Zur Geometrie des Dreiecks

A. Droz-Farny und G. Sidler.

Zur Geometrie des Dreiecks.

Die Naturforschende Gesellschaft Bern hat die Freude, das Andenken ihres treuen, langjährigen Mitgliedes, des Herrn Prof. Dr. G. Sidler sel., in schönster Weise neu belebt zu sehen dadurch, dass die Publikation der nachstehenden Arbeit in den «Mitteilungen» in hochherziger Weise von Frau Professor Sidler ermöglicht worden ist.

Auch an dieser Stelle sprechen wir der verehrten Donatorin unsern besten Dank aus.

Die Redaktionskommission.

Vorwort.

Am 23. Februar 1902 hat Herr Professor G. Sidler das Manuskript zu der vorliegenden Arbeit fertig gestellt. Nach vorliegenden Notizen vom 17. Juli 1905 war die Arbeit für den Druck bestimmt. Hindernd im Wege standen die Figuren, mit grossem Fleisse von einem Schüler der Prima des städtischen Realgymnasiums, Alfred Zwygart, hergestellt. Das Auge kann die Menge der Linien kaum fassen. Prof. Sidler sollte den Druck nicht mehr erleben. Durch die wohlwollende Vermittlung von Prof. Dr. Ch. Moser, einem Freunde des Verstorbenen, erhielt ich von der bernischen Stadtbibliothek den Auftrag, die Sidler'schen Manuskripte zu ordnen. Ich habe meine Freude gehabt an dem Bienenfleisse, mit welchem G. Sidler so manche Blüten aus dem Gebiete des exakten Wissens zusammengetragen hat. Die gegenwärtige Arbeit stellt einen kunstvoll zusammengestellten Blütenstrauss dar. Sie zeigt uns die Meisterschaft ihrer Verfasser auf dem Gebiete der Geometrie des Dreiecks. Wir können hier nicht eintreten auf die reichhaltige Literatur, welche Prof. Sidler über das Dreieck gesammelt hat. Ich habe die Schwierigkeiten betreffs der Figuren so zu überwinden gesucht, dass ich dieselben neu erstellte und zerlegte. Dem freundlichen Entgegenkommen von Frau Prof. Sidler sowie der Redaktionskommission und des Vorstandes der Naturforschenden Gesellschaft ist es zu verdanken, dass eine Perle geometrischer Forschung auch einem weitern Kreise zugänglich gemacht werden kann.

Bern, den 16. August 1911.

Dr. O. Schenker.

Zum bessern Verständnis des Textes soll hier noch an einige (leicht zu beweisende) Sätze und Definitionen aus der synthetischen Geometrie erinnert werden. Das Doppelverhältnis von vier Punkten A, B, C und D nämlich $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ (mit A und B zu Grund-, C und D zu Teilpunkten) wird durch Zentralprojektion nicht geändert. Ist $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1$, so wird die Strecke AB durch C und D harmonisch geteilt (A, B, C und D bilden vier harmonische Punkte). Liegen auf einer Geraden vier Punkte harmonisch, so ist der halbe Abstand der Grundpunkte das geometrische Mittel zwischen den Abständen der Teilpunkte von der Mitte der Grundpunkte. Hieraus folgt: die Zentrale zweier sich schneidenden Kreise wird von diesen in vier harmonischen Punkten (A, B, C und D) geschnitten. Hält man A und B fest, so beschreiben C und D zwei projektivische Punktreihen (je vier entsprechende Punkte haben dasselbe Doppelverhältnis), sie bilden zusammen ein involutorisches Punktsystem auf einer Geraden (die den unendlich fernen Punkten der einen Punktreihe entsprechenden der andern fallen zusammen (in das Zentrum M des einen Kreises). A und B heissen die Doppelpunkte der Involution, M ihr Mittelpunkt.

Zieht man durch A, B, C und D je einen Strahl (a, b, c und d) durch denselben Punkt, so heisst $\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}$ das Doppelverhältnis dieser Strahlen (mit a und b zu Grund- und c und d zu Teilstrahlen) und es ist $\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} = \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$.

Pol und Polare.

Zieht man von einem Punkte P die Tangenten an einem Kreis, so heisst die Berührungssehne die Polare von P in Bezug auf den Kreis. Dreht sich die Polare um einen Punkt, so beschreibt der Pol eine Gerade (durch Zentralprojektion zu beweisen). Irgend eine Gerade durch P schneidet den Kreis und die Polare in drei Punkten, die mit P vier harmonische Punkte bilden (mit Zentralprojektion zu beweisen).

Das vollständige Vierseit.

Vier Gerade a, b, c und d bilden ein vollständiges Vierseit, a, b, c, d sind seine Seiten. Der Schnittpunkt zweier Seiten ist eine Ecke. Man hat also $\binom{4}{2} = 6$ Ecken. Jede Ecke hat den Schnittpunkt der beiden andern Seiten zur Gegenecke. Man hat also drei Paare von Gegenecken. Die Verbindungsgerade zweier Gegenecken ist eine Diagonale. Das vollständige Vierseit hat also drei Diagonalen. Diese bilden ein Dreiseit und die Ecken desselben sind die Diagonalpunkte des Vierseits. Ein Diagonalpunkt ist also der Schnittpunkt zweier Diagonalen oder der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden zweier Paare von Gegenecken. Jede Diagonale eines vollständigen Vierseits wird von den beiden andern und den Seiten in vier harmonischen Punkten geschnitten (zu beweisen, indem man das vollständige Vierseit als Parallelogramm projiziert).

Bern, den 8. September 1911.

Dr. O. Schenker.

§ 1.

Um die Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks ABC als Durchmesser schlagen wir Kreise, so gehen diese Kreise je durch die Fusspunkte der von den Endpunkten der betreffenden Seite ausgehenden Höhenperpendikel. Die Höhenperpendikel AD, BE, CF des gegebenen Dreiecks sind daher die gemeinsamen Sehnen je zweier dieser Kreise, und der Höhenpunkt H des Dreiecks ABC ist der Punkt gleicher Potenzen in Bezug auf diese drei Kreise.

Die drei Höhen des Dreiecks ABC mögen nun die entsprechenden Kreise in den Punktenpaaren i, I; k, K; l, L schneiden, und zwar mögen Di, Ek, Fl je dieselben Richtungen wie DA, EB, FC und DI, EK, FL die entgegengesetzten Richtungen haben. Sollen die Punktenpaare i, I; k, K; l, L alle reell werden, so muss das Dreieck ABC spitzwinklig sein. Alsdann liegen die Ecken A, B, C ausserhalb der um die Gegenseiten als Durchmesser beschriebenen Kreise, und die Punkte i, k, l liegen innerhalb des Dreiecks.

Da nun H der Potenzpunkt der drei Kreise ist, so haben wir

$$\begin{aligned} & Hi \cdot HI = Hk \cdot HK = Hl \cdot HL = \\ & = HA \cdot HD = HB \cdot HE = HC \cdot HF. \end{aligned}$$

Beim spitzwinkligen Dreieck ist $HA \cdot AD$ negativ, und es liegt somit der Höhenpunkt H zwischen den Punktenpaaren iI, kK, lL.

Nun ist $DH = BD \cdot \operatorname{cotg} C = \dfrac{c \cos B \cos C}{\sin C} = 2R \cos B \cos C$,

---

*) In der Programmabhandlung des Gymnasiums zu Beuthen 1894: «Aufgaben und Lehrsätze über Linien im Dreieck» betrachtet Herr O. Bröckerhoff die oben mit i, k, l bezeichneten Punkte so wie die Punkte p, q, r, und zeigt im Lehrsatz VI wie oben, dass die Geraden Ap, Bq, Cr sich in einem nämlichen Punkte n schneiden. Diese Betrachtungen suchte ich zu vervollständigen und zu erweitern, und habe darüber auch mit meinem Freunde, Herrn A. Droz-Farny in Pruntrut, korrespondiert; so ist unsere obige gemeinsame Arbeit entstanden. G. Sidler.

wo R der Radius des Umkreises von ABC ist; ferner $HA = \frac{AF}{\sin B} = \frac{b \cos A}{\sin B} = 2 R \cos A$. Wir finden somit

$$\begin{aligned} Hi \cdot HI = Hk \cdot HK = Hl \cdot HL = \\ = HA \cdot HD = HB \cdot HE = HC \cdot HF = \\ = -4 R^2 \cos A \cos B \cos C. \end{aligned} \qquad 1.$$

Aus 1 folgt $\frac{Hk}{Hl} = \frac{HL}{HK}$. Die Scheiteldreiecke kHl und KHL sind also einander ähnlich, und kl und KL liegen zueinander antiparallel.

Die Polare von H in Bezug auf den Kreis um BC als Durchmesser geht durch die zwei übrigen Diagonalpunkte des Vierecks BECF d. h. durch A und durch den Schnittpunkt D′ von EF mit BC. Die zu H in Bezug auf die Strecken iI, kK, lL harmonischen Punkte sind daher die Ecken A, B, C des gegebenen Dreiecks.

Auf den Höhenperpendikeln des Dreiecks ABC haben wir also die harmonischen Relationen:

$$(AH, iI) = -1, \ (BH, kK) = -1, \ (CH, lL) = -1. \qquad 2.$$

Die Punktenpaare i, I; k, K; l, L kann man daher auch definieren als die Punktenpaare, die im Dreieck ABC die Eckabschnitte AH, BH, CH der Höhenperpendikel harmonisch teilen, und zwar so, dass die Mitten dieser Punktenpaare die Fusspunkte D, E, F der betreffenden Höhenperpendikel sind.

Aus dieser Definition folgt $Di^2 = DI^2 = DH \cdot DA$. Die ähnlichen Dreiecke CDH und BDA geben aber $\frac{DH}{CD} = \frac{DB}{DA}$, und somit wird $Di^2 = DI^2 = CD \cdot DB$, woraus wieder folgt, dass die Dreiecke BiC und BIC respektive in i und I rechtwinklig sind, und somit i und I die Schnittpunkte des Höhenperpendikels AD mit dem um BC als Durchmesser beschriebenen Kreise darstellen. Dieses ist wieder die frühere Definition.

§ 2.

Ziehen wir nun die Strahlen AK, Ak, AL, Al, BL, Bl, BI, Bi, CI, Ci, CK, Ck.

Es ist $\overline{AK}^2 = AE \cdot AC$, $\overline{AL}^2 = AF \cdot AB$. Aber der Kreis um BL als Durchmesser geht durch die Punkte E und F, und die Potenz des Punktes A gibt $AE \cdot AC = AF \cdot AB$. Daher

$$\begin{aligned} AK &= Ak = AL = Al = \sqrt{bc \cos A} \\ BL &= Bl = BI = Bi = \sqrt{ca \cos B} \\ CI &= Ci = CK = Ck = \sqrt{ab \cos C}. \end{aligned} \qquad 3.$$

Betrachten wir nun die Schnittpunkte

$$\left.\begin{matrix} BL \\ CK \end{matrix}\right\} = P, \quad \left.\begin{matrix} Bl \\ Ck \end{matrix}\right\} = p, \quad \left.\begin{matrix} Bl \\ CK \end{matrix}\right\} = P', \quad \left.\begin{matrix} BL \\ Ck \end{matrix}\right\} = p'$$

$$\left.\begin{matrix} CI \\ AL \end{matrix}\right\} = Q, \quad \left.\begin{matrix} Ci \\ Al \end{matrix}\right\} = q, \quad \left.\begin{matrix} Ci \\ AL \end{matrix}\right\} = Q', \quad \left.\begin{matrix} CI \\ Al \end{matrix}\right\} = q' \qquad 4.$$

$$\left.\begin{matrix} AK \\ BI \end{matrix}\right\} = R, \quad \left.\begin{matrix} Ak \\ Bi \end{matrix}\right\} = r, \quad \left.\begin{matrix} Ak \\ BI \end{matrix}\right\} = R', \quad \left.\begin{matrix} AK \\ Bi \end{matrix}\right\} = r',$$

so haben wir also auf den hier eingeführten 12 Strahlen je die Punkte:

$$\begin{matrix} AkrR', & BlpP', & CiqQ' \\ AKRr', & BLPp', & CIQq' \\ Alqq', & Birr', & Ckpp' \\ ALQQ', & BIRR', & CKPP'. \end{matrix} \qquad 5.$$

Ziehen wir jetzt noch die Geraden AP, Ap, AP', Ap' u.s.w., so ist infolge von 3 Dreieck $AKP \cong ALP$, Dreieck $Akp \cong Alp$, Dreieck $AKP' \cong AlP'$, Dreieck $Akp' \cong ALp'$.

Die Geraden AP, Ap, AP', Ap' gehen somit respektive senkrecht durch die Mitten der Strecken KL, kl, Kl, kL, und analog gehen die Geraden BQ, Bq, BQ', Bq' respektive senkrecht durch die Mitten der Strecken 6.
LI, li, Li, lI, und die Geraden CR, Cr, CR', Cr' gehen respektive senkrecht durch die Mitten der Strecken IK, ik, Ik, iK.

Von den 12 zuletzt eingeführten Geraden schneiden sich daher noch 8 mal je 3 in einem nämlichen Punkte. Nämlich wir haben

$$\begin{gathered}
\left.\begin{array}{l} A\,P \\ B\,Q \\ C\,R \end{array}\right\} = N = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } I\,K\,L, \\
\left.\begin{array}{l} A\,p \\ B\,q \\ C\,r \end{array}\right\} = n = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } i\,k\,l, \\
\left.\begin{array}{l} A\,P \\ B\,Q' \\ C\,r' \end{array}\right\} = N' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } i\,K\,L, \\
\left.\begin{array}{l} A\,p \\ B\,q' \\ C\,R' \end{array}\right\} = n' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } I\,k\,l, \\
\left.\begin{array}{l} A\,p' \\ B\,Q \\ C\,R' \end{array}\right\} = N'' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } I\,k\,L, \\
\left.\begin{array}{l} A\,P' \\ B\,q \\ C\,r' \end{array}\right\} = n'' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } i\,K\,l, \\
\left.\begin{array}{l} A\,P' \\ B\,q' \\ C\,R \end{array}\right\} = N''' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } I\,K\,l, \\
\left.\begin{array}{l} A\,p' \\ B\,Q' \\ C\,r \end{array}\right\} = n''' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } i\,k\,L.
\end{gathered} \tag{7.}$$

Dies vorausgesetzt haben wir auf den in 6 eingeführten 12 Geraden je die Punkte

$$\begin{array}{lll}
A\,P\,N\,N', & B\,Q\,N\,N'', & C\,R\,N\,N''' \\
A\,p\,n\,n', & B\,q\,n\,n'', & C\,r\,n\,n''' \\
A\,P'\,n''\,N''', & B\,Q'\,n'''\,N', & C\,R'\,n'\,N'' \\
A\,p'\,N''\,n''', & B\,q'\,N'''\,n', & C\,r'\,N'\,n''.
\end{array} \tag{8.}$$

§ 3.

Da $AK = Ak = AL = Al$, so liegen die vier Punkte K, k, L, l auf einem Kreise vom Mittelpunkt A. Auf diesem Kreise hat das Viereck $KkLl$ die Eigenschaft, dass von den Gegenseiten Kk und Ll jede durch den Pol der andern geht. Da ferner $\overline{AK}^2 = AE \cdot AC$, so ist der obige Kreis A orthogonal zum Kreise um BC als Durchmesser.

Betrachten wir einen beliebigen Kreis, dessen Mittelpunkt wir A nennen, ziehen in diesem Kreise irgend eine Sehne Ll, deren Pol wir mit B bezeichnen, und legen durch B irgend eine zweite Sehne Kk, so liegt der Pol C von Kk auf der Polaren von B d. h. auf der Geraden Ll. Sei endlich $\left.\begin{matrix}Kk\\Ll\end{matrix}\right\} = H$, so ist H der Pol der Geraden BC.

Dies vorausgesetzt ist die Figur $ABCHKkLl$ identisch mit der in §§ 1 und 2 ebenso bezeichneten Figur. Denn die Geraden BKk und CLl stehen respektive senkrecht zu AC und zu AB, und somit ist H der Höhenpunkt des Dreiecks ABC, und da AK und Ak respektive senkrecht zu CK und Ck stehen, so sind K und k die Schnittpunkte des Höhenperpendikels BE von ABC mit dem um AC als Durchmesser beschriebenen Kreise, und analog sind L und l die Schnittpunkte des Höhenperpendikels CF von ABC mit dem um AB als Durchmesser beschriebenen Kreise.

Im Viereck $KkLl$ ist der eine Diagonalpunkt $H = \left\{\begin{matrix}Kk,\\Ll\end{matrix}\right.$ und die zwei andern Diagonalpunkte seien u und u′, nämlich

$$u = \left\{\begin{matrix}Kl\\kL\end{matrix}\right., \quad u' = \left\{\begin{matrix}KL\\kl.\end{matrix}\right.$$

Dies vorausgesetzt liegen u und u′ auf den Polaren BC von H in Bezug auf den Kreis A, und man hat $(BC, uu') = -1$.

Die Polare von u′ ist die Gerade Hu, und auf dieser liegen die Pole der Geraden $u'KL$ und $u'kl$, d. h.:

Die Punkte $P = \left\{\begin{matrix}BL\\CK\end{matrix}\right.$ und $p = \left\{\begin{matrix}Bl\\Ck\end{matrix}\right.$ liegen auf Hu.

