werden. Die Koordinaten der Punkte K und G bestimmen sich aus der Asymptotengleichung der Hyperbel

$$xy = \frac{m}{n} \cdot \frac{bc}{4}$$

und der ebenfalls auf die Asymptoten der Hyperbel bezogenen Gleichung der Mittellinie CM_c

$$\frac{2x}{c} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$

Man findet:

$$K: x_1 = \frac{c}{4} \left(1 + \sqrt{\frac{n-2m}{n}} \right); \quad y_1 = \frac{b}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{n-2m}{n}} \right).$$

$$G: x_2 = \frac{c}{4} \left(1 - \sqrt{\frac{n-2m}{n}} \right); \quad y_2 = \frac{b}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{n-2m}{n}} \right).$$

Aus den schiefwinkligen Koordinaten der Ecken berechnet, ergibt sich somit

$$\Delta AKG = \frac{1}{2} \left[\frac{bc}{8} \left(1 + \sqrt{\frac{n-2m}{n}} \right)^2 - \frac{bc}{8} \left(1 - \sqrt{\frac{n-2m}{n}} \right)^2 \right] \sin \alpha$$

oder

$$\Delta AKG = \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n-2m}{n}} \right) \cdot F.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \text{Sektor AKG} &= \frac{m}{2n} \cdot F \cdot (\text{Log } x_1 - \text{Log } x_2) \\ &= \left[\frac{m}{2n} \cdot \text{Log} \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-2m}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-2m}} \right] F \\ &= \left[\frac{m}{2n} \cdot \text{Log} \frac{(\sqrt{n} + \sqrt{n-2m})^2}{2m} \right] \cdot F. \end{aligned}$$

Das halbe Zweieck GJK hat also die Grösse

$$\frac{Z}{2} = \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{n-2m}{n}} - \frac{m}{2n} \cdot \text{Log} \frac{(\sqrt{n} + \sqrt{n-2m})^2}{2m} \right] \cdot F,$$

und als ganze Fläche GJKL wird erhalten

$$Z = \left[\sqrt{\frac{n-2m}{n}} - \frac{m}{n} \cdot \text{Log} \frac{(\sqrt{n} + \sqrt{n-2m})^2}{2m} \right] \cdot F.$$

Bei der Halbierung des Dreiecks berühren sich, wie anfangs auseinandergesetzt worden ist, die beiden Hyperbelbogen in der Mitte der Mittellinie CM_c , und die eingeschlossene Fläche fällt weg. Dies wird durch die Rechnung bestätigt, indem für $m = 1$ und $n = 2$ der gefundene Ausdruck verschwindet. Ist $\frac{m}{n} > \frac{1}{2}$,

also $2m > n$, so wird der Ausdruck $\sqrt{\frac{n-2m}{n}}$ negativ. Die Wurzel ist imaginär, d. h. die zwei Hyperbeln schneiden oder berühren sich nicht, was auch schon früher bemerkt worden ist.

Zum Schluss soll noch die Fläche JKL, die von Bogen der drei Hyperbeln H_φ begrenzt wird, ermittelt werden. Man fasse

sie zu diesem Zwecke als Summe des Dreiecks JKL und der drei den Seiten anliegenden Segmente auf. Die Koordinaten des Punktes K, auf das System BAC bezogen, sind schon berechnet worden und betragen

$$K: x_1 = \frac{c}{4} \left(1 + \sqrt{\frac{n-2m}{n}} \right); y_1 = \frac{b}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{n-2m}{n}} \right).$$

Nun liegen die Punkte K, L und J als Schnittpunkte der Hyperbeln auf den Mittellinien des Dreiecks ABC, und ihre Verbindungsgeraden sind den Seiten dieses Dreiecks parallel. Mit den Koordinaten des Punktes K in Bezug auf das Achsen-system BAC sind daher auch die der Punkte L und J gegeben, nämlich

$$L: x_2 = \frac{c}{4} \left(1 + \sqrt{\frac{n-2m}{n}} \right); y_2 = \frac{b}{4} \left(1 + \sqrt{\frac{n-2m}{n}} \right)$$

$$J: x_3 = \frac{c}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{n-2m}{n}} \right); y_3 = \frac{b}{4} \left(1 + \sqrt{\frac{n-2m}{n}} \right).$$

Als Fläche des Dreiecks resultiert nun nach bekannter Formel

$$\Delta JKL = \frac{1}{16} \left(1 - 6 \sqrt{\frac{n-2m}{n}} + 9 \cdot \frac{n-2m}{n} \right) \cdot F.$$

Das Segment der Hyperbel H_α ist die Differenz zwischen dem Dreieck AKJ und dem Sektor AKJ.

Es ist aber

$$\Delta AKJ = \frac{1}{16} \left(10 \sqrt{\frac{n-2m}{n}} - 3 - 3 \cdot \frac{n-2m}{n} \right) \cdot F.$$

und

$$\begin{aligned} \text{Sektor AKJ} &= \frac{m}{2n} \cdot F \cdot \text{Log} \frac{\frac{c}{4} (\sqrt{n} + \sqrt{n-2m})}{\frac{c}{2} (\sqrt{n} - \sqrt{n-2m})} \\ &= \left[\frac{m}{2n} \cdot \text{Log} \frac{(\sqrt{n} + \sqrt{n-2m})^2}{4m} \right] \cdot F. \end{aligned}$$

Als Ausdruck für die Fläche des Segments der Hyperbel H_α erhält man demnach

$$S_1 = \left[\frac{1}{16} \left(10 \sqrt{\frac{n-2m}{n}} - 3 - 3 \cdot \frac{n-2m}{n} \right) - \frac{m}{2n} \cdot \text{Log} \frac{(\sqrt{n} + \sqrt{n-2m})^2}{4m} \right] \cdot F.$$

Die beiden andern den Dreieckseiten anliegenden Segmente sind mit diesem flächengleich, da man sie in die nämliche Zahl flächengleicher Trapeze zerlegen kann.

Die gesuchte, von den drei Hyperbeln eingeschlossene Fläche berechnet sich somit auf $G = \triangle JKL + 3S_1$, oder

$$G = \left[\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{n-2m}{n}} - \frac{1}{2} - \frac{3m}{2n} \operatorname{Log} \frac{(\sqrt{n} + \sqrt{n-2m})^2}{4m} \right] \cdot F.$$

Setzt man in diesem Ausdruck für $m=4$ und $n=9$, so folgt

$$G = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \operatorname{Log} \frac{(3+1)^2}{16} \right) \cdot F = 0.$$

Die drei Hyperbeln müssen sich in dem Fall im gleichen Punkte, im Schwerpunkt des Dreiecks, schneiden.

Zu den substituierten Werten für m und n kommt man durch die Überlegung, dass ein Zusammenfallen der Schnittpunkte J , K und L nur im Schwerpunkt des Dreiecks möglich ist, weil die Hyperbeln in der Richtung der Dreieckseiten symmetrisch zu den Mittellinien angeordnet sind, und dass bei diesem Zusammenfallen der Schwerpunkt zugleich zum Berührungspunkt wird für die Tangenten, die den Dreieckseiten parallel laufen. Diese Tangenten teilen die Dreieckseiten im Verhältnis von $2:3$ und schneiden daher, weil ähnliche Dreiecke sich wie die Quadrate gleichliegender Seiten verhalten, vom gegebenen Dreieck $\frac{4}{9} \cdot F$ ab.

Analytisch erhält man die beiden Werte etwa durch Gleichsetzen der Ausdrücke für die Ordinaten der Punkte K und L .

§ 8. Die konjugierten Hyperbeln.

Ein Dreieck von gleicher Grösse, wie eine Tangente der besprochenen Hyperbeln vom Asymptotenwinkel abschneidet, schliesst jede Tangente der konjugierten Hyperbeln mit den Asymptoten ein. Dies Dreieck liegt ausserhalb des gegebenen Dreiecks ABC , und es vergrössert dessen Fläche F um so viel, wie eine Tangente der ersten Hyperbeln von ihm wegschneidet.

Die Dreieckseite, die von einer Hyperbel geschnitten wird, kommt in ihrer Verlängerung auch mit der konjugierten Hyperbel zum Schnitt. Die Koordinaten dieser Schnittpunkte, auf die

Asymptoten bezogen, werden erhalten, indem man in den bezüglichen Ausdrücken für die ersten Hyperbeln das Vorzeichen der Grösse ändert, die vom konstanten Gliede der Hyperbelgleichung herrührt. Bezeichnen s und s' wieder die Dreieckseiten, die für eine Hyperbel die Asymptoten darstellen, und $H_{\varphi'}$, sowie $H'_{\varphi'}$, die zu H_{φ} und H'_{φ} konjugierten Hyperbeln, so folgen für die Schnittpunkte der Dreieckseiten mit den Hyperbeln $H_{\varphi'}$ die Koordinaten

$$x = \frac{s}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{n+m}{n}} \right); \quad y = \frac{s'}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{n+m}{n}} \right),$$

und für die Schnittpunkte mit den Hyperbeln $H'_{\varphi'}$:

$$x = \frac{s}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{2n-m}{n}} \right); \quad y = \frac{s'}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{2n-m}{n}} \right).$$

Die beiden Schnittpunkte einer Hyperbel $H_{\varphi'}$ bzw. $H'_{\varphi'}$ haben mithin eine Entfernung voneinander, die gleich $s'' \sqrt{1 + \frac{m}{n}}$ bzw.

$s'' \sqrt{1 + \frac{n-m}{n}}$ ist. Durch sie gezogene Parallele zu den Asymptoten bilden also mit der geschnittenen Seite ein Dreieck, das sich der Ähnlichkeit wegen zum gegebenen verhält wie $\left(1 + \frac{m}{n} \right) : 1$,

bzw. $\left(1 + \frac{n-m}{n} \right) : 1$.

§ 9. Beispiel: Dreiteilung eines gleichseitigen Dreiecks.