Die Polare von u ist die Gerade Hu', und auf dieser liegen die Pole der Geraden uKl und ukL, d. h.:

Die Punkte $P' = \left\{\begin{matrix}Bl\\CK\end{matrix}\right.$ und $p' = \left\{\begin{matrix}BL\\Ck\end{matrix}\right.$ liegen auf Hu'.

Wir erhalten also den Satz:

Die Geraden Pp und $P'p'$ gehen durch den Punkt H, und schneiden BC respektive in den Punkten u und u'.

Betrachten wir jetzt ebenso die Vierecke $LlIi$ und $IiKk$, so haben wir die folgenden Resultate:

Seien u, v, w, u', v', w' die Punkte:

$$u = \begin{cases} Kl \\ kL \end{cases}, \quad v = \begin{cases} Li \\ lI \end{cases}, \quad w = \begin{cases} Ik \\ iK \end{cases},$$
$$u' = \begin{cases} KL \\ kl \end{cases}, \quad v' = \begin{cases} LI \\ li \end{cases}, \quad w' = \begin{cases} IK \\ ik \end{cases}, \tag{9.}$$

so liegen u, u' auf der Geraden BC; v, v' auf der Geraden CA; w, w' auf der Geraden AB, und teilen je diese Strecken harmonisch, d. h.:

$$(BC, uu') = -1, \quad (CA, vv') = -1, \quad (AB, ww') = -1. \tag{10.}$$

Ferner gehen die Geraden:

$$Pp, P'p', Qq, Q'q', Rr, R'r' \tag{11.}$$

alle durch den Höhenpunkt H des Dreiecks ABC, und die Geraden HPp und $HP'p'$ schneiden BC respektive in den Punkten u und u'; die Geraden HQq und $HQ'q'$ schneiden CA in den Punkten v und v'; die Geraden HRr und $HR'r'$ schneiden AB in den Punkten w und w'.

In Folge von 10 haben wir daher die harmonischen Strahlsysteme:

$$\left.\begin{matrix} HB & kK \\ HC & lL \\ \hline Hu & Pp \\ Hu' & P'p' \end{matrix}\right\} = -1, \quad \left.\begin{matrix} HC & lL \\ HA & iI \\ \hline Hv & Qq \\ Hv' & Q'q' \end{matrix}\right\} = -1, \quad \left.\begin{matrix} HA & iI \\ HB & kK \\ \hline Hw & Rr \\ Hw' & R'r' \end{matrix}\right\} = -1. \tag{12.}$$

Das Viereck $PpP'p'$ hat zu Diagonalpunkten B, C, H,
Das Viereck $QqQ'q'$ hat zu Diagonalpunkten C, A, H, 13.
Das Viereck $RrR'r'$ hat zu Diagonalpunkten A, B, H,

und wir haben die harmonischen Punktsysteme:

$$\begin{matrix} (Pp, Hu) = -1, & (Qq, Hv) = -1, & (Rr, Hw) = -1, \\ (P'p', Hu') = -1, & (Q'q', Hv') = -1, & (R'r', Hw') = -1, \end{matrix} \tag{14.}$$

und ferner auf den durch die Ecken A, B, C des Stammdreiecks gehenden Strahlen die harmonischen Punktsysteme:

$$\begin{array}{lll} (AK, Rr') = -1, & (BL, Pp') = -1, & (CI, Qq') = -1, \\ (Ak, rR') = -1, & (Bl, pP') = -1, & (Ci, qQ') = -1, \\ (AL, QQ') = -1, & (BI, RR') = -1, & (CK, PP') = -1, \\ (Al, qq') = -1, & (Bi, rr') = -1, & (Ck, pp') = -1. \end{array} \qquad 15.$$

Durch jeden der Punkte u, v, w, u′, v′, w′ gehen nun 4 Strahlen, die in Folge der harmonischen Relationen 2 je ein System von 4 harmonischen Strahlen bilden:

$$\left.\begin{array}{l} uKl \\ ukL \\ \hline uPpH \\ uu'BC \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} vLi \\ vlI \\ \hline vQqH \\ vv'CA \end{array}\right\} = -1. \quad \left.\begin{array}{l} wIk \\ wiK \\ \hline wRrH \\ ww'AB \end{array}\right\} = -1, \qquad 16.$$

$$\left.\begin{array}{l} u'KL \\ u'kl \\ \hline u'P'p'H \\ u'uBC \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} v'LI \\ v'li \\ \hline v'Q'q'H \\ v'vCA \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} w'IK \\ w'ik \\ \hline w'R'r'H \\ w'wAB \end{array}\right\} = -1. \qquad 17.$$

Durch jede Ecke des Dreiecks ABC gehen 2 Systeme von je 4 harmonischen Strahlen, wo aber das betreffende Höhenperpendikel beiden Systemen angehört:

$$\left.\begin{array}{l} ABww' \\ AHIi \\ \hline AkrR' \\ AKr'R \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} BCuu' \\ BHKk \\ \hline BlpP' \\ BLp'P \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} CAvv' \\ CHLl \\ \hline CiqQ' \\ CIq'Q \end{array}\right\} = -1,$$

$$\left.\begin{array}{l} ACvv' \\ AHIi \\ \hline Alqq' \\ ALQQ' \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} BAww' \\ BHKk \\ \hline Birr' \\ BIRR' \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} CBuu' \\ CHLl \\ \hline Ckpp' \\ CKPP' \end{array}\right\} = -1. \qquad 18.$$

§ 4.

Die Dreiecke ABC, IKL, ikl liegen perspektivisch mit dem gemeinsamen perspektivischen Zentrum H, und somit liegen die Punkte

$$\left.\begin{array}{r} BC \\ KL \\ kl \end{array}\right\} = u', \quad \left.\begin{array}{r} CA \\ LI \\ li \end{array}\right\} = v', \quad \left.\begin{array}{r} AB \\ IK \\ ik \end{array}\right\} = w'$$

in einer Geraden, der gemeinsamen perspektivischen Axe der genannten drei Dreiecke. Da nun u, v, w zu u′ v′ w′ respektive in Bezug auf BC, CA, AB harmonisch liegen, so folgt weiter:

Es schneiden sich je in einem nämlichen Punkte die Geraden:

$$\left.\begin{matrix} Au \\ Bv \\ Cw \end{matrix}\right\} = S, \quad \left.\begin{matrix} Au \\ Bv' \\ Cw' \end{matrix}\right\} = S', \quad \left.\begin{matrix} Au' \\ Bv \\ Cw' \end{matrix}\right\} = S'', \quad \left.\begin{matrix} Au' \\ Bv' \\ Cw \end{matrix}\right\} = S''', \qquad 19.$$

und es liegen in einer Geraden die Punkte:

$$\left.\begin{array}{l} u', v', w' \,..\, \text{Gerade } s \;\; = \text{persp. Axe der Dreiecke } \overset{o}{ABC}, \overset{N}{IKL}, \overset{n}{ikl} \\ u', v, w \,..\, \text{Gerade } s' \; = \text{persp. Axe der Dreiecke } \overset{o}{ABC}, \overset{N'}{iKL}, \overset{n'}{Ikl} \\ u, v', w \,..\, \text{Gerade } s'' = \text{persp. Axe der Dreiecke } \overset{o}{ABC}, \overset{N''}{IkL}, \overset{n''}{iKl} \\ u, v, w' \,..\, \text{Gerade } s''' = \text{persp. Axe der Dreiecke } \overset{o}{ABC}, \overset{N'''}{IKl}, \overset{n'''}{ikL}. \end{array}\right. \qquad 20.$$

Alle diese 9 Dreiecke haben den Höhenpunkt H von ABC zum gemeinsamen perspektivischen Zentrum. Oberhalb dieser Dreiecke haben wir je das Umkreiszentrum des betreffenden Dreiecks hingeschrieben.

Die Geraden s, s′, s″, s‴ sind die harmonischen Polaren der Punkte S, S′, S″, S‴ in Bezug auf das Dreieck ABC.

Die Strahlen HQqv und HRrw mögen BC in y und in z schneiden. Projizieren wir nun das Höhenperpendikel AHDiI von B aus auf rR und von C aus auf qQ, so erhalten wir, wenn wir mit $\sim$ die projektivische Beziehung bezeichnen

$$(A, H, D, i, I) \sim (w, H, z, r, R) \text{ und}$$
$$(A, H, D, i, I) \sim (v, H, y, q, Q).$$

Daher auch B (v, H, y, q, Q) $\sim$ C (w, H, z, r, R), und da By und Cz eine nämliche Gerade bilden, so folgt:

$$\text{Die Punkte } \left.\begin{matrix} Bv \\ Cw \end{matrix}\right\} = S, \quad \left.\begin{matrix} BH \\ CH \end{matrix}\right\} = H, \quad \left.\begin{matrix} Bq \\ Cr \end{matrix}\right\} = n, \quad \left.\begin{matrix} BQ \\ CR \end{matrix}\right\} = N$$

liegen in einer nämlichen Geraden, und da nach 14 (vH, qQ) $= -1$, so hat man auch (HS, nN) $= -1$.

Wir erhalten somit vier neue ausgezeichnete Gerade im Dreieck:

$$\begin{array}{l} H, S, \quad n, \quad N \; \ldots \text{Gerade } h \\ H, S', \quad n', \quad N' \; \ldots \text{Gerade } h' \\ H, S'', \quad n'', \quad N'' \ldots \text{Gerade } h'' \\ H, S''', n''', N''' \ldots \text{Gerade } h''', \end{array} \qquad 21.$$

und die ausgezeichneten vier Punkte auf jeder dieser Geraden liegen je zueinander harmonisch:

$$\begin{array}{c} (HS, nN) = -1, \; (HS', n'N') = -1, \\ (HS'', n''N'') = -1, \; (HS''', n'''N''') = -1. \end{array} \qquad 22.$$

Die Punkte S u. s. w. sind durch 19, die Punkte n und N u. s. w. durch 7 definiert.

Aus der Definition der vier Punkte S in 19 geht hervor:

Das Viereck $SS'S''S'''$ hat zu Diagonalpunkten die Ecken A, B, C des Stammdreiecks, indem

$$\left.\begin{array}{c} SS' \\ S''S''' \end{array}\right\} = A, \quad \left.\begin{array}{c} SS'' \\ S'''S' \end{array}\right\} = B, \quad \left.\begin{array}{c} SS''' \\ S'S'' \end{array}\right\} = C. \qquad 23.$$

Die obigen Geraden h, h', h'', h''' stellen also die Strahlen dar, die man in einem gegebenen Viereck $SS'S''S'''$ vom Höhenpunkt H des Dreiecks der Diagonalpunkte nach den Ecken des gegebenen Vierecks zieht.

Nach 19 liegen ferner auf SS' der Punkt u und auf $S''S'''$ der Punkt u'. Aber u und u' liegen auf BC, und somit haben wir auch:

$$\begin{array}{l} u = \left\{\begin{array}{c} ASS' \\ BC \end{array}\right., \; v = \left\{\begin{array}{c} BSS'' \\ CA \end{array}\right., \; w = \left\{\begin{array}{c} CSS''' \\ AB \end{array}\right., \\ u' = \left\{\begin{array}{c} AS''S''' \\ BC \end{array}\right., \; v' = \left\{\begin{array}{c} BS'''S' \\ CA \end{array}\right., \; w' = \left\{\begin{array}{c} CS'S'' \\ AB. \end{array}\right. \end{array} \qquad 24.$$

Im Viereck $SS'S''S'''$ stellen somit die Punktenpaare u, u'; v, v'; w, w' die Schnittpunkte je einer Diagonalen mit dem durch den dritten Diagonalpunkt gehenden Gegenseitenpaare dar.

Und es bestehen somit die harmonischen Relationen:

$$\left.\begin{aligned}&(Au,\, SS') = -1,\quad (Bv,\, SS'') = -1,\quad (Cw,\, SS''') = -1\\&(Au',\, S''S''') = -1,\quad (Bv',\, S'''S') = -1,\quad (Cw',\, S'S'') = -1\end{aligned}\right\} \quad 25.$$

und ferner

$$\left.\begin{aligned}&\left.\begin{matrix}uASS'\\ \underline{uu'BC}\\ uv'w\\ uvw'\end{matrix}\right\} = -1,\quad \left.\begin{matrix}vBSS''\\ \underline{vv'CA}\\ vw'u\\ vwu'\end{matrix}\right\} = -1,\quad \left.\begin{matrix}wCSS'''\\ \underline{ww'AB}\\ wu'v\\ wuv'\end{matrix}\right\} = -1,\\&\left.\begin{matrix}u'AS''S'''\\ \underline{u'uBC}\\ u'vw\\ u'v'w'\end{matrix}\right\} = -1,\quad \left.\begin{matrix}v'BS'''S'\\ \underline{v'vCA}\\ v'wu\\ v'w'u'\end{matrix}\right\} = -1,\quad \left.\begin{matrix}w'CS'S''\\ \underline{w'wAB}\\ w'uv\\ w'u'v'\end{matrix}\right\} = -1.\end{aligned}\right\} \quad 26.$$

§ 5.

Betrachten wir jetzt das Viereck $nNn'N'$.

Aus 8 folgt $\left.\begin{matrix}NN'\\ nn'\end{matrix}\right\} = A$, und aus 21 $\left.\begin{matrix}nN\\ n'N'\end{matrix}\right\} = H$. Es sind also A und H zwei Diagonalpunkte des Vierecks. Gemäss 22 sind aber auf den durch H gehenden Gegenseiten je die Punkte S und S′ zu H harmonisch; die zweite durch A gehende Diagonale ist somit die Gerade ASS', und der dritte Diagonalpunkt ist der zu A in Bezug auf SS' harmonische Punkt d. h. nach 25 der Punkt u, und wir finden somit $\left.\begin{matrix}nN'\\ n'N\end{matrix}\right\} = u$.

Aus 8 folgt ferner, dass P auf AN und p auf An liegt, und gemäss 14 liegen P und p auf Hu; wir haben also $P = \begin{cases}ANN'\\ uH\end{cases}$, $p = \begin{cases}Ann'\\ uH\end{cases}$, und die harmonischen Eigenschaften des Vierecks $nNn'N'$ ergeben $(APNN') = -1$ und $(Ap,\, nn') = -1$.

Betrachten wir ebenso die Vierecke $nNn''N''$, $nNn'''N'''$, und $n''N''n'''N'''$, $n'''N'''n'N'$, $n'N'n''N''$, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}&\text{Viereck } nNn'N' \;\ldots\; \text{Diagonalpunkte } H, A, u\\&\text{Viereck } nNn''N'' \;\ldots\; \text{Diagonalpunkte } H, B, v\\&\text{Viereck } nNn'''N''' \;\ldots\; \text{Diagonalpunkte } H, C, w\\&\text{Viereck } n''N''n'''N''' \;\ldots\; \text{Diagonalpunkte } H, A, u'\\&\text{Viereck } n'''N'''n'N' \;\ldots\; \text{Diagonalpunkte } H, B, v'\\&\text{Viereck } n'N'n''N'' \;\ldots\; \text{Diagonalpunkte } H, C, w',\end{aligned}\right\} \quad 27.$$

indem
$$\left.\begin{matrix} nN \\ n'N' \end{matrix}\right\} = H, \quad \left.\begin{matrix} NN' \\ nn' \end{matrix}\right\} = A, \quad \left.\begin{matrix} nN' \\ n'N \end{matrix}\right\} = u,$$
$$\left.\begin{matrix} nN \\ n''N'' \end{matrix}\right\} = H, \quad \left.\begin{matrix} NN'' \\ nn'' \end{matrix}\right\} = B, \quad \left.\begin{matrix} nN'' \\ n''N \end{matrix}\right\} = v,$$
$$\left.\begin{matrix} nN \\ n'''N''' \end{matrix}\right\} = H, \quad \left.\begin{matrix} NN''' \\ nn''' \end{matrix}\right\} = C, \quad \left.\begin{matrix} nN''' \\ n'''N \end{matrix}\right\} = w,$$
$$\left.\begin{matrix} n''N'' \\ n'''N''' \end{matrix}\right\} = H, \quad \left.\begin{matrix} n''N''' \\ N''n''' \end{matrix}\right\} = A, \quad \left.\begin{matrix} N''N''' \\ n''n''' \end{matrix}\right\} = u', \qquad 28.$$
$$\left.\begin{matrix} n'''N''' \\ n'N' \end{matrix}\right\} = H, \quad \left.\begin{matrix} n'''N' \\ N'''n' \end{matrix}\right\} = B, \quad \left.\begin{matrix} N'''N' \\ n'''n' \end{matrix}\right\} = v',$$
$$\left.\begin{matrix} n'N' \\ n''N'' \end{matrix}\right\} = H, \quad \left.\begin{matrix} n'N'' \\ N'n'' \end{matrix}\right\} = C, \quad \left.\begin{matrix} N'N'' \\ n'n'' \end{matrix}\right\} = w'.$$

Und wir haben die harmonischen Vierpunktsysteme:

$$\begin{matrix} (AP, NN') = -1, & (BQ, NN'') = -1, & (CR, NN''') = -1, \\ (Ap, nn') = -1, & (Bq, nn'') = -1, & (Cr, nn''') = -1, \\ (AP', n''N''') = -1, & (BQ', n'''N') = -1, & (CR', n'N'') = -1, \\ (Ap', N''n''') = -1, & (Bq', N'''n') = -1, & (Cr', N'n'') = -1, \end{matrix} \qquad 29.$$

und die Systeme von vier harmonischen Strahlen: s. 22.

$$\left.\begin{matrix} uASS' \\ \underline{uHPp} \\ uNn' \\ unN' \end{matrix}\right\} = -1, \quad \left.\begin{matrix} vBSS'' \\ \underline{vHQq} \\ vNn'' \\ vnN'' \end{matrix}\right\} = -1, \quad \left.\begin{matrix} wCSS''' \\ \underline{wHRr} \\ wNn''' \\ wnN''' \end{matrix}\right\} = -1,$$
$$\left.\begin{matrix} u'AS''S''' \\ \underline{u'HP'p'} \\ uN''N''' \\ u'n''n''' \end{matrix}\right\} = -1, \quad \left.\begin{matrix} v'BS'''S' \\ \underline{v'HQ'q'} \\ v'N'''N' \\ v'n'''n' \end{matrix}\right\} = -1, \quad \left.\begin{matrix} w'CS'S'' \\ \underline{w'HR'r'} \\ w'N'N'' \\ w'n'n'' \end{matrix}\right\} = -1, \qquad 30.$$

Wir hätten endlich noch die Punkte zu untersuchen, die auf den Strahlen uNn' und unN' harmonisch zu u, und auf den Strahlen $u'N''N'''$ und $u'n''n'''$ harmonisch zu u' liegen, oder die Schnittpunkte dieser vier Strahlen mit dem Höhenperpendikel AH, und analog für die entsprechenden von v und v' aus, oder von w und w' aus gehenden Strahlen. Diese Untersuchung wollen wir dem Leser überlassen.