Im gleichseitigen Dreieck werden die Hyperbeln, deren Tangenten und Asymptoten gleich grosse Dreiecke bilden, kongruent. Die Mittellinien sind die Hauptachsen der Kurven.

Die Tangenten der Hyperbeln H_{φ} der Figur 6 schneiden vom Asymptotenwinkel einen Drittel des gegebenen Dreiecks ABC ab. Die lineare Exzentrizität dieser Hyperbeln misst $\frac{s}{3} \sqrt{3}$. Sie ist also gleich zwei Dritteln der Mittellinie, und der Schwerpunkt S des Dreiecks ist somit gemeinschaftlicher Brennpunkt der sich schneidenden Hyperbeläste. Für die Brennpunkte der andern Äste ist ein Zusammenfallen nicht möglich, weil die Hyperbeln nicht koaxial sind. Die Hyperbeln H_{φ} sind also ein-

fach konfokal. Im beliebigen Dreieck würden alle Brennpunkte gesondert liegen. Die halbe Hauptachse hat eine Länge von $\frac{s}{2}$, während die halbe Nebenachse für alle Hyperbeln im gleichseitigen Dreieck der halben Exzentrizität gleich ist und für die Hyperbeln H_φ demnach einen Drittel der Mittellinie beträgt.

Die Tangenten der Hyperbeln H'_φ bestimmen mit den Asymptoten Dreiecke von der Fläche $\frac{2}{3} \cdot F$. Die lineare Exzentrizität dieser Hyperbeln ist $s \sqrt{\frac{2}{3}}$, die halbe Hauptachse $\frac{s}{2} \sqrt{2}$.

Die Tangenten aus jedem Punkt X auf einer Seite des Dreiecks oder ausserhalb an die zwischen den Mittellinien gelegenen Hyperbelbogen zerlegen das Dreieck in drei gleiche Teile.

Nach den Formeln des § 6 ist der Inhalt der Dreiecke

$$\begin{aligned} AR_1Q_1 &= \frac{1}{12} \cdot F. & AR'_1Q'_1 &= \frac{1}{6} \cdot F. \\ P_1P_3P_2 &= \frac{2}{3} \cdot F. & P'_1P'_3P'_2 &= \frac{1}{3} \cdot F. \\ AP_2P_1 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot F. & AP'_2P'_1 &= \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot F, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Ferner misst

$$\begin{aligned} \text{Segment } P_1JKP_2 &= \left[\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3} \cdot \text{Log}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \right] \cdot F. \\ \text{Segment } P'_1UVP'_2 &= \left[\frac{1}{3} \sqrt{3} - \frac{1}{3} \cdot \text{Log} \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2} \right] \cdot F. \end{aligned}$$

Das Zweieck GK hat die Grösse

$$Z = \left[\frac{1}{3} \sqrt{3} - \frac{1}{3} \cdot \text{Log} \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2} \right] \cdot F.$$

Zwei Hyperbeln, die sich schneiden, grenzen also ein Flächenstück von gleichem Inhalt ab, wie eine Hyperbel, die die andern nur berührt, mit der geschnittenen Dreieckseite einschliesst. Die Übereinstimmung dieser Flächen ist dem angewendeten Teilungsverhältnis, nicht der Form des Dreiecks zuzuschreiben.

II. Folgerungen betreffs der Hyperbel.

§ 10. Beziehungen zwischen der Hyperbel und der Sekante.

Wenn man durch die Schnittpunkte einer Dreieckseite mit einer von Teilungslinien umhüllten Hyperbel Geraden parallel zu den andern Seiten, den Asymptoten der Hyperbel, zieht, so erhält man ein Dreieck, das nach § 6 die Differenz zwischen dem gegebenen und dem durch eine Tangente vom Asymptotenwinkel abgeschnittenen Dreiecke darstellt. Zieht man durch die Schnittpunkte mit der konjugierten Hyperbel Parallele zu den übrigen Seiten, so wird nach § 8 die Summe des gegebenen und des durch eine Tangente und die Asymptoten gebildeten Dreiecks erhalten.

Statt nun vom Dreieck auszugehen und die Hyperbel entsprechend zu konstruieren, kann man auch eine Hyperbel als gegeben betrachten und diese durch eine Sekante schneiden. Die Sekante schliesst dann mit den Asymptoten eine Fläche ab, zu der die Dreiecke, die von den Tangenten und den Asymptoten begrenzt werden, in einem konstanten Verhältnis stehen. Die Hyperbel hat also für das Dreieck zwischen der Sekante und den Asymptoten die gleiche Bedeutung, wie wenn sie zu ihm konstruiert worden wäre. Wenn die Sekante nur einen Ast der Hyperbel schneidet und wenn man durch ihre Schnittpunkte Parallele zu den Asymptoten zieht, so dass sie mit der Sekante ein Dreieck bilden, so muss dessen Fläche daher gleich sein der Differenz zwischen den Dreiecken, die die Asymptoten mit der Sekante und mit einer Tangente bestimmen.

Wenn die Sekante beide Äste der Hyperbel trifft, so schneidet sie vom Nebenwinkel des Asymptotenwinkels ein Dreieck ab. Nun kann man auch den Nebenwinkel als Asymptotenwinkel auffassen und in ihm eine Hyperbel von gleicher Exzentrizität, wie die gegebene sie besitzt, konstruieren. Zu dieser

Hyperbel ist die gegebene die konjugierte, und man hat in Bezug auf den Schnitt der Sekante mit der gegebenen Hyperbel die gleichen Verhältnisse, wie früher beim Schnitt einer Dreieckseite mit der konjugierten Hyperbel. Das Dreieck, das entsteht, wenn man durch die Schnittpunkte der Sekante mit der Hyperbel Parallele zu den Asymptoten zieht, ist also gleich der Summe der beiden Dreiecke, die von den Asymptoten mit der Sekante und mit einer Tangente gebildet werden.

Es ergibt sich hieraus der Satz:

1. Zieht man durch die Schnittpunkte einer Sekante mit einer Hyperbel Geraden parallel zu den Asymptoten, so dass sie mit der Sekante ein Dreieck bilden, so ist, je nachdem die Sekante beide Äste oder nur einen Ast der Hyperbel schneidet, dies Dreieck gleich der Summe oder gleich der Differenz der Dreiecke, die von der Sekante und den Asymptoten und einer Tangente und den Asymptoten gebildet werden.

Es sei nun in Figur 7 eine Sekante g so gelegt, dass sie beide Äste der Hyperbel H schneidet. R_1 und R_2 seien ihre Schnittpunkte mit der Hyperbel und S_1 und S_2 die Schnittpunkte mit den Asymptoten. Der Abschnitt $R_1 R_2$ zwischen den Schnittpunkten mit der Hyperbel sei mit r und der Abschnitt $S_1 S_2$ zwischen den Asymptoten mit s bezeichnet. Es werde ferner die zur Sekante parallele Tangente der konjugierten Hyperbel H_1 konstruiert. Sie schneide die Asymptoten in T_1 und T_2 , und t bezeichne ihren Abschnitt zwischen den Asymptoten. Zieht man noch $R_1 R_3$ parallel der Asymptotenrichtung $S_1 O$ und $R_2 R_3$ parallel $S_2 O$, so ist nach (1)

$$\triangle R_1 R_2 R_3 = \triangle S_1 S_2 O + \triangle T_1 T_2 O.$$

Die drei Dreiecke sind nun ähnlich. Ihre Flächen verhalten sich also wie die Quadrate gleichliegender Seiten. Aus der Proportion

$$\triangle R_1 R_2 R_3 : \triangle S_1 S_2 O : \triangle T_1 T_2 O = r^2 : s^2 : t^2$$

folgt aber

$$\triangle R_1 R_2 R_3 : (\triangle S_1 S_2 O + \triangle T_1 T_2 O) = r^2 : (s^2 + t^2)$$

und hieraus, da

$$\triangle R_1 R_2 R_3 = \triangle S_1 S_2 O + \triangle T_1 T_2 O \text{ ist,}$$

$$r^2 = s^2 + t^2$$

t ist aber dem parallelen Durchmesser d der Hyperbel gleich. Somit ist auch

$$r^2 = s^2 + d^2.$$

Schneidet eine Sekante g' nur einen Ast der Hyperbel, und ist r' der Abschnitt zwischen den Schnittpunkten mit der Hyperbel, s' der Abschnitt zwischen den Asymptoten und d' der Durchmesser, der der Sekante parallel läuft, so folgt

$$r'^2 = s'^2 - d'^2,$$

und man erhält die Beziehung:

2. Bei jeder Sekante ist das Quadrat des Abschnittes zwischen der Hyperbel gleich dem Quadrat des Abschnittes zwischen den Asymptoten plus oder minus dem Quadrat des parallelen Durchmessers, je nachdem die Sekante beide Äste oder nur einen Ast der Hyperbel schneidet.

Die Gleichungen

$$r^2 = s^2 + d^2, \quad \text{und} \quad r'^2 = s'^2 - d'^2$$

geben noch

$$d^2 = r^2 - s^2, \quad \text{und} \quad d'^2 = s'^2 - r'^2.$$

Dies heisst:

3. Das Quadrat eines Durchmessers ist gleich der Differenz zwischen dem Quadrat des Abschnittes, der durch die Hyperbel, und dem Quadrat des Abschnittes, der durch die Asymptoten auf einer parallelen Sekante erzeugt wird, oder:

4. Bei parallelen Sekanten ist die Differenz zwischen dem Quadrat des Abschnittes zwischen der Hyperbel und dem Quadrat des Abschnittes zwischen den Asymptoten konstant und dem Quadrate des parallelen Durchmessers gleich.

Es schneide ferner die konjugierte Hyperbel die Sekante g in U_1 und U_2 und die Sekante g' in U'_1 und U'_2 . Die Strecke $U_1 U_2$ sei u , und die Strecke $U'_1 U'_2$ sei u' . Da ein Durchmesser der Hyperbel zugleich ein Durchmesser der konjugierten Hyperbel ist, so muss nun sein:

$$\begin{aligned} d^2 &= r^2 - s^2 = s^2 - u^2 \\ d'^2 &= u'^2 - s'^2 = s'^2 - r'^2 \quad \text{oder} \\ r'^2 - s'^2 &= s'^2 - u'^2 \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen wird erhalten:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{r^2 + u^2}{2} \\ s'^2 &= \frac{r'^2 + u'^2}{2} \end{aligned}$$

Es folgt also

5. Bezeichnet man den durch eine Hyperbel erzeugten Abschnitt einer Sekante mit r , den Abschnitt zwischen den Asymptoten mit s und den durch die konjugierte Hyperbel erzeugten Abschnitt mit u , so gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned} r^2 - s^2 &= s^2 - u^2 \\ \text{und} \quad s^2 &= \frac{r^2 + u^2}{2}. \end{aligned}$$

Geht eine Sekante durch den Mittelpunkt einer Hyperbel, wird sie also zum Durchmesser, so ist die Fläche des Dreiecks, das sie mit den Asymptoten bildet, gleich Null. Zieht man durch die Schnittpunkte mit der Hyperbel, d. h. durch die Endpunkte des Durchmessers, Geraden parallel zu den Asymptoten, so dass sie mit dem Durchmesser ein Dreieck bilden, so folgt aus (1), dass die Fläche dieses Dreiecks stets gleich ist dem Dreieck, das eine Tangente vom Asymptotenwinkel abschneidet, also gleich dem Rechteck aus den Halbachsen a und b der Hyperbel. Werden durch jeden Endpunkt eines Durchmessers Parallele zu beiden Asymptoten gelegt, so entsteht ein Parallelogramm von der Fläche $2ab$. Man erhält somit als Ausdruck eines Spezialfalles den Satz:

6. Parallele zu den Asymptoten durch die Endpunkte eines Durchmessers bestimmen ein Parallelogramm von der konstanten Grösse $2ab$.

Ist ferner die Fläche des Dreiecks S_1S_2O der Fig. 7 gleich F , so sei die Fläche des Dreiecks T_1T_2O gleich $\frac{m}{n} \cdot F$. Dann verhält sich

$$t^2 : s^2 = \frac{m}{n} : 1,$$

und es ist
$$\left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{m}{n} \cdot \frac{s^2}{4}.$$

Weiter ist nach § 8

$$S_1 R_1 = \frac{s}{2} - \frac{s}{2} \sqrt{\frac{n+m}{n}}$$

$$S_1 R_2 = \frac{s}{2} + \frac{s}{2} \sqrt{\frac{n+m}{n}}.$$

Multipliziert gibt es

$$S_1 R_1 \cdot S_1 R_2 = \frac{s^2}{4} - \frac{s^2}{4} \left(1 + \frac{m}{n}\right) = -\frac{m}{n} \cdot \frac{s^2}{4}.$$

Nimmt man die Strecken $S_1 R_1$ und $S_1 R_2$, die entgegengesetzt gerichtet sind, in der gleichen Richtung, so wird

$$S_1 R_1 \cdot S_1 R_2 = \frac{m}{n} \cdot \frac{s^2}{4} = \left(\frac{t}{2}\right)^2.$$

Schneidet die Sekante nur einen Ast der Hyperbel und beträgt auch

$$t'^2 = \frac{m}{n} s'^2 \quad \text{und} \quad \left(\frac{t'}{2}\right)^2 = \frac{m}{n} \cdot \frac{s'^2}{4},$$

so ist

$$S'_1 R'_1 = \frac{s'}{2} - \frac{s'}{2} \sqrt{\frac{n-m}{n}}$$

$$S'_1 R'_2 = \frac{s'}{2} + \frac{s'}{2} \sqrt{\frac{n-m}{n}},$$

somit
$$S'_1 R'_1 \cdot S'_1 R'_2 = \frac{s'^2}{4} - \frac{s'^2}{4} \left(1 - \frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} \cdot \frac{s'^2}{4} = \left(\frac{t'}{2}\right)^2.$$

Es ist also das Produkt der Abschnitte der Sekante zwischen einer Asymptote und der Hyperbel dem Quadrat der halben parallelen Tangente und mithin dem Quadrat des parallelen Halbmessers gleich. Man kommt zum bekannten Satz:

7. Die von einer Asymptote aus gemessenen Segmente einer Sekante ergeben das Quadrat des parallelen Halbmessers als ihr Produkt.

Setzt man in der Gleichung

$$S_1 R_1 \cdot S_1 R_2 = \frac{d^2}{4}$$

für d^2 den Wert, den es nach Satz (2) besitzt, nämlich $d^2 = r^2 - s^2$, so erhält man

$$S_1 R_1 \cdot S_1 R_2 = \frac{r^2 - s^2}{4} = \left(\frac{R_1 R_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{S_1 S_2}{2}\right)^2.$$

Für die Abschnitte der Sekante $g'g$ findet man:

$$S'_1 R'_1 \cdot S'_1 R'_2 = \frac{s'^2 - r'^2}{4} = \left(\frac{S'_1 S'_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{R'_1 R'_2}{2}\right)^2.$$

Demnach folgt

8. Schneidet eine Sekante die Asymptoten in S_1 und S_2 und die Hyperbel in R_1 und R_2 , so ist $S_1 R_1 \cdot S_1 R_2$ gleich der Differenz zwischen $\left(\frac{S_1 S_2}{2}\right)^2$ und $\left(\frac{R_1 R_2}{2}\right)^2$.

§ 11. Die Sekante und Tangente aus einem Punkte der Asymptoten.

In Figur 8 sei S_1 ein Punkt der Asymptote OY , durch den die Sekante $S_1 S_2$, die beide Äste der Hyperbel H in R_1 und R_2 schneidet, sowie die Tangente $S_1 T$ gezogen werde. Durch R_1 und R_2 konstruiere man noch Parallele zu den Asymptoten, dass das Dreieck $R_1 R_2 R_3$ entsteht. Dann ist dessen Fläche nach Satz (1) gleich der Fläche des Dreiecks $S_1 S_2 O$, das die Sekante mit den Asymptoten bildet, plus der Fläche des Dreiecks OTS_1 , das die Tangente mit den Asymptoten einschliesst. Die Summe dieser beiden Dreiecke wird aber auch durch das Dreieck $S_1 S_2 T$ gegeben, das von der Sekante, der Tangente und der Asymptote OX begrenzt wird.

Zieht man durch S_1 die Sekante $S_1 S'_2$ so, dass sie in R'_1 und R'_2 nur einen Ast der Hyperbel schneidet, und konstruiert man durch Parallele zu den Asymptoten das Dreieck $R'_1 R'_3 R'_2$, so ist dessen Fläche gleich der Differenz zwischen dem Dreieck, das die Asymptoten mit der Sekante und dem Dreieck, das sie mit der Tangente bestimmen. Diese Differenz ist aber auch gleich dem Dreieck $S_1 T S'_2$ zwischen der Sekante, der Tangente und der Asymptote OX . Es gilt also der Satz:

9. Schneiden sich eine Sekante und eine Tangente auf einer Asymptote, und zieht man durch die Schnittpunkte der Sekante mit der Hyperbel Parallele zu den Asymptoten, so dass sie mit der Sekante ein Dreieck

bilden, so ist dessen Fläche gleich dem Dreieck, das die Sekante mit der Tangente und der andern Asymptote bestimmt.

Weil nun das Dreieck $R_1R_2R_3$ dem Dreieck S_1S_2O ähnlich ist, so verhält sich

$$R_1R_2^2 : S_1S_2^2 = \triangle R_1R_2R_3 : \triangle S_1S_2O.$$

Da aber $\triangle R_1R_2R_3 = \triangle S_1S_2T$ ist, so folgt

$$R_1R_2^2 : S_1S_2^2 = \triangle S_1S_2T : \triangle S_1S_2O.$$

Ebenso gilt:

$$R'_1R'_2{}^2 : S_1S'_2{}^2 = \triangle S_1TS'_2 : \triangle S_1OS'_2.$$

Dies heisst:

10. Wenn sich eine Sekante und eine Tangente auf einer Asymptote schneiden, so verhält sich das Quadrat des Sekantenabschnittes zwischen der Hyperbel zum Quadrat des Sekantenabschnittes zwischen den Asymptoten wie das Dreieck, das die Sekante mit der Tangente und der zweiten Asymptote bildet, zum Dreieck, das sie mit den Asymptoten einschliesst.

Da Dreiecke von gleicher Höhe sich wie ihre Grundlinien verhalten, so gilt ferner die Proportion:

$$\triangle S_1S_2T : \triangle S_1S_2O = S_2T : S_2O$$

Da auch die Proportion besteht

$$\triangle R_1R_2R_3 : \triangle S_1S_2O = R_1R_2^2 : S_1S_2^2,$$

und

$$\triangle R_1R_2R_3 = \triangle S_1S_2T, \quad \text{so folgt}$$

$$R_1R_2^2 : S_1S_2^2 = S_2T : S_2O = (S_2O + OT) : S_2O.$$

Auf gleiche Weise bekommt man

$$R'_1R'_2{}^2 : S_1S'_2{}^2 = S'_2T : S'_2O = (S'_2O - TO) : S'_2O.$$

Hieraus ergibt sich:

11. Wenn sich eine Sekante und eine Tangente auf einer Asymptote schneiden, so verhält sich, je nachdem die Sekante beide Äste oder nur einen Ast der Hyperbel schneidet, das Quadrat des Sekantenabschnittes zwischen der Hyperbel zum Quadrat des Abschnittes zwischen den Asymptoten wie die Summe oder Differenz der vom Mittelpunkt der Hyperbel aus

gemessenen, durch die Sekante und die Tangente erzeugten Abschnitte der zweiten Asymptote zum Abschnitt, den die Sekante auf dieser Asymptote bestimmt.