§ 6.

In § 4 hatten wir mit y und z die Schnittpunkte der Geraden HQqv und HRrw mit BC bezeichnet, und gefunden $(v, H, y, q, Q) \sim (w, H, z, r, R)$. Da diese Punktsysteme perspektivisch liegen, so folgt dass vw, yz, qr, QR durch einen nämlichen Punkt gehen. Aber vw schneidet yz d. h. BC in u′, und somit finden wir $\left.\begin{matrix}QR\\ qr\end{matrix}\right\} = u'$.

Projizieren wir aber das Höhenperpendikel AHDiI von B aus auf R′r′ und von C aus auf Q′q′, und bezeichnen die Schnittpunkte der Geraden HQ′q′v′ und HR′r′w′ mit BC respektive durch y′ und z′, so ergibt sich $(v', H, y', Q', q') \sim (w', H, z', r', R')$, und hieraus $\left.\begin{matrix}Q'r'\\ q'R'\end{matrix}\right\} = u'$.

Ferner haben wir $(v, H, y, q, Q) \sim (w', H, z', r', R')$, und $(v' H, y', Q', q') \sim (w, H, z, r, R)$, woraus

$$\left.\begin{matrix}qr'\\ QR'\end{matrix}\right\} = u \text{ und } \left.\begin{matrix}Q'r\\ q'R\end{matrix}\right\} = u.$$

Durch die Punkte u, u′, v, v′, w, w′ gehen also noch je die folgenden vier Strahlen:

$$\left.\begin{matrix}uQR'\\ uq'R\\ uQ'r\\ uqr'\end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix}vRP'\\ vr'P\\ vR'p\\ vrp'\end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix}wPQ'\\ wp'Q\\ wP'q\\ wpq'\end{matrix}\right\},$$
$$\left.\begin{matrix}u'QR\\ u'q'R'\\ u'Q'r'\\ u'qr\end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix}v'RP\\ v'r'P'\\ v'R'p'\\ v'rp\end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix}w'PQ\\ w'p'Q'\\ w'P'q'\\ w'pq\end{matrix}\right\}. \qquad 31.$$

Und aus den harmonischen Relationen 15 ergeben sich die harmonischen Strahlsysteme:

$$\frac{\begin{matrix}uQR'\\ uq'R\end{matrix}}{\begin{matrix}uu'BC\\ uI\end{matrix}} = -1, \quad \frac{\begin{matrix}vRP'\\ vr'P\end{matrix}}{\begin{matrix}vv'CA\\ vK\end{matrix}} = -1, \quad \frac{\begin{matrix}wPQ'\\ wp'Q\end{matrix}}{\begin{matrix}ww'AB\\ wL\end{matrix}} = -1,$$

$$\left.\begin{array}{l} u\,Q'\,r \\ \underline{u\,q\,r'} \\ u\,u'\,B\,C \\ u\,i \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} v\,R'\,p \\ \underline{v\,r\,p'} \\ v\,v'\,C\,A \\ v\,k \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} w\,P'\,q \\ \underline{w\,p\,q'} \\ w\,w'\,A\,B \\ w\,l \end{array}\right\} = -1,$$

$$\left.\begin{array}{l} u'\,Q\,R \\ \underline{u'\,q'\,R'} \\ u'\,u\,B\,C \\ u'\,I \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} v'\,R\,P \\ \underline{v'\,r'\,P'} \\ v'\,v\,C\,A \\ v'\,K \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} w'\,P\,Q \\ \underline{w'\,p'\,Q} \\ w'\,w\,A\,B \\ w'\,L \end{array}\right\} = -1, \tag{32.}$$

$$\left.\begin{array}{l} u'\,Q'\,r' \\ \underline{u'\,q\,r} \\ u'\,u\,B\,C \\ u'\,i \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} v'\,R'\,p' \\ \underline{v'\,r\,p} \\ v'\,v\,C\,A \\ v'\,k \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} w'\,P'\,q' \\ \underline{w'\,p\,q} \\ w'\,w\,A\,B \\ w'\,l \end{array}\right\} = -1.$$

Zufolge 11 pag. 6, 7 pag. 4, 31 pag. 12 haben wir ferner die perspektivisch liegenden Dreiecke:

Dreiecke		Persp. Zentrum		Persp. Axe
A B C, P Q R, p q r	...	H, n, N	...	u′ v′ w′
A B C, P Q′ r′, p q′ R′	...	H, n′, N′	...	u′ v w
A B C, p′ Q R′, P′ q r′	...	H, n″, N″	...	u v′ w
A B C, P′ q′ R, p′ Q′ r	...	H, n‴, N‴	...	u v w′,

d. h in der ersten Zeile:

Dreiecke		Persp. Zentrum		Persp. Axe
P Q R, p q r	...	H	...	u′ v′ w′
p q r, A B C	...	n	...	u′ v′ w′
A B C, P Q R	...	N	...	u′ v′ w′

und analog in den folgenden Zeilen.

Vergleichen wir in 32 eines der durch u gehenden Systeme mit den beiden durch u′ gehenden Systemen, so haben dieselben je den Strahl u u′ B C gemein und liegen somit perspektivisch. Es liegen daher je in einer Geraden die Punkte:

$$\left.\begin{array}{l} u\,Q\,R' \\ u'\,Q\,R \end{array}\right\} = Q, \quad \left.\begin{array}{l} u\,q'\,R \\ u'\,q'\,R' \end{array}\right\} = q', \quad \left.\begin{array}{l} u\,I \\ u'\,I \end{array}\right\} = I$$

$$\left.\begin{array}{l} u\,Q\,R' \\ u'\,q'\,R' \end{array}\right\} = R', \quad \left.\begin{array}{l} u\,q'\,R \\ u'\,Q\,R \end{array}\right\} = R, \quad \left.\begin{array}{l} u\,I \\ u'\,I \end{array}\right\} = I$$

$$\left.\begin{array}{l} u\,Q\,R' \\ u'\,Q'\,r' \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} u\,q'\,R \\ u'\,q\,r \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} u\,I \\ u'\,i \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} u\,Q\,R' \\ u'\,q\,r \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} u\,q'\,R \\ u'\,Q'\,r' \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} u\,I \\ u'\,i \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} u\,Q'\,r \\ u'\,Q\,R \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} u\,q\,r' \\ u'\,q'\,R' \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} u\,i \\ u'\,I \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} u\,Q'\,r \\ u'\,q'\,R' \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} u\,q\,r' \\ u'\,Q\,R \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} u\,i \\ u'\,I \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} u\,Q'\,r \\ u'\,Q'\,r' \end{array}\right\} = Q', \quad \left.\begin{array}{l} u\,q\,r' \\ u'\,q\,r \end{array}\right\} = q, \quad \left.\begin{array}{l} u\,i \\ u'\,i \end{array}\right\} = i$$

$$\left.\begin{array}{l} u\,Q'\,r \\ u'\,q\,r \end{array}\right\} = r, \quad \left.\begin{array}{l} u\,q\,r' \\ u'\,Q'\,r' \end{array}\right\} = r, \quad \left.\begin{array}{l} u\,i \\ u'\,i \end{array}\right\} = i.$$

Von diesen 8 Geraden sind die zwei erstern und die zwei letztern schon durch die Definitionen 4 der Punkte Q, q, Q', q', R, r, R', r' gegeben; aus diesen Definitionen gehen nämlich die Geraden hervor $(Q\,q', I\,C)$, $(Q'\,q, i\,C)$, $(R'\,R, I\,B)$, $(r\,r', i\,B)$, und laut 15 sind die hier auftretenden Punktenpaare je zu einander harmonisch.

Die vier mittleren Geraden aber im obigen Tableau sind neu, und auf denselben liegen 4 mal je 3 von 10 neuen Punkten. Und durch das Buchstabenrad erhalten wir in unserer Figur 30 neue Punkte, von denen 12 mal je 3 in einer neuen Geraden liegen:

$$\left.\begin{array}{l} u\,Q\,R' \\ u'\,Q'\,r' \end{array}\right\}, \left.\begin{array}{l} u\,q'\,R \\ u'\,q\,r \end{array}\right\}, \left.\begin{array}{l} u\,I \\ u'\,i \end{array}\right\} \ldots \text{Gerade Ia}$$

$$\left.\begin{array}{l} u\,Q\,R' \\ u'\,q\,r \end{array}\right\}, \left.\begin{array}{l} u\,q'\,R \\ u'\,Q'\,r' \end{array}\right\}, \left.\begin{array}{l} u\,I \\ u'\,i \end{array}\right\} \ldots \text{Gerade IIa}$$

$$\left.\begin{array}{l} u\,Q'\,r \\ u'\,Q\,R \end{array}\right\}, \left.\begin{array}{l} u\,q\,r' \\ u'\,q'\,R' \end{array}\right\}, \left.\begin{array}{l} u\,i \\ u'\,I \end{array}\right\} \ldots \text{Gerade IIIa} \qquad 33.$$

$$\left.\begin{array}{l} u\,Q'\,r \\ u'\,q'\,R' \end{array}\right\}, \left.\begin{array}{l} u\,q\,r' \\ u'\,Q\,R \end{array}\right\}, \left.\begin{array}{l} u\,i \\ u'\,I \end{array}\right\} \ldots \text{Gerade IVa}$$

und:

$$\left.\begin{array}{l} v\,R\,P' \\ v'\,R'\,p' \end{array}\right\}, \left.\begin{array}{l} v\,r'\,P \\ v'\,r\,p \end{array}\right\}, \left.\begin{array}{l} v\,K \\ v'\,k \end{array}\right\} \ldots \text{Gerade Ib}$$

$$\left.\begin{array}{l} v\,R\,P' \\ v'\,r\,p \end{array}\right\}, \left.\begin{array}{l} v\,r'\,P \\ v'\,R'\,p' \end{array}\right\}, \left.\begin{array}{l} v\,K \\ v'\,k \end{array}\right\} \ldots \text{Gerade IIb} \qquad 34.$$

$$\left.\begin{matrix} v\,R'\,p \\ v'\,R\,P \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} v\,r\,p' \\ v'\,r'\,P' \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} v\,k \\ v'\,K \end{matrix}\right\} \,.\,.\ \text{Gerade IIIb} \qquad 34.$$

$$\left.\begin{matrix} v\,R'\,p \\ v'\,r'\,P' \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} v\,r\,p' \\ v'\,R\,P \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} v\,k \\ v'\,K \end{matrix}\right\} \,.\,.\ \text{Gerade IVb}$$

und:

$$\left.\begin{matrix} w\,P\,Q' \\ w'P'q' \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} w\,p'\,Q \\ w'\,p\,q \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} w\,L \\ w'\,l \end{matrix}\right\} \,.\,.\ \text{Gerade Ic}$$

$$\left.\begin{matrix} w\,P\,Q' \\ w'\,p\,q \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} w\,p'\,R \\ w'P'q' \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} w\,L \\ w'\,l \end{matrix}\right\} \,.\,.\ \text{Gerade IIc} \qquad 35.$$

$$\left.\begin{matrix} w\,P'\,q \\ w'\,P\,Q \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} w\,p\,q' \\ w'p'Q' \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} w\,l \\ w'\,L \end{matrix}\right\} \,.\,.\ \text{Gerade IIIc}$$

$$\left.\begin{matrix} w\,P'\,q \\ w'p'Q' \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} w\,p\,q' \\ w'\,P\,Q \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} w\,l \\ w'\,L \end{matrix}\right\} \,.\,.\ \text{Gerade IVc.}$$

Wir werden aber in der Folge sehen, dass von diesen 12 Geraden 33, 34, 35 nur 6 voneinander verschieden sind, indem

$$\begin{matrix} \text{Ib} = \text{IVc}, & \text{IIc} = \text{IIIb} \\ \text{Ic} = \text{IVa}, & \text{IIa} = \text{IIIc} \\ \text{Ia} = \text{IVb}, & \text{IIb} = \text{IIIa}. \end{matrix}$$

Die Strahlen i u und I u mögen den Kreis um B C als Durchmesser wieder respektive in I′ und i′ schneiden, so gehen die Geraden i i′ und I I′ durch den zu u in Bezug auf B C harmonischen Punkt, also durch u′.

Der obige Punkt $\left.\begin{matrix} u\,I \\ u'\,i \end{matrix}\right\} = i' = \left\{\begin{matrix} \text{Ia} \\ \text{IIa} \end{matrix}\right.$ und der Punkt $\left.\begin{matrix} u\,i \\ u'\,I \end{matrix}\right\} = I' = \left\{\begin{matrix} \text{IIIa} \\ \text{IVa} \end{matrix}\right.$ liegen also auf dem um BC als Durchmesser beschriebenen Kreise symmetrisch zu BC, und der Punkt $\mathfrak{A}$, wo die zu BC senkrechte Gerade i′ I′ die Seite BC schneidet, ist der zum Höhenfusspunkte D in Bezug auf die Strecke u u′ harmonische Punkt. 36.

In dem von den Geraden u Q R′, u q′ R, u′ Q′ r′, u′ q r gebildeten Vierseit sind die Geraden Ia und IIa die beiden von u u′ verschiedenen Diagonalen, und der Punkt $\left.\begin{matrix} u\,I \\ u'\,i \end{matrix}\right\} = i'$ ist neben u und u′ der dritte Diagonalpunkt. Die Punkte, wo Ia und IIa die Seite BC schneiden, sind respektive harmonisch zum Schnittpunkte i′ von Ia und IIa in Bezug auf je die beiden ersten in 33 angegebenen Punkte der Geraden Ia und IIa. Die Geraden Ia und IIa liegen harmonisch zu den Geraden i′uI und i′iu′, und analog liegen IIIa, und IVa harmonisch zu I′ui und I′Iu′. 37.

§ 7.

In unserer Figur gehen durch den Punkt u fünfzehn voneinander verschiedene Gerade, die fünf Systeme von je vier harmonischen Strahlen bilden:

uu′BC,	uHPp;	uKl,	ukL	... 16	
uu′BC,	uASS′;	uv′w,	uvw′	... 26	
uHPp,	uASS′;	uNn′,	unN′	... 30	38.
uu′BC,	uIi′;	uQR′,	uq′R	... 32	
uu′BC,	uiI′;	uQ′r,	uqr′	... 32	

Analog durch den Punkt u′:

u′uBC,	u′HP′p′;	u′KL,	u′kl	... 17	
u′uBC,	u′AS″S‴;	u′vw,	u′v′w′	... 26	
u′HP′p′,	u′AS″S‴;	u′N″N‴,	u′n″n‴	... 30	39.
u′uBC,	u′II′;	u′QR,	u′q′R′	... 32	
u′uBC,	u′ii′;	u′Q′r′,	u′qr	... 32	

Das Buchstabenrad gibt die analogen Geraden durch die Punkte v, v′, w, w′.

Wo auf einer dieser Geraden in 38 oder 39 vier Buchstaben auftreten, so stellen diese je ein System von vier harmonischen Punkten dar.

Wo nur drei Punkte auf einer dieser Geraden auftreten, so lässt sich der vierte harmonische Punkt immer leicht ergänzen z. B.:

Der auf uKl zu l harmonische Punkt ist der Schnittpunkt mit dem Strahle BLp′P. Siehe 18.

Der auf ukL zu L harmonische Punkt ist der Schnittpunkt mit dem Strahle BlpP′. Siehe 18.

Der auf u v′ w zu w harmonische Punkt ist der Schnittpunkt mit dem Strahle, der C mit dem Punkte $\left\{\begin{matrix}\mathrm{A\,u}\\ \mathrm{B\,v'}\end{matrix}\right.$ verbindet.