Es werde noch durch den Schnittpunkt T der Tangente S_1T mit der Asymptote OX eine Parallele zur Asymptote OY konstruiert. Sie schneide die Sekante $S_1S'_2$ in T'_1 und die Sekante S_1S_2 in T_1 . Dann verhält sich infolge der Ähnlichkeit:

$$\triangle R_1R_2R_3 : \triangle T_1S_2T = R_1R_2^2 : T_1S_2^2.$$

Weil die Höhen gleich sind, so folgt:

$$\triangle S_1S_2T : \triangle T_1S_2T = S_1S_2 : T_1S_2.$$

Aus diesen Proportionen ergibt sich:

$$R_1R_2^2 : T_1S_2^2 = S_1S_2 : T_1S_2$$

und

$$R_1R_2^2 = S_1S_2 \cdot T_1S_2$$

Analog kommt:

$$R'_1R'^2_2 = S_1S'_2 \cdot T'_1S'_2, \text{ und es folgt:}$$

12. Bezeichnet man die Schnittpunkte einer Sekante mit der Hyperbel mit R_1 und R_2 und die Schnittpunkte mit den Asymptoten mit S_1 und S_2 , und schneidet eine Tangente die Asymptoten in S_1 und T und eine durch T gelegte Parallele zur Asymptote durch S_1 die Sekante in T_1 , so gilt die Beziehung:

$$R_1R_2^2 = S_1S_2 \cdot T_1S_2.$$

Nimmt man an, dass das Dreieck, das die Tangente mit den Asymptoten bildet, $\frac{m}{n}$ mal so gross sei wie das Dreieck zwischen der Sekante und den Asymptoten, so hat man, wie auf Seite 41 berechnet wurde, die Gleichung:

$$S_1R_1 \cdot S_1R_2 = \frac{m}{n} \left(\frac{S_1S_2}{2} \right)^2.$$

Weil die erwähnten Dreiecke die gleiche Höhe haben, ist weiter

$$OT = \frac{m}{n} \cdot OS_2.$$

Wird die erste Gleichung durch die zweite dividiert, so erhält man:

$$S_1R_1 \cdot S_1R_2 : OT = \left(\frac{S_1S_2}{2} \right)^2 : OS_2$$

oder
$$S_1 R_1 \cdot S_1 R_2 : \left(\frac{S_1 S_2}{2} \right)^2 = OT : OS_2.$$

Entsprechend wird gefunden :

$$S_1 R'_1 \cdot S_1 R'_2 : \left(\frac{S_1 S'_2}{2} \right)^2 = OT : OS'_2.$$

13. Wenn sich eine Sekante und eine Tangente auf einer Asymptote schneiden, so verhält sich also das Rechteck aus den Sekantenabschnitten zwischen der Asymptote und der Hyperbel zum Quadrat des halben Abschnittes der Sekante zwischen den Asymptoten wieder Abschnitt der zweiten Asymptote zwischen der Mitte und der Tangente zum Abschnitt zwischen der Mitte und dem Sekantenschnittpunkt.

Bezeichnen U_1 und U_2 , bzw. U'_1 und U'_2 die Schnittpunkte der Sekanten g und g' mit der konjugierten Hyperbel H_1 , so müssen nach (7) die zwei letzten Proportionen auch richtig sein in der Form :

$$S_1 U_1 \cdot S_1 U_2 : \left(\frac{S_1 S_2}{2} \right)^2 = OT : OS_2$$

und
$$S_1 U'_1 \cdot S_1 U'_2 : \left(\frac{S_1 S'_2}{2} \right)^2 = OT : OS'_2.$$

Es schneide ferner in Fig. 8 die Sekante s die Asymptoten in P_1 und P_2 und die konjugierte Hyperbel H_1 in V_1 und V_2 . Aus P_1 gehe an H_1 die Tangente t_1 , die in Q_1 die Asymptote OY schneide. Man erhält dann nach (11)

$$V_1 V_2^2 : P_1 P_2^2 = (P_2 O + O Q_1) : P_2 O.$$

Nun lasse man die Sekante s zur Tangente t durch P_1 an die Hyperbel H werden. Sie treffe alsdann die konjugierte Hyperbel in W_1 und W_2 und OY in Q . Da man die Tangente auch als Sekante betrachten kann, darf man setzen :

$$W_1 W_2^2 : P_1 Q^2 = (QO + O Q_1) : QO$$

Da $O Q_1 = QO$, so folgt

$$W_1 W_2^2 : P_1 Q^2 = 2 \cdot QO : QO = 2 : 1.$$

oder
$$W_1 W_2^2 = 2 \cdot P_1 Q^2, \quad \text{d. h.}$$

14. Das Quadrat des Abschnittes einer Tangente zwischen der konjugierten Hyperbel ist doppelt so

gross wie das Quadrat des Abschnittes zwischen den Asymptoten.

Zieht man W_1W_3 parallel OY und W_2W_3 parallel OX, so verhält sich der Ähnlichkeit wegen

$$\triangle W_1W_3W_2 : \triangle QOP_1 = W_1W_2^2 : QP_1^2 = 2 : 1.$$

Das Dreieck $W_1W_3W_2$ ist mithin doppelt so gross wie das Dreieck QOP_1 , das durch die Asymptoten und eine Tangente der Hyperbel gebildet wird, und somit dem doppelten Rechtecke aus den Halbachsen gleich. Werden durch W_1 und W_2 Parallele zu beiden Asymptoten konstruiert, so ist das Parallelogramm $W_1W_3W_2W_4$ demnach inhaltsgleich mit dem Rechteck aus den Achsen, und es ergibt sich der Satz:

15. Parallele zu den Asymptoten durch die Schnittpunkte einer Tangente mit der konjugierten Hyperbel geben ein Parallelogramm von der konstanten Grösse des Rechtecks aus den Achsen $2a$ und $2b$.

§ 12. Anwendungen auf Konstruktionsaufgaben.

Es seien die Asymptoten OX und OY, sowie ein Punkt P_1 einer Hyperbel gegeben.

1. Aufgabe. Man bestimme den Durchmesser parallel der gegebenen Richtung l .

Lösung. Durch P_1 (Fig. 9) ziehe man parallel l die Sekante s . Sie schneide die Asymptoten in Q_1 und Q_2 . Macht man $Q_2P_2 = Q_1P_1$, so ist P_2 der zweite Schnittpunkt der Sekante mit der Hyperbel, und das Quadrat des gesuchten Durchmessers ist nach (3) gleich der Differenz zwischen $Q_1Q_2^2$ und $P_1P_2^2$. Die Strecke d kann somit ermittelt werden als Kathete in einem rechtwinkligen Dreieck oder als geometrisches Mittel zwischen der Summe der Strecken Q_1Q_2 und P_1P_2 und ihrer Differenz.

Wird die Sekante s parallel zur Halbierenden des Asymptotenwinkels gelegt, so findet man die Länge der Achsen $2a$ und $2b$.

2. Aufgabe. Man konstruiere die Tangenten parallel einer gegebenen Richtung l .

Lösung. Die Länge t des zwischen den Asymptoten liegenden Stückes einer Tangente lässt sich finden wie die Länge des Durchmessers d in der ersten Aufgabe. Fig 9.

3. Aufgabe. Man konstruiere die Tangente durch einen gegebenen Punkt Q_1 einer Asymptote.

Lösung. Man ziehe in Fig. 10 durch P_1 die Sekante Q_1Q_2 und bestimme die dritte Proportionale Q_2T' zu Q_1Q_2 und P_1P_2 . Hierauf ziehe man $T'T$ parallel OY . Aus der Umkehrung des Satzes (12) folgt dann, dass TQ_1 die gesuchte Tangente ist.

Die dritte Proportionale kann nach Gouzy konstruiert werden, indem man um Q_2 mit dem Radius P_1P_2 einen Kreisbogen schlägt und nachher Q_1Q_2 von Q_1 nach Q_3 , von Q_3 nach Q_4 und von Q_4 nach T' abträgt. Es ist dann

$$\triangle Q_1Q_3Q_2 \sim \triangle Q_3Q_2T'.$$

Daraus ergibt sich

$$Q_1Q_2 : Q_3Q_2 = Q_3Q_2 : Q_2T',$$

und weil $Q_3Q_2 = P_1P_2$, so folgt

$$Q_1Q_2 : P_1P_2 = P_1P_2 : Q_2T'.$$

4. Aufgabe. Man bestimme den Schnitt einer gegebenen Geraden g mit der Hyperbel.

Lösung a. Es seien in Fig. 9 S_1 und S_2 die Schnittpunkte von g mit den Asymptoten und R_1 und R_2 die gesuchten Schnittpunkte mit der Hyperbel. Dann ist nach (2), wenn d den parallelen Durchmesser bezeichnet:

$$R_1R_2^2 = S_1S_2^2 - d^2.$$

Zieht man durch P_1 die zu g parallele Sekante, so kann d wie in der Aufgabe (1) konstruiert werden, und R_1R_2 wird gefunden als Kathete im rechtwinkligen Dreieck mit S_1S_2 als Hypotenuse und d als der andern Kathete. Ebenso leicht ist R_1R_2 wie d als mittlere Proportionale zu erhalten, was z. B. auf einfache Weise durch Umkehrung des angeführten Verfahrens zur Konstruktion der dritten Proportionalen erfolgen kann.

Lösung b. Man ziehe in Fig. 11 durch P_1 parallel zu g die Sekante Q_1Q_2 , errichte im Schnittpunkte S_1 der Geraden

mit der Asymptote OX die Senkrechte und mache $S_1T_1 = Q_1Q_2$ und $T_1T_2 = P_1P_2$. Weil nun

$$S_1T_2^2 = S_2T_2^2 - S_2S_1^2 = T_1T_2^2 - S_1T_1^2$$

oder
$$S_2T_2^2 - S_2S_1^2 = P_1P_2^2 - Q_1Q_2^2,$$

so gibt S_2T_2 nach (4) den Abstand r der gesuchten Schnittpunkte R_1 und R_2 .

Lösung c. Man konstruiere nach Fig. 10 wie in der dritten Aufgabe den Schnittpunkt T der Tangente t durch Q_1 mit der Asymptote OX , indem man zu Q_1Q_2 und P_1P_2 die dritte Proportionale Q_2T' bestimmt und $T'T$ parallel OY zieht. Ist T'' der Schnittpunkt dieser Parallelen mit g , so ist das geometrische Mittel zwischen Q_1S und ST'' nach (12) gleich dem Abstand r der Punkte R_1 und R_2 .

5. Aufgabe. Es seien die Asymptoten und der Schnitt einer Geraden mit der Hyperbel gegeben. Man bestimme den Schnitt der Geraden mit der konjugierten Hyperbel.

Lösung. In Fig. 11 seien R_1 und R_2 die Schnittpunkte der Geraden mit der Hyperbel und R'_1 und R'_2 die gesuchten Schnittpunkte mit der konjugierten Hyperbel. Errichtet man in S_1 die Senkrechte zu g und macht $S_2T_2 = R_1R_2$ und $T_2U = S_1S_2$, so ist S_1U nach (5) gleich der Strecke $R'_1R'_2$; denn es ist

$$S_1T_2^2 = S_2T_2^2 - S_1S_2^2 = T_2U^2 - S_1U^2$$

oder
$$R_1R_2^2 - S_1S_2^2 = S_1S_2^2 - S_1U^2.$$

6. Aufgabe. Man bestimme den Schnitt einer Geraden mit den Asymptoten, wenn die Schnittpunkte R_1 und R_2 mit der Hyperbel und die Schnittpunkte R'_1 und R'_2 mit der konjugierten Hyperbel gegeben sind.

Lösung. Bezeichnen S_1 und S_2 die gesuchten Punkte, so hat man nach (5) die Beziehung

$$R_1R_2^2 + R'_1R'_2^2 = 2 \cdot S_1S_2^2.$$

Nimmt man also R_1R_2 und $R'_1R'_2$ als Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks $R_1R_3R_2$ und konstruiert über der Hypotenuse R_3R_2 das rechtwinklig gleichschenklige Dreieck $R_3R_4R_2$, so ist dessen Kathete gleich S_1S_2 .

7. Aufgabe. Gegeben seien die Asymptoten einer Hyperbel und eine Tangente. Man bestimme den Schnitt der Tangente mit der konjugierten Hyperbel.

Lösung. Schneidet die Tangente die Asymptoten in T_1 und T_2 und die konjugierte Hyperbel in U_1 und U_2 , so ist nach (14) $U_1 U_2^2 = 2 \cdot T_1 T_2^2$, und $U_1 U_2$ kann als Hypotenuse im rechtwinklig gleichschenkligen Dreieck mit $T_1 T_2$ als Kathete konstruiert werden.

§ 13. Erzeugung der Hyperbel bei konstanten Teilverhältnissen.

Eine Gerade g bewege sich so, dass sie mit den Asymptoten einer Hyperbel ein Dreieck von festem Inhalt bestimmt, und in jeder Lage sei durch ihren Schnittpunkt S_1 mit der Asymptote OY die Tangente an die Hyperbel konstruiert. Ist nach Fig. 8 T deren Schnittpunkt mit der Asymptote OX , so verhält sich nach (10)

$$R_1 R_2^2 : S_1 S_2^2 = \triangle S_1 S_2 T : \triangle S_1 S_2 O.$$

Das Dreieck $S_1 S_2 T$ ist nun die Summe der Dreiecke $S_1 S_2 O$ und $S_1 O T$. Da das Dreieck $S_1 S_2 O$ nach Voraussetzung und das Dreieck $S_1 O T$ nach den Eigenschaften der Tangente konstant ist, so ist auch das Dreieck $S_1 S_2 T$ von unveränderlicher Grösse. In der obigen Proportion hat also die rechte Seite einen konstanten Wert und infolgedessen auch das Verhältnis $R_1 R_2^2 : S_1 S_2^2$ oder $R_1 R_2 : S_1 S_2$. Weil die Schnittpunkte R_1 und R_2 stets symmetrisch zur Mitte M der Strecke $S_1 S_2$ liegen, so ist daher

$$MR_1 : S_1 S_2 = MR_2 : S_2 S_1 = \text{konstant}$$

und $S_1 R_1 : S_1 S_2 = S_2 R_2 : S_2 S_1 = \text{konstant}$.

Würde die Gerade nur einen Ast der Hyperbel schneiden, so müssten R_1 und R_2 als innere Teilpunkte die Strecke $S_1 S_2$ nach festem Verhältnis teilen.

16. Bewegt sich also eine Hyperbelsekante so, dass sie mit den Asymptoten ein Dreieck von festem Inhalt bestimmt, so wird der Abschnitt zwischen den Asymptoten durch die Hyperbel in konstantem Verhältnis geteilt, oder:

Alle Geraden, die mit den Asymptoten einer Hyperbel inhaltsgleiche Dreiecke bilden, werden durch die Hyperbel und die Asymptoten proportional geteilt.

Umgekehrt folgt:

17. Wenn eine Hyperbelsekante sich so bewegt, dass sie von der Hyperbel und den Asymptoten in festem Verhältnis geteilt wird, so bestimmt sie mit den Asymptoten ein Dreieck von unveränderlicher Grösse.

Das Teilverhältnis λ , das R_1 und R_2 auf der Strecke S_1S_2 der Sekante bestimmen, kann gegeben werden durch $\lambda = \frac{MR_1}{MS_1} = \frac{MR_2}{MS_2}$. Schneidet die Sekante bei gleicher Grösse des durch sie abgeschlossenen Dreiecks eine andere zu den gegebenen Asymptoten konstruierte Hyperbel, so bilden die neuen Schnittpunkte R_1 und R_2 auch ein anderes Teilverhältnis mit S_1 und S_2 . Wenn sie mit M zusammenfallen, wenn also die Sekante zur Tangente wird, so hat λ als $\frac{0}{MS_1}$ den Wert Null. Liegt R_1 zwischen M und S_1 und R_2 zwischen M und S_2 , so ist $\frac{MR_1}{MS_1} = \frac{MR_2}{MS_2}$ ein echter Bruch. Der Schnitt der Sekante mit den Asymptoten, dem Grenzfall der Hyperbel, gibt λ den Wert 1. Liegen R_1 und R_2 ausserhalb der Asymptoten, so wird λ grösser als 1. Je grösser der Abstand $MR_1 = MR_2$ wird, um so mehr wächst λ , bis es für die Schnittpunkte der Sekante mit der unendlich fernen Hyperbel den Wert ∞ erhält.

Wie nun jede Hyperbel, die zu den gegebenen Asymptoten gehört, durch ihre Schnittpunkte auf der Sekante ein konstantes Teilverhältnis λ bestimmt, das einen Wert zwischen Null und Unendlich hat, so muss umgekehrt jedes Punktepaar R_1 und R_2 , das symmetrisch zu M liegt und die Strecke S_1S_2 in konstantem Verhältnis teilt, eine Hyperbel beschreiben, wenn die Gerade sich auf die angegebene Weise bewegt.

Es gibt dies den Satz:

18. Wenn eine Gerade sich bewegt und dabei mit den Schenkeln eines festen Winkels ein Dreieck von konstanter Fläche bestimmt, so beschreiben je zwei ihrer Punkte, die symmetrisch zur Mitte des Abschnittes zwischen den Schenkeln des Winkels liegen und diesen Abschnitt in konstantem Verhältnis teilen, eine Hyperbel. Die Mitte speziell beschreibt eine Hyperbel, die von der Geraden umhüllt wird.

Wenn sich die Punkte R_1 und R_2 innerhalb der Strecke S_1S_2 befinden, so beschreiben sie gleichzeitig den selben Hyperbelast. Als äussere Teilpunkte der Strecke S_1S_2 dagegen beschreiben sie die beiden Äste getrennt. Wie aus einer Betrachtung der Geraden in den aufeinanderfolgenden Lagen sofort hervorgeht, muss in beiden Fällen jeder der Punkte R_1 und R_2 die ganze Hyperbel durchlaufen.

Es sei ferner in Fig. 12 g_1 eine Gerade, die sich so bewegt, dass sie mit OX und OY ein Dreieck von konstantem Inhalt bestimmt, und g_2 sei eine Gerade, die durch ihre Schnittpunkte T_1 und T_2 mit OY und OX die Abschnitte OS_1 und OS_2 nach feststehendem Verhältnis teilt. Dann sei noch T_1U parallel S_1S_2 . Nach Voraussetzung hat nun das Verhältnis $\frac{T_1S_1}{S_1O}$ einen

konstanten Wert und daher auch $\frac{US_2}{S_2O}$. Weil nach Voraussetzung $\frac{T_2S_2}{S_2O}$ ebenfalls unveränderlich ist, so folgt

$$\frac{US_2}{S_2O} : \frac{S_2T_2}{S_2O} = \frac{US_2}{S_2T_2} = \frac{T_1R}{RT_2} = \text{konstant.}$$

Ebenso lässt sich beweisen, dass $\frac{S_1R}{RS_2}$ konstant ist.

Der Schnittpunkt R der beiden Geraden bestimmt also auf den Abschnitten zwischen den Schenkeln des festen Winkels ein konstantes Teilverhältnis und beschreibt daher eine Hyperbel.

19. Wenn also eine sich bewegende Gerade mit den Schenkeln eines festen Winkels ein Dreieck von konstanter Grösse einschliesst und eine zweite Gerade so gleitet, dass sie die durch die erste Gerade erzeugten Abschnitte auf den Schenkeln des festen Winkels in konstantem Verhältniss teilt, so ist der Ort des Schnittpunktes der beiden Geraden eine Hyperbel.