Der auf u v w′ zu w′ harmonische Punkt ist der Schnittpunkt mit dem Strahle, der C mit dem Punkte $\left\{\begin{matrix}\mathrm{A\,u}\\ \mathrm{B\,v}\end{matrix}\right.$ verbindet.

Der auf N n′ u zu u und der auf n N′ u zu u harmonische Punkt sind die Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Höhenperpendikel A H des Stammdreiecks. Siehe 15.

Die auf I i′ u und auf i I′ u je zu u harmonischen Punkte sind die Schnittpunkte dieser Geraden mit der in u′ auf B C errichteten Senkrechten.

Auf u Q R′ und auf u q′ R sind die zu u harmonischen Punkte die Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Strahle I u′.

Auf u Q′ r und auf u q r′ sind die zu u harmonischen Punkte die Schnittpunkte mit dem Strahle i u′.

Durch jede Ecke des Stammdreiecks ABC gehen in unserer Figur dreizehn Gerade, die je neun Systeme von vier harmonischen Strahlen bilden.

So durch die Ecke A die Geraden:

A B w w′,	A L Q Q′;	A P N N′,	A p′ N″ n‴	
A B w w′,	A l q q′;	A p n n″,	A P′ n″ N‴	
A C v v′,	A K R r′;	A P N N′,	A P′ n″ N‴	
A C v v′,	A k r R′;	A p n n′,	A p′ N″ n‴	
A B w w′,	A H i I;	A K R r′,	A k r R′	40.
A C v v′,	A H i I;	A L Q Q′,	A l q q′	
A B w w′,	A C v v′;	A u S S′,	A u′ S″ S‴	
A u S S′,	A H i I;	A P N N′,	A p n n′	
A u′ S″ S‴,	A H i I;	A P′ n″ N‴,	A p′ N″ n‴	

nach 5, 8, 15, 18, 25.

Die entsprechenden Geraden durch die Ecken B und C ergeben sich aus 40 mittelst des Buchstabenrades.

Auf jeder dieser Geraden in 40 bilden die vier angegebenen Punkte ein System von vier harmonischen Punkten.

In 38 und 39 und den hieraus durch das Buchstabenrad hervorgehenden Geraden haben wir 81, in 40 und den hieraus hervorgehenden Geraden haben wir 36, zusammen 111 voneinander verschiedene Gerade. Hiezu kommen noch die vier durch den Höhenpunkt H gehenden Geraden 21 und die sechs Geraden in 33, 36, 35. Im ganzen gehören also unserer Figur 121 voneinander verschiedene Gerade an.

§ 8.

Bestimmen wir jetzt die wesentlichsten der oben behandelten Punkte und Geraden mittelst auf das Dreieck A B C bezogenen trimetrischen Normalcoordinaten.

Es ist $\overline{DI}^2 = BD \cdot DC = bc \cos B \cos C$. Schreiben wir also zur Abkürzung

$$\alpha = \sqrt{bc \cos B \cos C},\ \beta = \sqrt{ca \cos C \cos A},\ \gamma = \sqrt{ab \cos A \cos B}, \quad 41.$$

wo wir unter α, β, γ stets positive Grössen verstehen, so haben wir

$$\left.\begin{matrix} Di \\ DI \end{matrix}\right\} = \pm\alpha,\ \left.\begin{matrix} Ek \\ EK \end{matrix}\right\} = \pm\beta,\ \left.\begin{matrix} Fl \\ FL \end{matrix}\right\} = \pm\gamma. \quad 42.$$

Seien ferner h_a, h_b, h_c die Höhenperpendikel des Dreiecks A B C

$$DA = h_a,\ EB = h_b,\ FC = h_c, \quad 43.$$

wo also

$$h_a = \sqrt{bc \sin B \sin C},\ h_b = \sqrt{ca \sin C \sin A},\ h_c = \sqrt{ab \sin A \sin B}, \quad 44.$$

so sind die Coordinaten der Punkte i und I

$$i \ldots x = \alpha,\ y = \left(h_a - \alpha\right) \cos C,\ z = \left(h_a - \alpha\right) \cos B,$$

$$I \ldots x = -\alpha,\ y = \left(h_a + \alpha\right) \cos C,\ z = \left(h_a + \alpha\right) \cos B.$$

Die eingeführten Grössen $\alpha, \beta\ \gamma,\ h_a, h_b, h_c$ betreffend wollen wir einige Relationen zusammenstellen, die uns in der Folge von Nutzen sein werden. Wir haben

$$\cos A = \frac{\beta\gamma}{a\alpha}, \quad \cos B = \frac{\gamma\alpha}{b\beta}, \quad \cos C = \frac{\alpha\beta}{c\gamma}, \tag{45.}$$

und ferner

$$\begin{gathered} h_a^2 - \alpha^2 = b c \cos A = \frac{b\beta \cdot c\gamma}{a\alpha}, \quad h_b^2 - \beta^2 = c a \cos B = \frac{c\gamma \cdot a\alpha}{b\beta}, \\ h_c^2 - \gamma^2 = a b \cos C = \frac{a\alpha \cdot b\beta}{c\gamma}, \end{gathered} \tag{46.}$$

wie sich entweder aus 41 und 44 ergibt, oder auch direkt aus der Figur, indem $h_a^2 - \alpha^2 = Ai \cdot AI$ die Potenz des Punktes A in Bezug auf den Kreis um BC als Durchmesser darstellt, und somit $h_a^2 - \alpha^2 = AE \, . \, AC = bc \cos A$ ist, w·z·z.

Ferner ist

$$\begin{gathered} \left(h_b^2 - \beta^2\right)\left(h_c^2 - \gamma^2\right) = a^2\alpha^2, \quad \left(h_c^2 - \gamma^2\right)\left(h_a^2 - \alpha^2\right) = b^2\beta^2, \\ \left(h_a^2 - \alpha^2\right)\left(h_b^2 - \beta^2\right) = c^2\gamma^2. \end{gathered} \tag{47.}$$

Stellt $\triangle$ den Inhalt des Dreiecks ABC und R den Radius des Umkreises dar, so merken wir uns noch

$$h_a = \frac{2\triangle}{a} = \frac{bc}{2R}, \quad h_b = \frac{2\triangle}{b} = \frac{ca}{2R}, \quad h_c = \frac{2\triangle}{c} = \frac{ab}{2R},$$

und

$$\frac{4\triangle}{abc} = \frac{1}{R}, \quad R = \frac{\triangle}{a \sin B \sin C}, \quad \text{u. s. w.} \tag{48.}$$

Endlich haben wir

$$\begin{gathered} a\alpha^3 + bc\beta\gamma = 2\triangle h_a \alpha, \quad b\beta^3 + ca\gamma\alpha = 2\triangle h_b \beta, \\ c\gamma^3 + ab\alpha\beta = 2\triangle h_c \gamma. \end{gathered} \tag{49.}$$

Die erste dieser Formeln erhält man sehr leicht, wenn man linker Hand $\alpha^2 = bc \cos B \cos C$ und $\beta\gamma = a\alpha \cos A$ substituiert.

Mit Benutzung von 45 ergaben sich nun aus den obigen Coordinaten von i und I für diese und die analogen Punkte die folgenden Coordinatenverhältnisse

$$\begin{array}{c|ccc}
 & x, & y, & z \\
\hline
i & \dfrac{1}{\frac{h}{a}-\alpha}, & \dfrac{\beta}{c\gamma}, & \dfrac{\gamma}{b\beta}, \\[2ex]
I & -\dfrac{1}{\frac{h}{a}+\alpha}, & \dfrac{\beta}{c\gamma}, & \dfrac{\gamma}{b\beta}, \\[2ex]
k & \dfrac{\alpha}{c\gamma}, & \dfrac{1}{\frac{h}{b}-\beta}, & \dfrac{\gamma}{a\alpha}, \\[2ex]
K & \dfrac{\alpha}{c\gamma}, & -\dfrac{1}{\frac{h}{b}+\beta}, & \dfrac{\gamma}{a\alpha}, \\[2ex]
l & \dfrac{\alpha}{b\beta}, & \dfrac{\beta}{a\alpha}, & \dfrac{1}{\frac{h}{c}-\gamma}, \\[2ex]
L & \dfrac{\alpha}{b\beta}, & \dfrac{\beta}{a\alpha}, & -\dfrac{1}{\frac{h}{c}+\gamma}.
\end{array} \tag{50.}$$

Hieraus

$$\text{Gerade } Ck \ldots \frac{x}{y} = \frac{\alpha\left(\frac{h}{b}-\beta\right)}{c\gamma}, \quad \text{Gerade } CK \ldots \frac{x}{y} = -\frac{\alpha\left(\frac{h}{b}+\beta\right)}{c\gamma},$$

$$\text{Gerade } Bl \ldots \frac{z}{x} = \frac{b\beta}{\alpha\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)}, \quad \text{Gerade } BL \ldots \frac{z}{x} = -\frac{b\beta}{\alpha\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)}.$$

Für die Coordinaten der Punkte $p = \begin{cases} Ck \\ Bl \end{cases}$, $P = \begin{cases} CK \\ BL \end{cases}$, $p' = \begin{cases} Ck \\ BL \end{cases}$, $P' = \begin{cases} CK \\ Bl \end{cases}$, und der hieraus mittelst des Buchstabenrades hervorgehenden v. 4 erhalten wir daher das folgende Tableau:

	x,	y,	z		x,	y,	z
p	$\alpha,$	$\frac{c\gamma}{\frac{h}{b}-\beta},$	$\frac{b\beta}{\frac{h}{c}-\gamma}$	p′	$\alpha,$	$\frac{c\gamma}{\frac{h}{b}-\beta},$	$-\frac{b\beta}{\frac{h}{c}+\gamma}$
q	$\frac{c\gamma}{\frac{h}{a}-\alpha},$	$\beta,$	$\frac{a\alpha}{\frac{h}{c}-\gamma}$	q′	$-\frac{c\gamma}{\frac{h}{a}+\alpha},$	$\beta,$	$\frac{a\alpha}{\frac{h}{c}-\gamma}$
r	$\frac{b\beta}{\frac{h}{a}-\alpha},$	$\frac{a\alpha}{\frac{h}{b}-\beta},$	γ	r′	$\frac{b\beta}{\frac{h}{a}-\alpha},$	$-\frac{a\alpha}{\frac{h}{b}+\beta},$	γ
P	$-\alpha,$	$\frac{c\gamma}{\frac{h}{b}+\beta},$	$\frac{b\beta}{\frac{h}{c}+\gamma}$	P′	$\alpha,$	$-\frac{c\gamma}{\frac{h}{b}+\beta},$	$\frac{b\beta}{\frac{h}{a}-\gamma}$
Q	$\frac{c\gamma}{\frac{h}{a}+\alpha},$	$-\beta,$	$\frac{a\alpha}{\frac{h}{c}+\gamma}$	Q′	$\frac{c\gamma}{\frac{h}{a}-\alpha},$	$\beta,$	$-\frac{a\alpha}{\frac{h}{c}+\gamma}$
R	$\frac{b\beta}{\frac{h}{a}+\alpha},$	$\frac{a\alpha}{\frac{h}{b}+\beta},$	$-\gamma$	R′	$-\frac{b\beta}{\frac{h}{a}+\alpha},$	$\frac{a\alpha}{\frac{h}{b}-\beta},$	γ

51.

und hieraus kommt für die Strahlen A p, A P, A p′, A P′ und die daraus durch das Buchstabenrad hervorgehenden:

$$\mathrm{A\,p}\,..\,\frac{y}{z}=\frac{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)}{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)},\quad \mathrm{B\,q}\,..\,\frac{z}{x}=\frac{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)}{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)},$$

$$\mathrm{C\,r}\,..\,\frac{x}{y}=\frac{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)}{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)},$$

$$\mathrm{A\,P}\,..\,\frac{y}{z}=\frac{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)}{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)},\quad \mathrm{B\,Q}\,..\,\frac{z}{x}=\frac{a\alpha\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)}{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)}, \qquad 52.$$

$$CR\ldots\frac{x}{y}=\frac{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)}{a\alpha\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)}, \qquad 52.$$

$$Ap'\ldots\frac{y}{z}=-\frac{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)}{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)},\quad Bq'\ldots\frac{z}{x}=-\frac{a\alpha\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)}{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)},$$

$$Cr'\ldots\frac{x}{y}=-\frac{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)}{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)},$$

$$AP'\ldots\frac{x}{y}=-\frac{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)}{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)},\quad BQ'\ldots\frac{z}{x}=-\frac{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)}{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)},$$

$$CR'\ldots\frac{x}{y}=-\frac{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)}{a\alpha\left(\frac{h}{\alpha}+\alpha\right)}.$$

Die Strahlen Ap, Bq, Cr schneiden sich in einem nämlichen Punkte n, wo

$$n\ldots x:y:z=\frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)}:\frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)}:\frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)}.$$

Die Strahlen AP, BQ, CR schneiden sich in einem nämlichen Punkte N, wo

$$N\ldots x:y:z=\frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)}:\frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)}:\frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)}.$$

Die Strahlen Ap, Bq', CR' schneiden sich in einem nämlichen Punkte n' wo

$$n'\ldots x:y:z=-\frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)}:\frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)}:\frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)}. \qquad 53.$$

Die Strahlen AP, BQ′, Cr′ schneiden sich in einem nämlichen Punkte N′, wo 53.

$$N' \ldots x:y:z = -\frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)} : \frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)} : \frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)}.$$

Die Strahlen AP′, Bq, Cr′ schneiden sich in einem nämlichen Punkte n″, wo

$$n'' \ldots x:y:z = \frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)} : -\frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)} : \frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)}.$$

Die Strahlen Ap′, BQ, CR′ schneiden sich in einem nämlichen Punkte N″, wo

$$N'' \ldots x:y:z = \frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)} : -\frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)} : \frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)}.$$

Die Strahlen Ap′, BQ′, Cr schneiden sich in einem nämlichen Punkte n‴, wo

$$n''' \ldots x:y:z = \frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)} : \frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)} : -\frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)}.$$

Die Strahlen AP′, Bq′, CR schneiden sich in einem nämlichen Punkte N‴, wo

$$N''' \ldots x:y:z = \frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)} : \frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)} : -\frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)}.$$

Als Gleichung der Geraden nN ergibt sich hieraus

$$\begin{vmatrix} a\alpha x, & b\beta y, & c\gamma z \\ \frac{1}{\frac{h}{a}-\alpha}, & \frac{1}{\frac{h}{b}-\beta}, & \frac{1}{\frac{h}{c}-\gamma} \\ \frac{1}{\frac{h}{a}+\alpha}, & \frac{1}{\frac{h}{b}+\beta}, & \frac{1}{\frac{h}{c}+\gamma} \end{vmatrix} = o,$$

d. h.: $a\alpha\mathfrak{A}x + b\beta\mathfrak{B}y + c\gamma\mathfrak{C}x = o$, wo

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\left(\frac{h}{b} - \beta\right)\left(\frac{h}{c} + \gamma\right)} - \frac{1}{\left(\frac{h}{b} + \beta\right)\left(\frac{h}{c} - \gamma\right)} = \frac{2\left(\beta\frac{h}{c} - \gamma\frac{h}{b}\right)}{\left(\frac{h^2}{b} - \beta^2\right)\left(\frac{h^2}{c} - \gamma^2\right)}$$

und wo $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ sich aus $\mathfrak{A}$ mittelst des Buchstabenrades ergeben. In Folge von 47 und 48 kommt nun $a\,\alpha\,\mathfrak{A} = \frac{4\triangle(b\,\beta - c\,\gamma)}{a\,b\,c\,\alpha} = \frac{b\,\beta - c\,\gamma}{R\,\alpha}$, und wir erhalten die erste der folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\text{Gerade n N}\,.\,.\; \frac{(b\,\beta - c\,\gamma)\,x}{\alpha} + \frac{(c\,\gamma - a\,\alpha)\,y}{\beta} + \frac{(a\,\alpha - b\,\beta)\,z}{\gamma} = o \\
&\text{Gerade n}'\,\text{N}'\,.\,.\; \frac{(b\,\beta - c\,\gamma)\,x}{\alpha} - \frac{(c\,\gamma + a\,\alpha)\,y}{\beta} + \frac{(a\,\alpha + b\,\beta)\,z}{\gamma} = o \\
&\text{Gerade n}''\,\text{N}''\,.\,.\; \frac{(b\,\beta + c\,\gamma)\,x}{\alpha} + \frac{(c\,\gamma - a\,\alpha)\,y}{\beta} - \frac{(a\,\alpha + b\,\beta)\,z}{\gamma} = o \\
&\text{Gerade n}'''\,\text{N}'''\,.\,.\; - \frac{(b\,\beta + c\,\gamma)\,x}{\alpha} + \frac{(c\,\gamma + a\,\alpha)\,y}{\beta} + \frac{(a\,\alpha - b\,\beta)\,z}{\gamma} = o.
\end{aligned} \qquad 54.$$

Die Gleichungen der Geraden $n'\,N'$, $n''\,N''$, $n'''\,N'''$ entstehen aus der Gleichung der Geraden $n\,N$, wenn in dieser α in $-\alpha$, oder β in $-\beta$, oder γ in $-\gamma$ umgesetzt wird.