Wenn die Punkte T_1 und T_2 der Fig. 12 die Strecken OS_1 und OS_2 bei der Bewegung der Geraden g_1 und g_2 nach gleichbleibendem Verhältniss teilen, so hat das Dreieck OT_1T_2 wie das Dreieck OS_1S_2 eine konstante Grösse. Ist ferner R_1 ein Punkt auf g_1 mit festem Teilverhältniss in Bezug auf S_1S_2 und V_1 ein Punkt auf OY , so dass $\frac{OV_1}{V_1S_1}$ und also auch $\frac{OV_1}{V_1T_1}$ konstant ist, so folgt durch Umkehrung aus dem Beweis des letzten Satzes, dass die Gerade g durch R_1 und V_1 den Schenkel OX in V_2 so schneidet, dass $\frac{OV_2}{V_2S_2}$ oder $\frac{OV_2}{V_2T_2}$ einen unveränderlichen Wert erhält. Es beschreibt daher nach (19) auch der Schnittpunkt R_2 der Geraden g und g_2 eine Hyperbel. Wiederholungen der Konstruktion geben das Resultat:

20. Wenn eine sich bewegende Gerade mit den Schenkeln eines festen Winkels ein Dreieck von konstantem Inhalt bestimmt und man durch Punkte auf ihr mit festem Teilverhältniss in Bezug auf die Schnittpunkte mit den Schenkeln des Winkels Strahlenbüschel legt, die auf dem Abschnitt eines Schenkels zwischen dem Scheitel und dem Schnittpunkt mit der Geraden konstante Teilverhältnisse bilden, so ist der Ort des Schnittpunktes jedes Strahles mit jedem andern eine Hyperbel.

Wie im vorausgehenden gezeigt wurde, beschreibt in Fig. 12 jeder der Punkte $R, R', R'' \dots$ auf g_1 mit festem Teilverhältniss in Bezug auf S_1S_2 eine Hyperbel. Diese Hyperbeln

sind coaxial und haben die Schenkel des festen Winkels zu Asymptoten. Betrachtet man die Gerade als Sekante, so folgt umgekehrt, dass sie in jeder Lage, in der sie mit den Asymptoten ein Dreieck von der gegebenen Grösse bildet, durch die Hyperbeln und die Asymptoten im nämlichen Verhältnis geteilt wird. Als Verallgemeinerung der Beziehung (16) folgt daher der Satz:

21. Geraden, die mit den Asymptoten coaxialer Hyperbeln Dreiecke von gleicher Grösse bilden, werden durch die Hyperbeln und die Asymptoten proportional geteilt.

Insbesondere teilen coaxiale Hyperbeln und eine Asymptote alle Parallelen zur andern Asymptote proportional.

In Fig. 4 seien nun zwei Systeme von coaxialen Hyperbeln mit den beliebigen Asymptotenwinkeln α und β gegeben, und es sei die Eigenschaft vorhanden, dass die Tangenten der Hyperbel H_α , bzw. H'_α , $H''_\alpha \dots$ mit den Asymptoten ein Dreieck von gleicher Grösse einschliessen, wie die Tangenten der Hyperbel H_β , bzw. H'_β , $H''_\beta \dots$. Ferner soll die Sekante g_1 vom Asymptotenwinkel α ein gleich grosses Dreieck abschneiden, wie g_2 von β . Die Schnittpunkte von g_1 und g_2 mit den Asymptoten seien mit R_1 und S_1 und R_2 und S_2 und die Schnittpunkte mit den Hyperbeln H_α und H_β mit U_1 und V_1 bzw. U_2 und V_2 bezeichnet. Dann werde noch die Tangente R_1T_1 an H_α und die Tangente R_2T_2 an H_β gezogen. Nach (10) verhält sich alsdann:

$$U_1V_1^2 : R_1S_1^2 = \triangle R_1T_1S_1 : \triangle R_1AS_1$$

$$U_2V_2^2 : R_2S_2^2 = \triangle R_2T_2S_2 : \triangle R_2BS_2.$$

Aus der Voraussetzung folgt aber

$$\triangle R_1T_1S_1 : \triangle R_1AS_1 = \triangle R_2T_2S_2 : \triangle R_2BS_2.$$

Somit besteht die Proportion

$$U_1V_1 : R_1S_1 = U_2V_2 : R_2S_2.$$

Schneiden g_1 und g_2 die Hyperbeln H'_α und H'_β in U'_1 und V'_1 , bzw. U'_2 und V'_2 , so wird erhalten

$$U'_1V'_1 : R_1S_1 = U'_2V'_2 : R_2S_2.$$

22. Entsprechen sich also in zwei Systemen coaxialer Hyperbeln je zwei Hyperbeln in

dem Sinne, dass eine Tangente der einen Hyperbel vom Asymptotenwinkel ein Dreieck von gleicher Grösse abschneidet, wie eine Tangente der andern, so werden alle Sekanten, die mit den Asymptotenflächen gleiche Dreiecke bilden, in beiden Systemen durch die Asymptoten und Hyperbeln im nämlichen Verhältnis geteilt. (Vergl. hiezu § 5: «Die Schnitte der Hyperbeln mit Transversalen des Dreiecks.»)

Es sei endlich in Fig. 13 der Winkel ω , das Dreieck S_1OS_2 und ebenso das Verhältnis $R_1S_1 : S_1S_2 = R_2S_2 : S_2S_1$ für alle Lagen der sich bewegenden Geraden g konstant, und R_1W und R_2W seien den Schenkeln des festen Winkels parallel. Weil nun das Verhältnis $R_1R_2 : S_1S_2$ oder $R_1R_2^2 : S_1S_2^2$ konstant ist, so folgt auch für das Dreieck R_1R_2W ein fester Inhalt. Der Ort seiner Ecken R_1 und R_2 ist aber nach (18) und der Ort der Ecke W nach (20) eine Hyperbel. Die beiden Hyperbeln sind coaxial, und die Richtungen OS_1 und OS_2 sind ihre Asymptoten. Geht man umgekehrt vom Punkt W einer Hyperbel aus und zieht durch ihn Parallele zu den Asymptoten bis zum Schnitt R_1 und R_2 mit einer coaxialen Hyperbel, so erhält man die Dreiecke WR_1R_2 und S_1S_2O , deren Inhalt sich mit der Lage des Punktes W auf der Hyperbel nicht ändert, und man kann sagen:

23. Wenn man aus einem Punkt einer Hyperbel Parallele zu den Asymptoten zieht bis zum Schnitt mit einer coaxialen Hyperbel, so bestimmen die Schnittpunkte mit dem ersten Punkt und die Verbindungslinie der Schnittpunkte mit den Asymptoten Dreiecke von konstanter Grösse,

und:

24. Wenn zwei Ecken eines Dreiecks von konstanter Grösse auf einer Hyperbel gleiten und die mit der dritten Ecke bestimmten Seitenden Asymptoten parallel sind, so ist der Ort der dritten Ecke eine coaxiale Hyperbel.

§ 14. Die Hyperbel als Erzeugnis doppelter projektiver Punktreihen auf den Asymptoten.

Die Gerade a der Fig. 14 bewege sich wieder so, dass sie mit den Schenkeln t und t' des festen Winkels ω ein Dreieck von konstantem Inhalte bildet. Sie nehme nacheinander die Lagen $a_1, a_2, a_3 \dots$ an, in denen sie t in $A_1, A_2, A_3 \dots$ und t' in $A'_1, A'_2, A'_3 \dots$ schneidet. Durch jeden Schnittpunkt mit t ist auch der Schnittpunkt mit t' eindeutig bestimmt. Umgekehrt gehört zu jedem Schnittpunkt der Geraden mit t' ein einziger Schnittpunkt mit t , und die Punktreihen $(A_1 A_2 A_3 \dots)$ und $(A'_1 A'_2 A'_3 \dots)$ sind daher projektive Reihen.

Neben der Geraden a soll sich eine zweite Gerade b so bewegen, dass sie die Abschnitte der Schenkel t und t' zwischen dem Scheitel O des Winkels und den Schnittpunkten mit a nach einem konstanten Verhältnis teilt. Wenn a sich in den Lagen $a_1, a_2, a_3 \dots$ befindet, so nehme b die Lagen $b_1, b_2, b_3 \dots$ ein, und die bezüglichen Schnittpunkte von b mit t und t' seien mit $B_1, B_2, B_3 \dots$ und $B'_1, B'_2, B'_3 \dots$ bezeichnet. Unter der gegebenen Voraussetzung bestimmt auch b mit t und t' ein Dreieck von konstanter Grösse, und auch die Punktreihen $(B_1 B_2 B_3 \dots)$ und $(B'_1 B'_2 B'_3 \dots)$ sind projektiv.

Da durch den Schnittpunkt A_i von a mit t der Schnittpunkt A'_i von a mit t' gegeben ist, A'_i nach Voraussetzung aber B'_i eindeutig bestimmt, so folgt, dass auch die Reihen $(A_1 A_2 A_3 \dots)$ und $(B'_1 B'_2 B'_3 \dots)$ projektiv sind, und ebenso ist $(B_1 B_2 B_3 \dots)$ projektiv zu $(A'_1 A'_2 A'_3 \dots)$. Nach Konstruktion besteht zudem noch zwischen den beiden Reihen jedes Trägers projektives Entsprechen.

Da die Dreiecke, die die Geraden a und b mit den Schenkeln t und t' des festen Winkels bilden, eine konstante Grösse besitzen, so muss dann, wenn die eine oder andere Gerade einen Schenkel im Unendlichen schneidet, der Schnittpunkt mit dem andern Schenkel in den Schnittpunkt O von t und t' fallen. Es vereinigen sich daher in O die Gegenpunkte sämtlicher Reihen in Bezug auf die Reihen des andern Trägers. Weil ferner die Gerade b die von a auf t und t' erzeugten Abschnitte in

einem endlichen Verhältnis teilt, so schneidet b gleichzeitig mit a einen Schenkel im Unendlichen und den andern in O . Daraus folgt weiter, dass der unendlich ferne Punkt einer Reihe dem unendlich fernen Punkt der andern Reihe des gleichen Trägers entspricht, und dass auch die zugehörigen in O zusammenfallenden Gegenpunkte auf dem andern Träger einander zugeordnet sind. Die Art der Bewegung der Geraden a und b bringt es also mit sich, dass der eine Doppelpunkt der vereinigten Reihen eines Trägers im Unendlichen liegt, während der andere in den Schnittpunkt der Träger fällt und aus den Gegenpunkten in Bezug auf die Reihen des andern Trägers besteht. Es wird dadurch auch ein Entsprechen der Doppelpunkte herbeigeführt. Weil der eine Doppelpunkt der vereinigten Reihen im Unendlichen liegt, so sind diese Reihen unter sich ähnlich, was auch aus der Voraussetzung, nach der die Verhältnisse $\frac{OA_i}{OB_i}$ und $\frac{OA'_i}{OB'_i}$ konstant sind, evident ist.

Wie bekannt, umhüllen nun die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte zweier projektiven Punktreihen, deren Gegenpunkte im Schnittpunkt der Träger zusammenfallen, eine Hyperbel. Die Träger der Punktreihen sind deren Asymptoten. Es umhüllen also die Geraden $a_1, a_2, a_3 \dots$ und $b_1, b_2, b_3 \dots$ und auch die Verbindungslinien $a'_1, a'_2, a'_3 \dots$ der entsprechenden Punkte der Reihen $(A_1, A_2, A_3 \dots)$ und $(B'_1, B'_2, B'_3 \dots)$, sowie die Verbindungslinien $b'_1, b'_2, b'_3 \dots$ der entsprechenden Punkte der Reihen $(B_1, B_2, B_3 \dots)$ und $(A'_1, A'_2, A'_3 \dots)$ je eine Hyperbel. Die vier Hyperbeln liegen coaxial. Nach Satz (19) ist aber auch der Ort des Schnittpunktes der Geraden a_i und b_i , bzw. a'_i und b'_i , eine Hyperbel, die t und t' zu Asymptoten hat. Die Gerade b_i verbindet nun die entsprechenden Punkte der Reihen $(B_1 B_2 B_3 \dots)$ und $(B'_1 B'_2 B'_3 \dots)$, die auch den konjugierten Punkten der Reihen $(A_1 A_2 A_3 \dots)$ und $(A'_1 A'_2 A'_3 \dots)$, deren Verbindungsgerade a_i ist, zugeordnet sind, und analog verhält sich b'_i zu a'_i . Die Beziehung, die dem Satze (19) zu Grunde liegt, kann also auch wie folgt ausgedrückt werden:

25. Konstruiert man auf jeder von zwei Geraden t und t' zwei Punktreihen so, dass die Reihen auf jedem Träger unter sich ähnlich

und zu den Reihen des andern Trägers projektiv sind und dass die Gegenpunkte der Reihen in Bezug auf die Reihen des andern Trägers im Schnittpunkt der Träger zusammenfallen, so ist der Ort des Schnittpunktes der Verbindungslinie entsprechender Punkte zweier Reihen auf t und t' mit der Verbindungslinie derjenigen zwei entsprechenden Punkte der andern Reihen, die auch den vorigen Punkten zugeordnet sind, eine Hyperbel mit t und t' als Asymptoten.

Als analytischer Beweis werde folgendes angeführt:

Da die Gegenpunkte jeder Reihe eines Trägers in Bezug auf die Reihen des andern Trägers in O liegen, so besteht die Beziehung:

$$OA_1 \cdot OA'_1 = OA_2 \cdot OA'_2 = \dots = c = \text{konstant.} \quad (1)$$

Nach Voraussetzung ist ferner

$$\frac{OB_1}{OA_1} = \frac{OB_2}{OA_2} = \dots = m = \text{konstant} \quad (2)$$

und
$$\frac{OB'_1}{OA'_1} = \frac{OB'_2}{OA'_2} = \dots = n = \text{konstant.} \quad (3)$$

Man bestimme nun den Schnitt der Geraden a_i und b_i .

Nimmt man O als Ursprung, t als X-Achse und t' als Y-Achse eines schiefwinkligen Koordinatensystems, so lauten die Gleichungen von a_i und b_i bzw.

$$\frac{x}{OA_i} + \frac{y}{OA'_i} - 1 = 0. \quad (4)$$

$$\frac{x}{OB_i} + \frac{y}{OB'_i} - 1 = 0. \quad (5)$$

Aus den drei ersten Gleichungen folgt:

$$OA'_i = \frac{c}{OA_i}; \quad OB_i = m \cdot OA_i; \quad OB'_i = n \cdot OA'_i = \frac{c \cdot n}{OA_i}.$$

Nach Substitution in den Gleichungen (4) und (5) ergeben sich bei der Ausrechnung für x und y die Werte

$$x = \frac{m(n-1) \cdot OA_i}{n-m}$$

$$y = \frac{c \cdot n(1 - m)}{(n - m) \cdot OA_i}.$$

Wird durch Multiplikation aus diesen Ausdrücken die veränderliche Grösse OA_i eliminiert, so folgt

$$x y = \frac{c m n (1 - m) (n - 1)}{(n - m)^2} = \text{konstant.} \quad (6)$$

Bestimmt man in gleicher Weise den Schnittpunkt der Geraden a'_i und b'_i und schafft aus den Ausdrücken für x und y die Variable OA_i weg, so kommt

$$x y = \frac{c m n (1 - m) (1 - n)}{(1 - m n)^2} \quad (7)$$

Es besteht also zwischen den Koordinaten x und y des Schnittpunktes der Geraden a_i und b_i , bzw. a'_i und b'_i , eine Relation, die durch die Asymptotengleichung einer Hyperbel dargestellt wird. Der Ort des Schnittpunktes der Geraden ist somit eine Hyperbel, die die Träger der Punktreihen zu Asymptoten hat.

Aus den ungleichen Vorzeichen der Gleichungen (6) und (7) folgt, dass die eine Hyperbel im Winkelraum ω und die andere im Nebenwinkelraum ω' liegen muss.

Der Satz (25) bestimmt nun die Hyperbel als Schnitterzeugnis der Verbindungslinien entsprechender Punkte in vier projektiven Punktreihen auf zwei Geraden. Neben der Forderung, dass jede Reihe zu jeder andern projektiv sei, wird aber durch die Voraussetzung noch eine besondere Lage und ein Entsprechen der Doppelpunkte verlangt. Der Satz ist demnach der Ausdruck eines Spezialfalles. Er lässt sich nun als solcher auch leicht aus dem allgemeinen Falle herleiten.

Zu dieser Ableitung seien in Fig. 15 ($A_1 A_2 A_3 \dots$) und ($B_1 B_2 B_3 \dots$) zwei auf dem Träger t vereinigte Punktreihen in allgemeiner Projektivität, und die Reihen ($A'_1 A'_2 A'_3 \dots$) und ($B'_1 B'_2 B'_3 \dots$) des Trägers t' seien unter sich und mit den ersten Reihen projektiv. Die beliebig liegenden Doppelpunkte seien mit $A_1 B_1$, $A_4 B_4$, $A'_3 B'_3$ und $A'_6 B'_6$ bezeichnet. Nun umhüllen die Verbindungslinien der Punkte A_i und A'_i , sowie der Punkte B_i und B'_i einen Kegelschnitt, in der Figur die Ellipsen E_a und E_b . Da jeder Geraden $A_i A'_i$ nur eine Gerade $B_i B'_i$ entspricht, wie aus der Voraussetzung folgt, so besteht zwischen den Tangenten der beiden Kegelschnitte projektives Entsprechen, und

die Aufgabe, den Ort des Schnittpunktes der Geraden $A_i A'_i$ mit den Geraden $B_i B'_i$ zu finden, ist gleichbedeutend mit der Aufgabe, den Ort des Schnittpunktes der entsprechenden Tangenten der beiden Kegelschnitte zu bestimmen. Wenn aber die Tangenten zweier Kegelschnitte einander projektiv zugeordnet sind, so ist der Ort des Schnittpunktes entsprechender Tangenten, wie bekannt, eine Kurve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten, also eine Kurve vierter Ordnung sechster Klasse, die jeden der beiden Kegelschnitte viermal berührt und nebstdem mit jedem vier Tangenten gemein hat. (Vergl. Fiedler, Darstellende Geom., III. Teil, 3. Aufl., § 46.) In Fig. 15 berührt diese Kurve jede der Ellipsen nur zweimal reell.

Die Ordnungszahl der Kurve lässt sich am einfachsten wie folgt feststellen. Man ziehe eine beliebige Gerade g . Aus jedem Punkte X dieser Geraden kann man zwei Tangenten an die Ellipse E_a konstruieren. Ihnen entsprechen zwei Tangenten der Ellipse E_b , die sich im allgemeinen nicht auf g schneiden und die daher auf g zwei Schnittpunkte Y_1 und Y_2 erzeugen. Ebenso entsprechen jedem Punkte Y der Geraden, von dem aus man zwei Tangenten an die Ellipse E_b legt, zwei Punkte X_1 und X_2 als Schnittpunkte der Geraden mit den Tangenten an E_a , die den aus Y an E_b gelegten Tangenten projektiv zugeordnet sind. Es besteht also auf der Geraden eine (2,2) Korrespondenz. Nach dem Chasles'schen Korrespondenzprinzip kommt es daher viermal vor, dass zwei entsprechende Punkte zusammenfallen, d. h. es kommt viermal vor, dass sich auf der Geraden zwei entsprechende Tangenten der beiden Kegelschnitte schneiden. Auf der Geraden liegen also vier Punkte der erzeugten Kurve, und folglich muss diese von der vierten Ordnung sein.