Allen diesen vier Geraden in 54 genügt der Punkt

$$x : y : z = a\,\alpha^2 : b\,\beta^2 : c\,\gamma^2.$$

Dieses ist aber der Höhenpunkt H des Dreiecks A B C, denn H als Winkelgegenpunkt des Umkreiszentrums O hat die Coordinaten $x : y : z = \frac{1}{\cos A} : \frac{1}{\cos B} : \frac{1}{\cos C}$, das heisst gemäss 45 $x \sim \frac{a\,\alpha}{\beta\,\gamma} = \frac{a\,\alpha^2}{\alpha\,\beta\,\gamma}$, und somit $x : y : z = a\,\alpha^2 : b\,\beta^2 : c\,\gamma^2$, w. z. z.

Die vier Geraden $n\,N$, $n'\,N'$, $n''\,N''$, $n'''\,N'''$ gehen daher alle durch den Höhenpunkt H des Dreiecks ABC.

Auf diesen Geraden liegen auch respektive die Punkte $x : y : z = \alpha : \beta : \gamma$, $x : y : z = -\alpha : \beta : \gamma$, $x : y : z = \alpha : -\beta : \gamma$, $x : y : z = \alpha : \beta : -\gamma$, deren Bedeutung wir in § 9 kennen lernen werden.

§ 9.

Bilden wir jetzt die Gleichung der Geraden p P.

Mittelst den in 51 angegebenen Coordinaten der Punkte p und P erhalten wir für diese Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{\alpha}, & \frac{y}{c\gamma}, & \frac{z}{b\beta}, \\ 1, & \frac{1}{\frac{h}{b}-\beta}, & \frac{1}{\frac{h}{c}-\gamma} \\ 1, & -\frac{1}{\frac{h}{b}+\beta}, & -\frac{1}{\frac{h}{c}+\gamma} \end{vmatrix} = o.$$

Vergleichen wir dies mit der Gleichung von n N, so kommt

$$-\frac{\mathfrak{A}\,x}{\alpha} + \frac{\mathfrak{B}'\,y}{c\gamma} + \frac{\mathfrak{C}'\,z}{b\beta} = o,$$

wo $\mathfrak{A}$ dieselbe Bedeutung hat wie oben $\mathfrak{A} = \frac{b\beta - c\gamma}{Ra\alpha^2}$, und wo

$$\mathfrak{B}' = \frac{1}{\frac{h}{c}-\gamma} + \frac{1}{\frac{h}{c}+\gamma} = \frac{2\frac{h}{c}}{\frac{h^2}{c}-\gamma^2} = \frac{4\triangle c\gamma}{abc\cdot\alpha\beta} = \frac{c\gamma}{R\alpha\beta},$$

$$\mathfrak{C}' = -\frac{1}{\frac{h}{b}+\beta} - \frac{1}{\frac{h}{c}-\beta} = -\frac{2\frac{h}{b}}{\frac{h^2}{b}-\beta^2} = -\frac{b\beta}{R\gamma\alpha}.$$

Wir erhalten so die erste der folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\text{Gerade } pP \ldots \frac{(b\beta - c\gamma)\,x}{a\alpha^2} - \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = o,\\
&\text{Gerade } p'P' \ldots \frac{(b\beta + c\gamma)\,x}{a\alpha^2} - \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} = o,\\
&\text{Gerade } qQ \ldots \frac{x}{\alpha} + \frac{(c\gamma - a\alpha)\,y}{b\beta^2} - \frac{z}{\gamma} = o,\\
&\text{Gerade } q'Q' \ldots -\frac{x}{\alpha} + \frac{(c\gamma + \alpha a)\,y}{b\beta^2} - \frac{z}{\gamma} = o,\\
&\text{Gerade } rR \ldots -\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{(a\alpha - b\beta)\,z}{c\gamma^2} = o,\\
&\text{Gerade } r'R' \ldots -\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} + \frac{(a\alpha + b\beta)\,z}{c\gamma^2} = o.
\end{aligned} \qquad 55.$$

Alle diese sechs Geraden gehen durch den Höhenpunkt H des Dreiecks ABC oder durch den Punkt

$$x : y : z = a\alpha^2 : b\beta^2 : c\gamma^2.$$

Aus den Gleichungen dieser Geraden ziehen wir noch die folgenden Schlüsse:

Die Geraden HpP und Hp′P′ schneiden die Seite BC in zwei zu BC harmonischen Punkten u und u′, für welche u ... $\frac{y}{z} = \frac{\beta}{\gamma}$, u′ ... $\frac{y}{z} = -\frac{\beta}{\gamma}$.

Die Geraden HqQ und Hq′Q′ schneiden die Seite CA in zwei zu CA harmonischen Punkten v und v′, für welche v ... $\frac{z}{x} = \frac{\gamma}{\alpha}$, v′ ... $\frac{z}{x} = -\frac{\gamma}{\alpha}$.

Die Geraden HrR und Hr′R′ schneiden die Seite AB in zwei zu AB harmonischen Punkten w und w′, für welche w ... $\frac{x}{y} = \frac{\alpha}{\beta}$, w′ ... $\frac{x}{y} = -\frac{\alpha}{\beta}$.

Diesen Punkten u, u′, v, v′, w, w′, deren Coordinaten also:

	x,	y,	z	
u	o,	β,	γ	
u′	o,	$-\beta$,	γ	
v	α,	o,	γ	56.
v′	α,	o,	$-\gamma$	
w	α,	β,	o	
w′	$-\alpha$,	β,	o	

werden wir noch wiederholt begegnen.

Zunächst ergibt sich aus diesen Coordinaten:

Die Geraden Au, Bv, Cw schneiden sich in einem nämlichen Punkte S, für welchen

$$S \ldots x : y : z = \alpha : \beta : \gamma.$$

Die Geraden Au, Bv′, Cw′ schneiden sich in einem nämlichen Punkte S′, für welchen

$$S' \ldots x : y : z = -\alpha : \beta : \gamma.$$

Die Geraden Au′, Bv, Cw′ schneiden sich in einem nämlichen Punkte S″, für welchen

$$S'' \ldots x : y : z = \alpha : -\beta : \gamma. \qquad 57.$$

Die Geraden A u′, B v′, C w schneiden sich in einem nämlichen Punkte S‴, für welchen 57.

$$S''' \ldots x : y : z = \alpha : \beta : -\gamma.$$

Am Schlusse von § 8 sahen wir, dass diese Punkte S, S′, S″, S‴ respektive auf den Geraden H n N, H n′ N′, H n″ N″ n‴ N‴ liegen.

Im Viereck p P p′ P′ wird die Seite P p von der Gegenseite P′ p′ und von der Diagonalen B C in den Punkten H und u harmonisch geteilt. Projizieren wir diese Punkte H, u, p, P von A aus auf die Gerade H n N, so ergibt sich, dass H und S harmonisch liegen zu n und N. Analog sind S′, S″, S‴ respektive harmonisch zu H in Bezug auf n′ N′, n″ N″, n‴ N‴.

Aus den so einfachen Ausdrücken der Coordinaten der Punkte S, S′, S″, S‴ ergibt sich die folgende direkte Konstruktion dieser Punkte, sowie der Punkte u, u′, v, v′, w, w′:

Durch die Punkte i und I ziehen wir Parallele zu B C, durch k und K Parallele zu C A, durch l und L Parallele zu A B, so bilden diese sechs neuen Geraden acht dem Stammdreieck A B C parallele und somit perspektivisch liegende Dreiseite, die wir mit i k l, I K L, I k l, i K L, i K l, I k L, i k L, I K l bezeichnen können, wo aber diese Buchstaben nicht die Ecken der betreffenden Dreiseite, sondern die durch die gleichnamigen Punkte parallel zu den entsprechenden Seiten des Stammdreiecks a b c laufenden Seiten dieser Dreiseite darstellen.

Dies vorausgesetzt sind die Punkte S, S′, S″, S‴ wie folgt gegeben:

Dreiseite

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{i\,k\,l} \\ \mathrm{I\,K\,L} \\ \mathrm{a\,b\,c} \end{array}\right\} \ldots \text{ gemeins. perspektiv. Zentrum} = S$$

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{I\,k\,l} \\ \mathrm{i\,K\,L} \\ \mathrm{a\,b\,c} \end{array}\right\} \ldots \text{ gemeins. perspektiv. Zentrum} = S'$$

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{i\,K\,l} \\ \mathrm{I\,k\,L} \\ \mathrm{a\,b\,c} \end{array}\right\} \ldots \text{ gemeins. perspektiv. Zentrum} = S''$$ 58.

$$\left.\begin{matrix} i\,k\,L \\ I\,K\,l \\ a\,b\,c \end{matrix}\right\} \ldots \text{ gemeins. perspektiv. Zentrum} = S'''. \qquad 58.$$

Und die Punkte u, u′, v, v′, w, w′ sind bestimmt durch:

$$\left.\begin{matrix} A\,S\,S' \\ B\,C \end{matrix}\right\} = u, \quad \left.\begin{matrix} B\,S\,S'' \\ C\,A \end{matrix}\right\} = v, \quad \left.\begin{matrix} C\,S\,S''' \\ A\,B \end{matrix}\right\} = w,$$

$$\left.\begin{matrix} A\,S''\,S''' \\ B\,C \end{matrix}\right\} = u', \quad \left.\begin{matrix} B\,S'''\,S' \\ C\,A \end{matrix}\right\} = v', \quad \left.\begin{matrix} C\,S'\,S'' \\ A\,B \end{matrix}\right\} = w'. \qquad 59.$$

Aus den Coordinaten der Punkte S, S′, S″, S‴ erhalten wir endlich für die Gleichungen der harmonischen Polaren dieser Punkte in Bezug auf das Dreieck A B C:

$$\begin{aligned} &\text{Gerade } u'\,v'\,w' \ldots \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = o \\ &\text{Gerade } u'\,v\,w \ldots -\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = o \\ &\text{Gerade } u\,v'\,w \ldots \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = o \\ &\text{Gerade } u\,v\,w' \ldots \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} = o. \end{aligned} \qquad 60.$$

§ 10.

Laut den in 50 gegebenen Coordinaten der Punkte k und l wird die Gleichung der Geraden k l:

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{\alpha}, & y, & z \\ \frac{1}{c\,\gamma}, & \frac{1}{\frac{h}{b} - \beta}, & \frac{\gamma}{a\,\alpha} \\ \frac{1}{b\,\beta}, & \frac{\beta}{a\,\alpha}, & \frac{1}{\frac{h}{c} - \gamma} \end{vmatrix} = o,$$

d. h.: $\frac{\mathfrak{A}\,x}{\alpha} + \mathfrak{B}\,y + \mathfrak{C}\,z = o$, wo

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\left(\frac{h}{b} - \beta\right)\left(\frac{h}{c} - \gamma\right)} - \frac{\beta\,\gamma}{a^2\,\alpha^2}, \text{ oder gemäss 47:}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{\left(\frac{h}{b} + \beta\right)\left(\frac{h}{c} + \gamma\right) - \beta\gamma}{a^2\alpha^2} = \frac{2\triangle(2\triangle + b\beta + c\gamma)}{a^2\alpha^2 bc} =$$

$$= \frac{2\triangle + b\beta + c\gamma}{2Ra\alpha^2}.$$

Ferner:

$$\mathfrak{B} = \frac{\gamma}{ab\alpha\beta} - \frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c} - \gamma\right)} = \frac{c\gamma^2\frac{h}{c} - c\gamma^3 - ab\alpha\beta}{abc\alpha\beta\gamma\left(\frac{h}{c} - \gamma\right)}.$$

In Folge von 49 ist der Zähler

$= c\gamma^2\frac{h}{c} - 2\triangle\gamma\frac{h}{c} = 2\triangle\gamma\left(\gamma - \frac{h}{c}\right)$. Also wird $\mathfrak{B} = -\frac{2\triangle}{abc\alpha\beta}$, oder schliesslich $\mathfrak{B} = -\frac{1}{2R\alpha\beta}$ und analog $\mathfrak{C} = -\frac{1}{2R\gamma\alpha}$.

Wir finden so die erste der Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\text{Gerade kl} \ldots \frac{(2\triangle + b\beta + c\gamma)x}{a\alpha^2} - \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} = 0 \\
&\text{Gerade KL} \ldots \frac{(2\triangle - b\beta - c\gamma)x}{a\alpha^2} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0 \\
&\text{Gerade kL} \ldots \frac{(2\triangle + b\beta - c\gamma)x}{a\alpha^2} - \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0 \\
&\text{Gerade Kl} \ldots \frac{(2\triangle - b\beta + c\gamma)x}{a\alpha^2} + \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} = 0,
\end{aligned} \qquad 61.$$

und mittelst des Buchstabenrades erhalten wir hieraus die Gleichungen der analogen Geraden li, LI, lI, Li und ik, IK, iK, Ik.

Aus den Gleichungen 61 geht unmittelbar hervor:

Die Geraden kl und KL schneiden sich und die Gerade BC im Punkte u'. Und die Geraden kL und Kl schneiden sich und die Gerade BC im Punkte u, d. h wir haben:

$$\begin{aligned}
&\left.\begin{matrix}kL\\Kl\end{matrix}\right\} = u, \quad \left.\begin{matrix}lI\\Li\end{matrix}\right\} = v, \quad \left.\begin{matrix}iK\\Ik\end{matrix}\right\} = w, \\
&\left.\begin{matrix}kl\\KL\end{matrix}\right\} = u', \quad \left.\begin{matrix}li\\LI\end{matrix}\right\} = v', \quad \left.\begin{matrix}ik\\IK\end{matrix}\right\} = w',
\end{aligned} \qquad 62.$$

§ 11.

In § 6 sind zwei Punkte aufgetreten, die wir mit i′ uud I′ bezeichnet haben

$$i' = \begin{cases} u'i \\ uI' \end{cases} \quad I' = \begin{cases} u'I \\ ui \end{cases}.$$

Bestimmen wir auch die Coordinaten dieser beiden Punkte.

Gemäss der Coordinaten von u′ und von i in 56 und 50 erhalten wir als Gleichung der Geraden u′ i

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ o, & -\beta, & \gamma \\ \frac{1}{\frac{h}{a}-\alpha}, & \frac{\beta}{c\gamma}, & \frac{\gamma}{b\beta} \end{vmatrix} = o,$$

d. h.:
$$-\left(\frac{\gamma}{b} + \frac{\beta}{c}\right)x + \frac{\gamma y}{\frac{h}{a}-\alpha} + \frac{\beta z}{\frac{h}{a}-\alpha} = o.$$

Wir erhalten also die erste der Gleichungen:

$$\text{Gerade } u' i \ldots \frac{\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)(b\beta + c\gamma)x}{bc} - \gamma y - \beta z = o$$

$$\text{Gerade } u I \ldots \frac{\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)(b\beta - c\gamma)x}{bc} + \gamma y - \beta z = o$$

$$\text{Gerade } u' I \ldots \frac{\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)(b\beta + c\gamma)x}{bc} + \gamma x + \beta z = o \qquad 63.$$

$$\text{Gerade } u i \ldots \frac{\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)(b\beta - c\gamma)x}{bc} - \gamma y + \beta z = o.$$

Für den Schnittpunkt i′ der zwei ersten dieser Geraden erhalten wir

$$x \sim 2\beta\gamma$$

$$y \sim \frac{-\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)(b\beta - c\gamma)\beta + \left(\frac{h}{a}-\alpha\right)(b\beta + c\gamma)\beta}{bc} =$$

$$= \frac{2\beta\left(\frac{h}{a}c\gamma - b\alpha\beta\right)}{bc},$$

$$z \sim \frac{\left(\frac{h}{a} - \alpha\right)(b\beta + c\gamma)\gamma + \left(\frac{h}{a} + \alpha\right)(b\beta - c\gamma)\gamma}{bc} =$$

$$= \frac{2\gamma\left(\frac{h}{a}b\beta - c\gamma\alpha\right)}{bc}.$$

Im Ausdruck von y schreiben wir $\frac{h}{a} = b\sin C$, $\alpha\beta = c\gamma\cos C$ und im Ausdruck von z ... $\frac{h}{a} = c\sin B$, $\gamma\alpha = b\beta\cos B$, so erhalten wir für den Punkt i′ und analoger Weise für den Punkt I′ die Coordinatenverhältnisse:

	x,	y,	z	
i′	$+1$,	$\sin C - \cos C$,	$\sin B - \cos B$	64.
I′	-1,	$\sin C + \cos C$,	$\sin B + \cos B$	

oder auch:

	x,	y,	z	
i′	$\sin 45^\circ$,	$\sin(C - 45^\circ)$,	$\sin(B - 45^\circ)$	64′.
I′	$-\sin 45^\circ$,	$\sin(C + 45^\circ)$,	$\sin(B + 45^\circ)$.	

Wir sahen 36, dass diese beiden Punkte i′ und I′ auf dem Kreise um BC als Durchmesser liegen. Prüfen wir daraufhin die für diese Punkte erhaltenen Coordinaten.

Die Gleichung irgend eines auf das Dreieck ABC bezogenen **Kreises** ist

$$\begin{aligned}(ax + by + cz)(\mathfrak{A}ax + \mathfrak{B}by + \mathfrak{C}cz) - \\ - abc(ayz + bzx + cxy) = 0,\end{aligned} \qquad 65.$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Potenzen der Ecken des Dreiecks ABC in Bezug auf den gegebenen Kreis darstellen.

Für den Kreis um BC als Durchmesser ist nun $\mathfrak{A} = AE \cdot AC = bc\cos A$ und $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 0$. Die Gleichung dieses Kreises wird also $(ax + by + cz)x\cos A - (ayz + bzx + cxy) = 0$, woraus

Kreis um BC als Durchmesser

$$x(x\cos A - y\cos B - z\cos C) - yz = o. \qquad 66.$$

Führen wir hier aus 64 die Coordinaten, sei es des Punktes i′ sei es des Punktes I′ ein, so sehen wir, dass diese Werte in der Tat der Kreisgleichung 66 identisch genügen. Auch von den Coordinaten 50 der Punkte i und I wird man sich mittelst der Relationen 45 und 46 leicht überzeugen, dass dieselben der Kreisgleichung 66 genügen.

Bilden wir nun die Gleichung der Geraden i′ I′.

Aus den Coordinaten 64 der Punkte i′ und I′ erhält man hiefür:

Gerade i′ I′ ... $x\sin(B - C) + y\sin B - z\sin C = o$. 67.

Diese Gerade schneidet die Seite BC im Punkte $y:z = \frac{1}{b}:\frac{1}{c}$.

Die Gerade i′ I′ geht somit durch die Mitte der Seite BC, und in Verbindung mit Satz 36 finden wir:

Die Punkte i′ und I′ sind in dem um BC als Durchmesser geschlagenen Kreise die Endpunkte des zur Geraden BC senkrechten Durchmessers. 68.

§ 12.

Aus dem Viereck i′ I′ i I, wo u und u′ die beiden auf BC liegenden Diagonalpunkte, folgt ferner:

Es liegen u und u′ harmonisch zur Strecke AD, wo A die Mitte der Seite BC, und D der Fusspunkt des Höhenperpendikels AD ist. Gemäss 10 liegen u u′ aber auch harmonisch zur Strecke BC. Es sind also u und u′ die Doppelpunkte der durch die Punktenpaare B, C und A, D bestimmten Involution. 69.

Aus 69 folgt auch:

Legt man zu dem um BC als Durchmesser beschriebenen Kreise durch die Punkte i und I, wo dieser Kreis von dem durch A gehenden Höhenperpendikel des Dreiecks ABC geschnitten wird, einen Orthogonalkreis, so sind u und u′ die Schnittpunkte dieses Orthogonalkreises mit der Seite BC. 70.

Denn sei λ der Mittelpunkt dieses Orthogonalkreises, so ist die Potenz von λ in Bezug auf den um BC beschriebenen Kreis

$\overline{\lambda I}^2 = \lambda B \cdot \lambda C$. Und im rechtwinkligen Dreieck $\lambda I \mathfrak{A}$ ist $\overline{\lambda I}^2 = \lambda D \cdot \lambda \mathfrak{A}$. Für die Schnittpunkte u und u′ des Kreises λ mit BC hat man also $\left.\begin{matrix}\overline{\lambda u}^2\\ \overline{\lambda u'}^2\end{matrix}\right\} = \lambda B \cdot \lambda C = \lambda D \cdot \lambda \mathfrak{A}$ und es sind also u und u′ harmonisch sowohl zu BC als zu $\mathfrak{A}$D, w. s. s.

Hat man so u, u′ und analog v, v′ und w, w′ direkt aus den ursprünglichen Punkten i, I; k, K; l, L konstruiert, so erhalten wir auch direkt die Punkte S, S′, S″, S‴ aus

$$\left.\begin{matrix}Au\\ Bv\\ Cw\end{matrix}\right\} = S; \quad \left.\begin{matrix}Au\\ Bv'\\ Cw'\end{matrix}\right\} = S'; \quad \left.\begin{matrix}Au'\\ Bv\\ Cw'\end{matrix}\right\} = S''; \quad \left.\begin{matrix}Au'\\ Bv'\\ Cw\end{matrix}\right\} = S'''. \qquad 57'.$$

Seien λ, μ, ν die Mittelpunkte der Kreise, die wir respektive durch i, I, durch k, K, durch l, L orthogonal zu den respektive um BC, um CA, um AB als Durchmessern beschriebenen Kreisen legen, so sind in den letztern Kreisen λ, μ, ν die Pole der Geraden iI, kK, lL, und somit in Bezug auf die Strecken BC, CA, AB harmonisch zu den Höhenfusspunkten D, E, F.

Die drei Punkte λ, μ, ν liegen daher in einer nämlichen Geraden, der Polaren des Höhenpunktes H des Dreiecks ABC in Bezug auf dieses Dreieck. 71.

Dass die Mitte λ von uu′ harmonisch zu D in Bezug auf BC, ergibt sich auch unmittelbar daraus, dass uu′ harmonisch ist sowohl zu BC als zu $\mathfrak{A}$D, wo $\mathfrak{A}$ die Mitte von BC. Denn hieraus folgt zunächst $\lambda B \cdot \lambda C = \lambda \mathfrak{A} \cdot \lambda D$, d. h. da $\mathfrak{A}$ die Mitte von BC ist, $\overline{\lambda \mathfrak{A}}^2 - \overline{C \mathfrak{A}}^2 = \lambda \mathfrak{A} \cdot \lambda D$, woraus $\lambda \mathfrak{A} (\lambda \mathfrak{A} - \lambda D) = \overline{C \mathfrak{A}}^2$, d. h. $\mathfrak{A}\lambda \cdot \mathfrak{A} D = \left\{\begin{matrix}\overline{\mathfrak{A} C}^2\\ \overline{\mathfrak{A} B}^2\end{matrix}\right.$. Also ist λ harmonisch zu D in Bezug auf BC, wie zu zeigen.

Die obigen um λ, μ, ν als Mittelpunkten respektive um uu′, vv′, ww′ als Durchmessern beschriebenen Kreise wollen wir der Kürze wegen ebenfalls mit λ, μ, ν bezeichnen. Da uu′ harmonisch zu BC und ebenso harmonisch zu $\mathfrak{A}$D, so ist jeder durch B und C gelegte Kreis und jeder durch $\mathfrak{A}$ und D gelegte Kreis orthogonal zum Kreise λ. Daraus folgt:

Der Umkreis und der Neunpunktkreis des Stamm-
dreiecks ABC sind Orthogonalkreise der drei Kreise
λ, μ, ν. Die drei Kreise λ, μ, ν gehören daher einem näm-
lichen Kreisbüschel an, nämlich dem Büschel der 72.
Orthogonalkreise des durch den Umkreis und den
Neunpunktkreis von Dreieck ABC bestimmten Kreis-
büschels.

Wir sehen also wieder, dass die Punkte λ, μ, ν in
einer Geraden liegen, und zwar ist diese Gerade die
Linie gleicher Potenzen in Bezug auf den Umkreis 73.
und auf den Neunpunktkreis von Dreieck ABC. Diese
Gerade $\lambda\mu\nu$ steht daher senkrecht zur Eulerschen
Geraden OH des Dreiecks ABC.

In dem durch die Seiten BA und CA und durch die Höhenperpendikel BE und CF des Stammdreiecks gebildeten Vierseit sind BC, EF, AH die drei Diagonalen. Somit wird BC von FE harmonisch zu D geschnitten. Die Gerade EF geht also durch den Punkt λ.

Die Gerade $\lambda\mu\nu$ ist daher auch die perspek-
tivische Axe des Stammdreiecks ABC und des Drei- 74.
ecks DEF der Höhenfusspunkte.

Wir setzen das Dreieck ABC spitzwinklig voraus, so
liegt der Höhenpunkt H im Innern des Dreiecks und somit auch
im Innern des Umkreises. Aber H ist der positive Ähnlichkeits-
punkt des Umkreises und des Neunpunktkreises mit dem
Ähnlichkeitsverhältnis $^1/_2$. Unter der obigen Voraussetzung wird
daher der Neunpunktkreis vom Umkreise vollständig um-
schlossen. Das durch den Umkreis und den Neunpunktkreis
bestimmte Büschel ist daher ein solches der zweiten Art, und
somit das Büschel der Orthogonalkreise ein solches der ersten
Art. Die drei Kreise λ, μ, ν schneiden sich also in den
nämlichen reellen Punkten Π und P der Eulerschen
Geraden des Stammdreiecks. Diese Punkte sind die
Nullpunkte des durch den Umkreis und den Neun-
punktkreis von Dreieck ABC bestimmten Büschels, 75
oder die Doppelpunkte der durch Umkreis und Neun-
punktkreis auf den Eulerschen Geraden bestimmten

Involution. Oder es sind Π und P einander sowohl in Bezug auf den Umkreis als in Bezug auf den Neunpunktkreis harmonisch zugeordnet.

Zu diesen Resultaten gelangen wir auch wie folgt: Das durch die Geraden $u'v'w'$, $u'vw$, $uv'w$, uvw' gebildete Vierseit das wir das Vierseit U nennen wollen, hat die Strecken uu', vv', ww' zu Diagonalen. Nach einem bekannten Satze liegen daher die Mitten λ, μ, ν dieser Strecken in einer nämlichen Geraden, und die respektive um uu', vv', ww' als Durchmesser beschriebenen Kreise, d. h. die obgenannten respektive durch i, I, durch k, K, durch l, L gelegten Orthogonalkreise der respektive um BC, um CA, um AB als Durchmesser geschlagenen Kreise, gehören einem nämlichen Kreisbüschel an, dessen Potenzlinie durch das Umkreiszentrum des Diagonaldreiecks des Vierseits U geht. Dieses Diagonaldreieck ist aber das Stammdreieck ABC. Obige Potenzlinie geht somit durch das Umkreiszentrum O des Dreiecks ABC. Diese Gerade geht aber auch durch den Höhenpunkt H von Dreieck ABC, denn es hat H in Bezug auf die Kreise λ, μ, ν respektive die Potenzen $Hi \cdot HI$; $Hk \cdot HK$; $Hl \cdot HL$, und da diese Produkte einander gleich sind, so ist also auch H ein Punkt der Potenzlinie. Wir finden also wieder: die Potenzlinie des Kreisbüschels λ, μ, ν ist die Eulersche OH Gerade des Stammdreiecks ABC.

Da wir das Dreieck ABC als spitzwinklig voraussetzen, so sind, wie wir pag. 217 gesehen, die Potenzen $Hi \cdot HI$ u. s. w. negativ. Der Punkt H liegt daher im Innern der Kreise λ, μ, ν. Wir sehen also wieder, dass das von diesen Kreisen gebildete Büschel ein solches der ersten Art ist, dass sich daher die drei Kreise λ, μ, ν in zwei reellen gemeinsamen Punkten Π und P auf der Eulerschen Geraden des Stammdreiecks schneiden. Wir haben ferner $H\Pi \cdot HP = Hi \cdot HI$, d. h. nach 1

$$H\Pi \cdot HP = -4R^2 \cos A \cos B \cos C \qquad 76.$$

wo R der Radius des Umkreises von Dreieck ABC.

Und da der Umkreis von ABC ein Orthogonalkreis der Kreise λ, μ, ν ist, so haben wir auch

$$O\Pi \cdot OP = R^2. \qquad 77.$$

Aber auch der Neunpunktkreis von ABC ist ein Orthogonalkreis der Kreise λ, μ, ν. Wenn somit m der Mittelpunkt des Neunpunktkreises von Dreieck ABC, so ist

$$m\Pi \cdot mP = \frac{R^2}{4}. \tag{78.}$$

Bezeichnen wir mit Ω die Mitte von $P\Pi$ oder den Schnittpunkt der Axe $\lambda\mu\nu$ unseres Kreisbüschels mit der Geraden OH, so ist

$$O\Pi \cdot OP = \overline{O\Omega}^2 - \overline{\Omega\Pi}^2, \quad m\Pi \cdot mP = \overline{m\Omega}^2 - \overline{\Pi\Omega}^2,$$
$$H\Pi \cdot HP = \overline{H\Omega}^2 - \overline{\Omega\Pi}^2.$$

Die drei obigen Relationen geben daher auch

$$\overline{m\Omega}^2 - \overline{\Omega\Pi}^2 = \tfrac{1}{4} R^2$$
$$\overline{O\Omega}^2 - \overline{\Omega\Pi}^2 = R^2$$
$$\overline{H\Omega}^2 - \overline{\Omega\Pi}^2 = -4R^2 \cos A \cos B \cos C.$$

Aber m ist die Mitte von OH. Wir haben daher

$$m\Omega = H\Omega + \tfrac{1}{2} OH, \quad O\Omega = H\Omega + OH,$$

und die obigen Relationen geben

$$(H\Omega + \tfrac{1}{2} OH)^2 - \overline{\Omega\Pi}^2 = \tfrac{1}{4} R^2$$
$$(H\Omega + OH)^2 - \overline{\Omega\Pi}^2 = R^2$$
$$\overline{H\Omega}^2 - \overline{\Omega\Pi}^2 = -4R^2 \cos A \cos B \cos B.$$

Hieraus können wir die drei Grössen OH, $H\Omega$, $\Omega\Pi$ berechnen. Eliminieren wir zunächst $\overline{\Omega\Pi}^2$ durch Substraktion je zweier Gleichungen, so kommt

$$OH \cdot H\Omega + \tfrac{3}{4} \overline{OH}^2 = \frac{3R^2}{4}$$
$$OH \cdot H\Omega + \tfrac{1}{4} \overline{OH}^2 = \frac{R^2}{4} (1 + 16 \cos A \cos B \cos C),$$

und hieraus wieder

$$\overline{OH}^2 = R^2 (1 - 8 \cos A \cos B \cos C), \tag{79.}$$

und $OH \cdot H\Omega = 6R^2 \cos A \cos B \cos C$, woraus

$$\overline{H\Omega}^2 = \frac{36\,R^2 \cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C}{1 - 8 \cos A \cos B \cos b}. \qquad 80.$$

Die Relation $\overline{\Omega\Pi}^2 = \overline{H\Omega}^2 + 4\,R^2 \cos A \cos B \cos C$ gibt endlich

$$\left.\begin{array}{l}\overline{\Omega\Pi}^2\\ \overline{\Omega P}^2\end{array}\right\} = \frac{4\,R^2\,(1 + \cos A \cos B \cos C)\,\cos A \cos B \cos C}{1 - 8 \cos A \cos B \cos C}. \qquad 81.$$

Ferner haben wir

$$\overline{O\Omega}^2 = \overline{\Omega H}^2 + R^2 \text{ und } 4 \cdot \overline{m\Omega}^2 = 4 \cdot \overline{\Omega\Pi}^2 + R^2,$$

woraus

$$\overline{O\Omega}^2 = \frac{R^2 \cdot (1 - 2 \cos A \cos B \cos C)^2}{1 - 8 \cos A \cos B \cos C}. \qquad 82.$$

$$4 \cdot \overline{m\Omega}^2 = \frac{R^2 \cdot (1 + 4 \cos A \cos B \cos C)^2}{1 - 8 \cos A \cos B \cos C}. \qquad 83.$$

Berechnen wir endlich die trimetrischen Normalkoordinaten des Punktes Ω oder des Schnittpunktes der Geraden $\lambda\,\mu\,\nu$ mit der Eulerschen Geraden O H. Wir haben:

Gerade $\lambda\,\mu\,\nu$, d. h. Polare des Höhenpunktes H in Bezug auf das Dreieck A B C

$$x \cos A + y \cos B + z \cos C = 0. \qquad 84.$$

Eulersche Gerade O H

$$x\,(b^2 - c^2) \cos A + y\,(c^2 - a^2) \cos B + z\,(a^2 - b^2) \cos C = 0. \qquad 85.$$

Hieraus für den Schnittpunkt Ω beider Geraden

$x \cos A = (a^2 - b^2) - (c^2 - a^2) = 2\,a^2 - b^2 - c^2$. Somit

Punkt Ω

$$x : y : z = \frac{2\,a^2 - b^2 - c^2}{\cos A} : \frac{2\,b^2 - c^2 - a^2}{\cos B} : \frac{2\,c^2 - a - b^2}{\cos C} =$$
$$= \frac{a^2 - 2\,b\,c \cos A}{\cos A} : \frac{b^2 - 2\,c\,a \cos B}{\cos B} : \frac{c^2 - 2\,a\,b \cos C}{\cos C}. \qquad 86.$$

Kehren wir zu p. 251 oder zum Vierseit U zurück, und betrachten eines der in diesem Vierseit enthaltenen vier Dreiecke z. B. das Dreieck u v′ w′. Seien u γ, v′ δ', w′ ε' die drei Höhenperpendikel und h′ der Höhenpunkt dieses Dreiecks, so liegen

γ auf dem Kreise λ, δ' auf dem Kreise μ, ε' auf dem Kreise ν. Aber γ und δ' liegen auch auf dem Kreise um u v' als Durchmesser, und daher ist $h'\gamma \cdot h'u = h'\delta' \cdot h'v'$ und analog $= h'\varepsilon' \cdot h'w'$. Der Punkt h' hat daher in Bezug auf die Kreise λ, μ, ν dieselbe Potenz, und liegt somit auf der gemeinsamen Potenzlinie dieser drei Kreise. Dasselbe gilt von den Höhenpunkten der drei übrigen im Vierseit U enthaltenen Dreiecke. Die Höhenpunkte der im Vierseit U enthaltenen vier Dreiecke liegen daher ebenfalls auf der Eulerschen Geraden OH des Stammdreiecks ABC.