Die Klasse der K_4 lässt sich nun auch sofort angeben. Weil nämlich jedem ihrer Punkte eine Tangente eines Kegelschnittes entspricht, so sind beide Kurven eindeutig aufeinander bezogen. Daher sind sie nach einem bekannten Satze vom gleichen Geschlecht. Die K_4 ist also wie der Kegelschnitt vom Geschlechte Null, d. h. sie ist eine Kurve sechster Klasse.

Nimmt man zur Bestimmung der Zahl der Schnittpunkte einer Geraden mit der erzeugten Kurve statt einer beliebigen Geraden eine Tangente t_1 des einen Kegelschnittes, so lässt sich

aus jedem Punkte X nur noch eine Tangente an diesen Kegelschnitt ziehen. Ihr entspricht auch nur eine Tangente an den andern Kegelschnitt, und somit entspricht einem Punkte X nur ein Punkt Y . Jedem Punkte Y dagegen entsprechen zwei Punkte X , da von jedem Punkte auf t_1 zwei Tangenten an den zweiten Kegelschnitt gehen. Infolge dieser (1,2) Korrespondenz schneiden sich auf t_1 noch dreimal entsprechende Tangenten der beiden Kegelschnitte. Der vierte Schnittpunkt mit der Kurve fällt dann in den Punkt, in dem die Tangente t_1 die ihr entsprechende Tangente an den andern Kegelschnitt trifft.

Auf jeder der vier gemeinsamen Tangenten der beiden Kegelschnitte bestimmen die übrigen Tangenten zwei vereinigte projektive Punktreihen. Auf dem Träger t z. B. erhält man die ursprünglichen Reihen $(A_1 A_2 A_3 \dots)$ und $(B_1 B_2 B_3 \dots)$ wieder. Die auf ihn fallenden Schnittpunkte zweier konjugierten Tangenten sind die Doppelpunkte der beiden Reihen. Ausser in diesen Punkten schneidet der Träger die K_4 noch im Punkte B_0 , in dem er als Tangente an E_a von der entsprechenden Tangente an E_b geschnitten wird, und im Punkte A_n , in dem er als Tangente an E_b mit der entsprechenden Tangente an E_a zum Schnitte kommt. Nun ist t als Tangente an E_a die Verbindungslinie des Berührungspunktes A_0 mit dem Schnittpunkte A'_0 der beiden Träger, und die t entsprechende Tangente an E_b schneidet t in B_0 in dem Punkte, der A_0 zugeordnet ist. Da nach Voraussetzung die Reihen $(B_1 B_2 B_3 \dots)$ und $(A'_1 A'_2 A'_3 \dots)$ auch projektiv sind, kann B_0 konstruiert werden als entsprechender Punkt zu A'_0 . Als solcher ist er der Schnittpunkt der perspektivischen Achse $p_{ba'}$ der beiden Reihen $(B_1 B_2 B_3 \dots)$ und $(A'_1 A'_2 A'_3 \dots)$ mit dem Träger t . Auf gleiche Weise erkennt man, dass A_n der Schnittpunkt der perspektivischen Achse $p_{ab'}$ der Reihen $(A_1 A_2 A_3 \dots)$ und $(B'_1 B'_2 B'_3 \dots)$ mit dem Träger t sein muss. Die perspektivischen Achsen $p_{ba'}$ und $p_{ab'}$ bestimmen auch auf dem Träger t' die neben den Doppelpunkten existierenden Schnittpunkte mit der K_4 , während die perspektivischen Achsen $p_{aa'}$ und $p_{bb'}$ die Berührungspunkte der Träger mit den beiden Kegelschnitten festsetzen.

Konstruiert man die projektiven Punktreihen so, dass ein Doppelpunkt auf dem einen Träger einem der Doppelpunkte

auf dem andern Träger entspricht, wie in Fig. 16, in der dem Doppelpunkt A_2B_2 auf t der Doppelpunkt $A'_2B'_2$ auf t' zugeordnet ist, so fallen zwei sich zugeordnete Verbindungslinien entsprechender Punkte oder zwei entsprechende Tangenten der umhüllten Kegelschnitte in der Verbindungslinie d der beiden Doppelpunkte zusammen. Diese Gerade sondert sich daher als Teil der Kurve vierter Ordnung ab, und der Rest ist eine Kurve dritter Ordnung. Von den vier Schnittpunkten der vorhin eingeführten Geraden g ist der Schnittpunkt mit d ausser Betracht zu lassen. Die Kurve besitzt, da sie eindeutig auf die Kegelschnitte bezogen und also vom Geschlechte Null ist, einen Doppelpunkt. Sie ist demnach von der vierten Klasse. Die Stelle der wegfallenden Doppelpunkte nehmen die beiden Schnittpunkte D_1 und D_3 der Geraden d mit der K_3 ein, in denen sich ausser den in d zusammenfallenden Tangenten noch zwei weitere entsprechende Tangenten der umhüllten Kegelschnitte treffen. Die K_3 berührt jeden der Kegelschnitte — in der Figur sind es eine Ellipse und eine Hyperbel — dreimal. Der vierte Berührungspunkt eines Kegelschnittes mit dem Schnitterzeugnis ist der Berührungspunkt mit d . Gemeinsame Tangenten haben die K_3 und ein Kegelschnitt ausser den Tangenten in den Berührungspunkten noch zwei. Die zwei andern der vier ursprünglichen Tangenten fallen in d zusammen.

Die Figur zeigt ausser der K_3 , die durch den Schnitt der Geraden $A_1A'_1$ und $B_1B'_1$ erzeugt wird, noch das Erzeugnis (K_3) der Geraden $A_1B'_1$ und $B_1A'_1$, eine Kurve dritten Grades, deren Schleife sich durchs Unendliche erstreckt. Wie K_3 schneidet (K_3) die Träger in den sich nicht entsprechenden Doppelpunkten A_6B_6 und $A'_1B'_1$. Ausserdem schneidet sie die Träger in deren Schnitt mit den perspektivischen Achsen $p_{aa'}$ und $p_{bb'}$. Da die Geraden $B_1B'_1$ eine Hyperbel umhüllen, so ist $p_{bb'}$ die unendlich ferne Gerade, und (K_3) muss also jeden Träger ausser in zwei im Endlichen liegenden Punkten auch noch im Unendlichen schneiden.

Das Schnitterzeugnis der Geraden $A_1A'_1$ und $B_1B'_1$ reduziert sich auch auf eine Kurve dritter Ordnung, wenn die Reihen $(A_1A_2A_3\dots)$ und $(A'_1A'_2A'_3\dots)$ oder die Reihen $(B_1B_2B_3\dots)$ und $(B'_1B'_2B'_3\dots)$ perspektiv liegen; denn in diesem Falle um-

hüllen die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte zweier Reihen einen Kegelschnitt, währenddem die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte der beiden **andern Reihen** durch einen Punkt gehen **und also** ein Strahlenbüschel bilden. Das Erzeugnis der Projektivität zwischen der Tangentenschar einer **Kurve** zweiter Klasse und den Strahlen eines Büschels in ihrer Ebene ist aber nach einem bekannten Satz eine Kurve dritter Ordnung vierter Klasse, die den Scheitel des Büschels zum Doppelpunkt hat und die Kurve zweiter Klasse dreimal berührt, sowie überdies noch zwei Tangenten mit ihr gemein hat.

Lässt man weiter wie in Fig. 17 beide Doppelpunkte eines Trägers den Doppelpunkten des andern Trägers entsprechen, so bilden die Verbindungslinien d_1 und d_2 der sich zugeordneten Doppelpunkte einen Teil der Kurve vierter Ordnung, und der Rest ist ein Kegelschnitt K . Er berührt jeden der umhüllten Kegelschnitte zweimal und hat daher ausser in den Berührungspunkten keine Tangenten mehr mit ihnen gemein. Die drei ursprünglichen Doppelpunkte werden ersetzt durch zwei der vier Schnittpunkte der Geraden d_1 und d_2 mit dem erzeugten Kegelschnitt, in der Figur D_1 und D_3 , und durch den Schnittpunkt D_2 der Geraden d_1 und d_2 .

Einen Kegelschnitt würde man als Schnitterzeugnis auch erhalten, wenn ein Doppelpunkt des einen Trägers einem Doppelpunkte des andern Trägers zugeordnet wäre und nebstdem die Reihen $(A_1 A_2 A_3 \dots)$ und $(A'_1 A'_2 A'_3 \dots)$ oder $(B_1 B_2 B_3 \dots)$ und $(B'_1 B'_2 B'_3 \dots)$ perspektiv liegen würden, oder wenn beide Reihenpaare perspektiv liegen und also je ein Strahlenbüschel bestimmen würden. Bei Entsprechen zweier Doppelpunkte und Perspektivität beider Reihenpaare oder bei Entsprechen beider Paare der Doppelpunkte und Perspektivität der Reihen müsste auch der Kegelschnitt noch zerfallen.

Entsprechen endlich beide Doppelpunkte auf t den Doppelpunkten auf t' , und lässt man, um den Fall der Fig. 18 zu erhalten, sowohl auf t als auf t' einen Doppelpunkt ins Unendliche und den andern in den Schnittpunkt der Träger rücken, so werden die Träger als die Geraden d_1 und d_2 zu einem Teil der erzeugten Kurve. Der Rest ist wieder ein Kegelschnitt. Er schneidet die Träger in ihren Schnittpunkten mit den per-

spektivischen Achsen $p_{ab'}$ und $p_{ba'}$. Da nun die entsprechenden Punkte zu den im Schnittpunkt der Träger vereinigten Punkten sämtlich im Unendlichen liegen, so rücken auch die perspektivischen Achsen ins Unendliche hinaus. Der Kegelschnitt muss also jeden Träger im Unendlichen schneiden, und zwar in zwei zusammenfallenden Punkten, d. h. er muss ihn im Unendlichen berühren. Er ist somit eine Hyperbel mit den Trägern als Asymptoten, wie vorher gefunden worden ist.