Diese vier Höhenpunkte liegen bekanntlich auf der Leitlinie der dem Vierseit eingeschriebenen Parabel. Wir können daher auch sagen: Die Leitlinie der dem Vierseit U eingeschriebenen Parabel ist die Eulersche Gerade 87.
des Dreiecks ABC.

Die Diagonalen u u', v v', w w' des Vierseits U sind spezielle Fälle der dem Vierseit U eingeschriebenen Kegelschnitte, und wir können die respektive um u u', v v' w w' als Durchmesser beschriebenen Kreise als die Orte der Scheitel der diese Kegelschnitte u u', v v', w w' umgleitenden rechten Winkel auffassen. Allgemein gilt nun der Satz: Für die einem gegebenen Vierseit eingeschriebene Schar von Kegelschnitten bilden die Ortskreise der Scheitel der je einen dieser Kegelschnitte umgleitenden rechten Winkel ein Kreisbüschel. Jedem Kegelschnitte der dem Vierseit U eingeschriebenen Schar entspricht so als Ort des Scheitels des diesen Kegelschnitt umgleitenden rechten Winkels ein Kreis des Büschels, dem die Kreise λ, μ, ν angehören, oder des Büschels, 88.
das zum Umkreise und zum Neunpunktkreise des Stammdreiecks ABC orthogonal ist, und dessen Grundpunkte somit auf der Eulerschen Geraden von Dreieck ABC liegen.

§ 13.

In 64' haben wir die Koordinaten der Punkte i' und I' aufgestellt, und mittelst des Buchstabenrades erhalten wir hieraus die Koordinaten von k', K' und von l', L'. Hieraus ergibt sich unmittelbar, dass die Dreiecke i' k' l' und I' K' L' zum Stammdreieck ABC perspektivisch liegen. Denn wir erhalten aus 64'

$$\text{Strahl } A\,i' \ldots \frac{y}{z} = \frac{\sin(C-45^0)}{\sin(B-45^0)},$$

und analog für die Strahlen B k′ und C l′. Die drei Strahlen A i′, B k′, C l′ schneiden sich also in einem nämlichen Punkte, für welchen

$$x:y:z = \frac{1}{\sin(A-45^0)} : \frac{1}{\sin(B-45^0)} : \frac{1}{\sin(C-45^0)} \cdot \quad 89.$$

Analog die Strahlen A I′, B K′, C L′ schneiden sich in einem nämlichen Punkte, für welchen

$$x:y:z = \frac{1}{\sin(A+45^0)} : \frac{1}{\sin(B+45^0)} : \frac{1}{\sin(C+45^0)} \cdot \quad 89'.$$

Nehmen wir die inversen Punkte dieser beiden perspektivischen Zentren in Bezug auf das Dreieck A B C, d. h. die Punkte

$$x:y:z = \sin(A-45^0) : \sin(B-45^0) : \sin(C-45^0) \quad \text{und}$$
$$x:y:z = \sin(A+45^0) : \sin(B+45^0) : \sin(C+45^0),$$

so ergibt sich für die Verbindungsgerade dieser zwei letztern Punkte:

$$x\sin(B-C) + y\sin(C-A) + z\sin(A-B) = 0.$$

Dieses ist aber die Verbindungsgerade des Umkreiszentrums des Dreiecks A B C mit dem Gegenschwerpunkte oder Punkt von Lemoine von A B C, oder derjenige Durchmesser des Brocardschen Kreises von A B C, der senkrecht steht zur Verbindungslinie der beiden Brocardschen Punkte von A B C.

Das perspektivische Zentrum selber der Dreiecke i′ k′ l′ und A B C, sowie dasjenige der Dreiecke I′ K′ L′ und A B C, liegen somit auf der inversen Kurve der obigen Geraden d. h, auf demjenigen dem Dreieck A B C umschriebenen Kegelschnitte, der durch den Schwerpunkt von A B C und durch den inversen Punkt des Umkreismittelpunktes d. h. durch den Höhenpunkt von A B C geht, d. h.: Das perspektivische Zentrum der Dreiecke i′ k′ l′ und A B C, sowie das perspektivische Zentrum der Dreiecke I′ K′ L′ und A B C liegen auf derjenigen **90.**

dem Dreieck ABC umschriebenen rechtwinkligen Hyperbel, die durch den Schwerpunkt von ABC geht, oder auf der sogenannten Hyperbel von Kiepert.

Nach der bekannten Grundeigenschaft der Hyperbel von Kiepert folgt dies auch unmittelbar daraus, dass die Dreiecke B i′ C, C k′ A, A l′ B gleichschenklig und einander ähnlich sind, und analog die Dreiecke B I′ C, C K′ A, A L′ B.

Ferner haben wir:

Die Dreiecke i′ k′ l′ und I′ K′ L′ liegen auch zu einander perspektivisch, und das perspektivische Zentrum derselben ist der Umkreismittelpunkt des Stammdreiecks ABC. 91.

§ 14.

Stellen wir endlich die Gleichungen der Seiten der beiden Vierseite auf, deren Diagonalen laut 33 neben BC einmal die dort mit Ia und IIa bezeichneten sich in i′ scheidenden Geraden, und das andermal die sich in I′ schneidenden Geraden IIIa und IVa sind. Die Seiten des ersten dieser Vierseite sind Q R′, q′ R, Q′ r′, q r und diejenigen des zweiten Vierseits Q′ r, q r′, Q R, q′ R′.

In 51 haben wir die Koordinaten der Punkte q, q′, Q, Q′, r, r′, R, R′, und wir erhalten hieraus als Gleichung der Geraden Q R′:

$$\begin{vmatrix} -\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)x, & \left(\frac{h}{b}-\beta\right)y, & \left(\frac{h}{c}+\gamma\right)z \\ c\gamma, & \left(\frac{h}{b}-\beta\right)\beta, & -a\alpha \\ b\beta, & a\alpha, & \left(\frac{h}{c}+\gamma\right)\gamma \end{vmatrix}=0,$$

d. h.: $-\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)A\,x+\left(\frac{h}{b}-\beta\right)B\,y+\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)C\,z=0$, wo

$$A=\left(\frac{h}{b}-\beta\right)\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)\left\{\beta\gamma+\left(\frac{h}{b}+\beta\right)\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)\right\}=$$

$$=\frac{2\triangle}{bc}\left(\frac{h}{b}-\beta\right)\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)(2\triangle+b\beta-c\gamma)$$

$B = - ab\alpha\beta - c\gamma^2\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)$, oder in Folge der Relationen 49

$$B = -2\triangle\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right) \text{ und analog } C = 2\triangle\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right).$$

Wir erhalten so die erste der folgenden Gleichungen:

$$\text{Gerade } QR' \ldots \frac{\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)(2\triangle + b\beta - c\gamma)x}{bc} + \gamma y - \beta z = 0$$

$$\text{Gerade } q'R \ldots \frac{\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)(2\triangle - b\beta + c\gamma)x}{bc} - \gamma y + \beta z = 0$$

$$\text{Gerade } Q'r' \ldots \frac{\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)(2\triangle - b\beta - c\gamma)x}{bc} + \gamma y + \beta z = 0 \qquad 92.$$

$$\text{Gerade } qr \ldots \frac{\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)(2\triangle + b\beta + c\gamma)x}{bc} - \gamma y - \beta z = 0$$

und

$$\text{Gerade } Q'r \ldots \frac{\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)(2\triangle + b\beta - c\gamma)x}{bc} - \gamma y + \beta z = 0$$

$$\text{Gerade } qr' \ldots \frac{\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)(2\triangle - b\beta + c\gamma)x}{bc} + \gamma y - \beta z = 0$$

$$\text{Gerade } QR \ldots \frac{\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)(2\triangle - b\beta - c\gamma)x}{bc} - \gamma y - \beta z = 0 \qquad 93.$$

$$\text{Gerade } q'R' \ldots \frac{\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)(2\triangle + b\beta + c\gamma)x}{bc} + \gamma y + \beta z = 0.$$

Hieraus ergibt sich wieder, wie wir in § 6 gesehen, dass die Seite BC von den zwei ersten Geraden jeder Gruppe im Punkte u, und von den zwei letztern Geraden im Punkte u′ geschnitten wird.

Schreiben wir für die Gruppe 92 zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{a}}+\alpha\right)(2\triangle+\mathrm{b}\beta-\mathrm{c}\gamma)=\mathrm{b}\,\mathrm{c}\quad,\\
&\left(\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{a}}+\alpha\right)(2\triangle-\mathrm{b}\beta+\mathrm{c}\gamma)=\mathrm{b}\,\mathrm{c}\,\mathfrak{A}',\\
&\left(\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{a}}-\alpha\right)(2\triangle-\mathrm{b}\beta-\mathrm{c}\gamma)=\mathrm{b}\,\mathrm{c}\,\mathfrak{A}'',\\
&\left(\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{a}}-\alpha\right)(2\triangle+\mathrm{b}\beta+\mathrm{c}\gamma)=\mathrm{b}\,\mathrm{c}\,\mathfrak{A}'''
\end{aligned} \qquad 94.$$

und für die Gruppe 93

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{a}}-\alpha\right)(2\triangle+\mathrm{b}\beta-\mathrm{c}\gamma)=\mathrm{b}\,\mathrm{c}\,\mathfrak{A}_1,\\
&\left(\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{a}}-\alpha\right)(2\triangle-\mathrm{b}\beta+\mathrm{c}\gamma)=\mathrm{b}\,\mathrm{c}\,\mathfrak{A}_1',\\
&\left(\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{a}}+\alpha\right)(2\triangle-\mathrm{b}\beta-\mathrm{c}\gamma)=\mathrm{b}\,\mathrm{c}\,\mathfrak{A}_1'',\\
&\left(\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{a}}+\alpha\right)(2\triangle+\mathrm{b}\beta+\mathrm{c}\gamma)=\mathrm{b}\,\mathrm{c}\,\mathfrak{A}_1''',
\end{aligned} \qquad 95.$$

wo $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_1'$; $\mathfrak{A}_1''$, $\mathfrak{A}_1'''$, respektive aus $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$ durch Umsetzung von α in $-\alpha$ hervorgehen, so sind die Seiten des ersten dieser Vierseite

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q\,R'} \ldots \quad & \mathfrak{A}\,\mathrm{x}+\gamma\,\mathrm{y}-\beta\,\mathrm{z}=0\\
\mathrm{q'\,R} \ldots \quad & \mathfrak{A}'\,\mathrm{x}-\gamma\,\mathrm{y}+\beta\,\mathrm{z}=0\\
\mathrm{Q'\,r'} \ldots \quad & \mathfrak{A}''\,\mathrm{x}+\gamma\,\mathrm{y}+\beta\,\mathrm{z}=0\\
\mathrm{q\,r} \ldots \quad & \mathfrak{A}'''\,\mathrm{x}-\gamma\,\mathrm{y}-\beta\,\mathrm{z}=0
\end{aligned} \qquad 92'.$$

und die Seiten des zweiten Vierseits

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q'\,r} \ldots \quad & \mathfrak{A}_1\,\mathrm{x}-\gamma\,\mathrm{x}+\beta\,\mathrm{z}=0\\
\mathrm{q\,r'} \ldots \quad & \mathfrak{A}_1'\,\mathrm{x}+\gamma\,\mathrm{x}-\beta\,\mathrm{z}=0\\
\mathrm{Q\,R} \ldots \quad & \mathfrak{A}_1''\,\mathrm{x}-\gamma\,\mathrm{x}-\beta\,\mathrm{z}=0\\
\mathrm{q'\,R'} \ldots \quad & \mathfrak{A}_1'''\,\mathrm{x}+\gamma\,\mathrm{x}+\beta\,\mathrm{z}=0.
\end{aligned} \qquad 93'.$$

Hieraus erhalten wir für die von u und u′ verschiedenen Ecken des Vierseits 92 oder 92′

$$\text{Punkt} \begin{cases}\mathrm{Q\,R'}\\ \mathrm{Q'\,r'}\end{cases} \ldots \mathrm{x}:\mathrm{y}:\mathrm{z}=2\beta\gamma:-\beta(\mathfrak{A}+\mathfrak{A}''):\gamma(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}'')$$

96.

$$\text{Punkt}\begin{cases} q'\,R \\ q\,r \end{cases} \ldots x:y:z = 2\beta\gamma : \beta(\mathfrak{A}' + \mathfrak{A}''') : -\gamma(\mathfrak{A}' - \mathfrak{A}''')$$

$$\text{Punkt}\begin{cases} Q\,R' \\ q\,r \end{cases} \ldots x:y:z = 2\beta\gamma : -\beta(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}''') : \gamma(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}''')$$

$$\text{Punkt}\begin{cases} q'\,R \\ Q'\,r' \end{cases} \ldots x:y:z = 2\beta\gamma : \beta(\mathfrak{A}' - \mathfrak{A}'') : -\gamma(\mathfrak{A}' + \mathfrak{A}'')$$

und für die von u und u′ verschiedenen Ecken des Vierseits 93 oder 93′

97.

$$\text{Punkt}\begin{cases} Q'\,r \\ Q\,R \end{cases} \ldots x:y:z = 2\beta\gamma : \beta(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_1'') : -\gamma(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_1'')$$

$$\text{Punkt}\begin{cases} q\,r' \\ q'\,R' \end{cases} \ldots x:y:z = 2\beta\gamma : -\beta(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_1''') : \gamma(\mathfrak{A}_1' - \mathfrak{A}_1''')$$

$$\text{Punkt}\begin{cases} Q'\,r \\ q'\,R' \end{cases} \ldots x:y:z = 2\beta\gamma : \beta(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_1''') : -\gamma(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_1''')$$

$$\text{Punkt}\begin{cases} q\,r' \\ Q\,R \end{cases} \ldots x:y:z = 2\beta\gamma : -\beta(\mathfrak{A}_1' - \mathfrak{A}_1'') : \gamma(\mathfrak{A}_1' + \mathfrak{A}_1'')$$

Für die Gerade $\text{I}a = \begin{cases} Q\,R' \\ Q'\,r' \end{cases} \ldots \begin{cases} q'\,Q \\ q\,r \end{cases}$ erhalten wir nun mittelst der Koordinaten dieser Punkte die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{2}, & \gamma y, & \beta z \\ 1, & -(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}''), & \mathfrak{A} - \mathfrak{A}'' \\ 1, & \mathfrak{A}' + \mathfrak{A}''', & -(\mathfrak{A}' - \mathfrak{A}''') \end{vmatrix} = 0,$$

d. h.: $\frac{1}{2} A x + \gamma B y + \beta C z = 0$, wo

$A = (\mathfrak{A} + \mathfrak{A}'')(\mathfrak{A}' - \mathfrak{A}''') - (\mathfrak{A} - \mathfrak{A}'')(\mathfrak{A}' + \mathfrak{A}''') = 2(\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'' - \mathfrak{A}\mathfrak{A}''')$.
$B = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}' - \mathfrak{A}'' - \mathfrak{A}'''$, $C = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}' + \mathfrak{A}'' + \mathfrak{A}'''$, woraus, da wir, A, B, C mit demselben Faktur b c multiplizieren dürfen,

$$A = -\frac{16 \triangle \beta (h_a^2 - \alpha^2)}{c}, \; B = 8 \triangle \alpha, \; C = 8 \triangle h_a.$$

Somit

$$\text{Gerade I}a \ldots -\frac{(h_a^2 - \alpha^2)\beta x}{c} + \gamma\alpha y + h_a \beta z = 0.$$

Aber $h_a^2 - \alpha^2 = b c \cos A$, $\gamma \alpha = b \beta \cos B$, $h_a = b \sin C$, und wir erhalten so die erste der Gleichungen:

$$\begin{array}{ll}
\text{Gerade Ia} \ldots & -x\cos A + y\cos B + z\sin C = 0 \\
\text{Gerade IIa} \ldots & -x\cos A + y\sin B + z\cos C = 0 \\
\text{Gerade IIIa} \ldots & x\cos A - y\cos B + z\sin C = 0 \\
\text{Gerade IVa} \ldots & x\cos A + y\sin B - z\cos C = 0.
\end{array} \qquad 98.$$

Der Schnittpunkt der Geraden Ia und IIa ist

$$x \sim \cos(B + C) = -\cos A, y \sim -\cos A(\sin C - \cos C),$$
$$z \sim -\cos A(\sin B - \cos B), \text{ d. h. } x : y : z =$$
$$1 : \sin C - \cos C : \sin B - \cos B.$$

Und als Schnittpunkt der Geraden IIIa und IVa finden wir

$$x : y : z = -1 : \sin C + \cos C : \sin B + \cos B.$$

Aus den Gleichungen 98 verifizieren wir also, dass Ia und IIa sich im Punkte i′ und dass IIIa und IVa sich im Punkte I′ schneiden.

Aus 98 geht ferner unmittelbar hervor:

Die Geraden Ia und IIIa schneiden sich und die Seite AB im Fusspunkte F des Höhenperpendikels CF, und die Geraden IIa und IVa schneiden sich und 99. die Seite CA im Fusspunkte E des Höhenperpendikels BE.

Dieses in Verbindung mit 68 und 36 ergibt die nachstehende direkte Konstruktion der Geraden Ia, IIa, IIIa, IVa:

Seien i′ und J′ die Endpunkte des zu BC senkrechten Durchmessers im Kreise um BC als Durchmesser (i′ auf derselben Seite von BC aus wie die Ecke A), so sind die Strahlen, die man durch den Fusspunkt E des Höhenperpendikels BE nach den 100. Punkten i′ und J′ zieht, die Geraden IIa und IVa und die Strahlen, die man durch den Fusspunkt F des Höhenperpendikels CF nach den Punkten i′ und J′ zieht, sind die Geraden Ia und IIIa.

Aus dieser Konstruktion 100 verbunden mit den Gleichungen 98 folgt auch:

Die Punkte auf BC, für welche

$$y : z = \frac{1}{\sin B} : \frac{1}{\cos C}, \text{ oder } y : z = -\frac{1}{\sin B} : \frac{1}{\cos C}$$

sind resp. die Schnittpunkte von BC mit den Geraden EJ′ und Ei′. 101.

Und die Punkte auf BC, für welche

$$y:z = \frac{1}{\cos B} : \frac{1}{\sin C}, \text{ oder } y:z = \frac{1}{\cos B} : -\frac{1}{\sin B}$$

sind respektive die Schnittpunkte von BC mit den Geraden FJ′ und Fi′.

Im Vierseit Ia, IIa, IIIa, IVa haben wir also als Paare von Gegenpunkten einmal i′ und J′ und das andere mal E und F. Bestimmen wir jetzt das dritte Paar von Gegenpunkten, nämlich die Schnittpunkte Ia, IVa und IIa, IIIa.

Für den Punkt Ia, IVa erhalten wir aus den Gleichungen 98

$$\begin{gathered} x \sim \cos(B - C),\ y \sim (\cos C - \sin C)\cos A, \\ z \sim (\cos B + \sin B)\cos A. \end{gathered} \qquad 102.$$

Und für den Punkt IIIa, IIa

$$\begin{gathered} x \sim \cos(B - C),\ y \sim (\cos C + \sin C)\cos A, \\ z \sim (\cos B - \sin B)\cos A. \end{gathered} \qquad 103.$$

Als Gleichung der dritten Diagonale unseres Vierseits ergibt sich hieraus

$$\begin{vmatrix} \dfrac{x \cos A}{\cos(B - C)}, & y, & z, \\ 1, & \cos C - \sin C, & \cos B + \sin B \\ 1, & \cos C + \sin C, & \cos B - \sin B \end{vmatrix} = 0$$

oder $$\frac{x \cos A}{\cos(B - C)} \mathfrak{A} + y \mathfrak{B} + z \mathfrak{C} = 0,$$ wo

$$\mathfrak{A} = -2 \sin(B + C) = -2 \sin A,\ \mathfrak{B} = 2 \sin B,\ \mathfrak{C} = 2 \sin C.$$

Die Gleichung der dritten Diagonale ist also

$$-\frac{x \cos A \sin A}{\cos(B - C)} + y \sin B + z \sin C = 0. \qquad 104.$$

Diese Diagonale schneidet somit die Seite BC in demselben Punkte, wo die Gerade $ax + by + cz = 0$, d. h. die unendlichferne Gerade. Die dritte Diagonale des Vierseits Ia IIa IIIa IVa ist somit der Seite BC des Stammdreiecks parallel.

Berechnen wir die Distanz dieser Diagonalen von der Seite B C. Diese Distanz ist gleich dem wahren Werte der x-Koordinate in den Ausdrücken 102 und 103. In 102 sei $x = \lambda \cos (B - C)$, $y = \lambda (\cos C - \sin C) \cos A$, $z = \lambda (\cos B + \sin B) \cos A$. Aber $a x + b y + c z = 2 \triangle$, und somit $\frac{2\triangle}{\lambda} = a \cos (B - C) + b (\cos C - \sin C) \cos A + c (\cos B + \sin B) \cos A = a \cos (B - C) + a \cos A = 2 a \sin B \sin C$. Somit $\lambda = \frac{\triangle}{a \sin B \sin b} = R$, wo R der Umkreisradius des Dreiecks A B C.

Für die Distanz der Diagonalen $\left.\begin{matrix} \mathrm{Ia} \\ \mathrm{IVa} \end{matrix}\right\}$ und $\left\{\begin{matrix} \mathrm{IIa} \\ \mathrm{IIIa} \end{matrix}\right.$ von der Seite B C erhalten wir somit $x = R \cos (B - C)$.

Wenn aber O der Mittelpunkt des Umkreises von A B C und H der Höhenpunkt, so ist $\sphericalangle$ O A H = C — B. Zieht man also durch O eine Parallele zu B C, welche Parallele das Höhenperpendikel A D in s trifft, so ist s A = R cos (C — B). Macht man also auf A D die Strecke D α = s A oder A α = O $\mathfrak{A}$, so ist α der Schnittpunkt der in Rede stehenden Diagonalen mit A D. Aber A H = 2 · O $\mathfrak{A}$ und wir finden schliesslich:

Die zu BC parallele Gerade $\left.\begin{matrix} \mathrm{Ia} \\ \mathrm{IVa} \end{matrix}\right\} \ldots \left\{\begin{matrix} \mathrm{IIa} \\ \mathrm{IIIa} \end{matrix}\right.$ schneidet das Höhenperpendikel AD in der Mitte α des Eckabschnittes A H.

Es ist α der Mittelpunkt des Umkreises von Dreieck A E F, und wir behaupten nun, dass die Punkte

$$(\mathrm{Ia}, \mathrm{IVa}) = \mathrm{Va} \text{ und } (\mathrm{IIa}, \mathrm{IIIa}) = \mathrm{Wa} \qquad 105.$$

die Endpunkte des zu B C parallelen Durchmessers dieses Umkreises seien. In der Tat, wenn wir wieder den Kreis um B C als Durchmesser betrachten, so ist

$$\sphericalangle E\,Va\,F = \frac{\text{Bogen } F B I' - \text{Bogen } E i'}{2} =$$

$$= \frac{(i' B I' - i' F) - (E i' F - i' F)}{2} = \frac{B I' C - E i' F}{2}, \quad \text{d. h.}$$

$\sphericalangle$ E Va F = E A F. Der Punkt Va liegt somit auf dem Umkreis des Dreiecks A E F und analog der Punkt Wa, und da wir anderseits wissen, dass die Gerade Va Wa durch den Mittelpunkt α des letztern Kreises geht, und zu B C parallel ist, so ist unsere Behauptung erwiesen.

In dem von den Geraden Ia, IIa, IIIa, IVa gebildeten Vierseit sind also zwei Gegenecken im Kreise um BC als Durchmesser die Endpunkte i′ und I′ des zu BC senkrechten Durchmessers, zwei andere Gegenecken sind die Fusspunkte E und F der Höhenper- 106.
pendikel BE und CF des Stammdreiecks ABC, und das dritte Paar Gegenecken sind im Kreise um AH als Durchmesser die Endpunkte Va und Wa des zu AH senkrechten Durchmessers.

Eine Verifikation dieses Satzes erhalten wir wie folgt: Es ist EF die gemeinsame Sehne der Kreise um BC und um AH als Durchmesser, daher steht die Gerade $\mathfrak{A}\alpha$ senkrecht zu EF und geht durch die Mitte von EF. Die Mitten der drei Diagonalen I′ i′, EF, Va Wa des obigen Vierseits liegen somit in einer Geraden, w. s. s.

§ 15.

Betrachten wir neben dem obigen Vierseite noch die analogen, die sich respektive auf C A und A B beziehen, so schneiden sich also drei sich entsprechende Diagonalen der drei Vierseite im Umkreiszentrum O des Stammdreiecks, drei andere sich entsprechende Diagonalen bilden das Dreieck der Höhenfusspunkte des Stammdreiecks, und die drei übrigen sich entsprechenden Diagonalen bilden ein zum Stammdreieck paralleles und kongruentes Dreieck, das mit jenem Umkreiszentrum und Höhenpunkt gegenseitig vertauscht und gemeinsamen Neunpunktkreis hat; der Mittelpunkt dieses Neunpunktkreises ist das Ähnlichkeitszentrum der beiden Dreiecke.

Die Gleichungen für die Seiten der zu Ia, IIa, IIIa, IVa zwei analogen Vierseite erhalten wir aus 98 mittelst des Buchstabenrades:

$$\begin{array}{ll} \text{Gerade Ib} \;\ldots & x \sin A - y \cos B + z \cos C = 0 \\ \text{Gerade IIb} \;\ldots & x \cos A - y \cos B + z \sin C = 0 \\ \text{Gerade IIIb} \;\ldots & x \sin A + y \cos B - z \cos C = 0 \\ \text{Gerade IVb} \;\ldots & -x \cos A + y \cos B + z \sin C = 0, \end{array} \tag{98'}$$

und

Gerade Ic .. $x \cos A + y \sin B - z \cos C = 0$
Gerade IIc .. $x \sin A + y \cos B - z \cos C = 0$
Gerade IIIc .. $- x \cos A + y \sin B + z \cos C = 0$ 98″.
Gerade IVc .. $x \sin A - y \cos B + z \cos C = 0$.

Die Anschauung dieser Gleichungen 98, 98′, 98″ zeigt, dass von den entsprechenden zwölf Geraden je zwei miteinander identisch sind, so dass diese drei 107. Vierseite nur von sechs voneinander verschiedenen Geraden gebildet werden.

Diese sechs Geraden wollen wir jetzt mit g_a, g_a', g_b, g_b', g_c, g_c' bezeichnen, nämlich

g_a = Ib = IVc ... $x \sin A - y \cos B + z \cos C = 0$
g_a' = IIIb = IIc ... $x \sin A + y \cos B - z \cos C = 0$
g_b = Ic = IVa ... $x \cos A + y \sin B - z \cos C = 0$
g_b' = IIIc = IIa ... $- x \cos A + y \sin B + z \cos C = 0$ 108.
g_c = Ia = IVb ... $- x \cos A + y \cos B + z \sin C = 0$
g_c' = IIIa = IIb ... $x \cos A - y \cos B + z \sin C = 0$.

Es gehen

g_a und g_a' durch den Höhenfusspunkt D,
g_b und g_b' durch den Höhenfusspunkt E,
g_c und g_c' durch den Höhenfusspunkt F,

und man hat

Vierseit IVa IIa Ia IIIa = $g_b\, g_b'\, g_c\, g_c'$
Vierseit IVb IIb Ib IIIb = $g_c\, g_c'\, g_a\, g_a'$
Vierseit IVc IIc Ic IIIc = $g_a\, g_a'\, g_b\, g_b'$.

Die 15 Ecken des Sechsseits 108 sind die Höhenfusspunkte D, E, F des Stammdreiecks A B C, die Punkte i′ J′; k′, K′; l′, L′ auf den respektive um B C, C A, A B als Durchmesser beschriebenen Kreisen je die Endpunkte der zu 109. diesen Dreieckseiten senkrechten Durchmesser, und endlich die Punkte Va, Wa; Wb Ub; Uc, Vc, auf den um A H, B H, C H als Durchmesser beschriebenen Kreisen je die Endpunkte der zu diesen Höhenabschnitten senkrechten Durchmesser.

Stellen wir gemäss 33, 34, 35, 99, 100, 106 die Punkte zusammen, die auf den sechs Geraden g liegen, so finden wir:

Auf jeder der sechs Geraden g liegen neun ausgezeichnete Punkte, nämlich 110.

Gerade	Punkte				
g_a	D, k′, L′, Wb, Uc,	$\left\{\begin{matrix}R P' v\\ R' p' v'\end{matrix}\right.$,	$\left\{\begin{matrix}r' P v\\ r p v'\end{matrix}\right.$,	$\left\{\begin{matrix}P' q w\\ p' Q' w'\end{matrix}\right.$,	$\left\{\begin{matrix}r q' w\\ P Q w'\end{matrix}\right.$
g_a'	D, K′, l′, Ub, Vc,	$\left\{\begin{matrix}R' p v\\ R P v'\end{matrix}\right.$,	$\left\{\begin{matrix}r p' v\\ r' P' v'\end{matrix}\right.$,	$\left\{\begin{matrix}P Q' w\\ p q w'\end{matrix}\right.$,	$\left\{\begin{matrix}p' Q w\\ P' q' w'\end{matrix}\right.$
g_b	E, l′, J′ Uc, Va,	$\left\{\begin{matrix}P Q' w'\\ P' q' w'\end{matrix}\right.$,	$\left\{\begin{matrix}p' Q w\\ p q w'\end{matrix}\right.$,	$\left\{\begin{matrix}Q' r u\\ q' R' u'\end{matrix}\right.$,	$\left\{\begin{matrix}q r' u\\ Q R u'\end{matrix}\right.$
g_b'	E, L′, i′, Vc, Wa,	$\left\{\begin{matrix}P' q w\\ P Q w'\end{matrix}\right.$,	$\left\{\begin{matrix}p q' w\\ p' Q' w'\end{matrix}\right.$,	$\left\{\begin{matrix}Q R' u\\ q r u'\end{matrix}\right.$,	$\left\{\begin{matrix}q' R u\\ Q' r' u'\end{matrix}\right.$
g_c	F, i′, K′, Va, Wb,	$\left\{\begin{matrix}Q R' u\\ Q' r' u'\end{matrix}\right.$,	$\left\{\begin{matrix}q' R u\\ q r u'\end{matrix}\right.$,	$\left\{\begin{matrix}R' p v\\ r' P' v'\end{matrix}\right.$,	$\left\{\begin{matrix}r p' v\\ R P v'\end{matrix}\right.$
g_c'	F, J′ k′, Wa, Ub,	$\left\{\begin{matrix}Q' r u\\ Q R u'\end{matrix}\right.$,	$\left\{\begin{matrix}q r' u\\ q' R' u'\end{matrix}\right.$,	$\left\{\begin{matrix}R P' v\\ r p v'\end{matrix}\right.$,	$\left\{\begin{matrix}r' P v\\ R' p' v'.\end{matrix}\right.$

Wenn das Dreieck ABC stumpfwinklig wird, so werden auf diesen Geraden je die 4 letztangegebenen Punkte imaginär, die Geraden g selber aber und je die 5 erstangeführten Punkte auf denselben bleiben reell.

Durch den Höhenfusspunkt D gehen die Kreise um AC und um AB als Durchmesser; die Geraden D k′ und D K′, oder D L′ und D l′ sind daher zu einander senkrecht. Im Punkte D stehen also die Geraden g_a und g_a' zu einander senkrecht, und analog im Punkte E sind die Geraden 111. g_b und g_b', und im Punkte F sind die Geraden g_c und g_c' zu einander senkrecht.

Bilden wir aus den sechs Geraden g in der Reihenfolge $g_a\ g_b'\ g_c\ g_a'\ g_b\ g_c'$ ein einfaches Sechseck, so sind die aufeinanderfolgenden Ecken derselben die Punkte L′ i′ K′ l′ J′ k′, und die Verbindungslinien je zweier Gegenecken d. h. die Geraden L′ l′, i′ J′, K′ k′ schneiden sich in einem nämlichen Punkte, dem Umkreiszentrum O des Stammdreiecks.

Die sechs Geraden g sind also einem nämlichen Kegelschnitte G umschrieben. 112.

Da nun nach 111 in den Höhenfusspunkten des Stammdreiecks je zwei der Geraden g zu einander senkrecht stehen, so folgt: Der Neunpunktkreis des Stammdreiecks ist der Ort der Scheitel eines den Kegelschnitt G umgleitenden rechten Winkels. Der Kegelschnitt G ist somit konzentrisch zum Neunpunktkreise des Stamm- 113. dreiecks, und wenn α und β die halben Axen des Kegelschnittes G sind, so hat man je nachdem derselbe eine Ellipse oder eine Hyperbel ist $4\alpha^2 + 4\beta^2 = R^2$, oder $4\alpha^2 - 4\beta^2 = R^2$.

Im Neunpunktkreis seien D', E', F' die Diametralpunkte der Höhenfusspunkte D, E, F, oder die Punkte, wo die Geraden I' i', K' k', L' l' den Neunpunktkreis wiederum schneiden, so gehen durch D' die respektive zu g_a und g_a' parallelen Tangenten γ_a und γ_a' unseres Kegelschnittes, durch E' die respektive zu g_b und g_b' parallelen Tangenten γ_b und γ_b', und durch F' die respektive zu g_c und g_c' parallelen Tangenten γ_c und γ_c'.

Die Geraden g und γ zusammen bilden drei dem Neunpunktkreise eingeschriebene und dem Kegel- 114. schnitt G umschriebene Rechtecke.

Die Geraden γ bilden ein zu den Geraden g paralleles und kongruentes einfaches Sechseck, das den Höhenpunkt H des Stammdreiecks zum Brianchon'schen Punkte hat.

Diese Geraden γ haben zu einem zu ABC parallelen und kongruenten Dreieck, das mit diesem gemeinsamen Neunpunktkreis aber Umkreiszentrum und Höhenpunkt vertauscht hat, und dessen Seiten 115. auf den Geraden $V_a W_a$, $W_b U_b$, $U_c V_c$ liegen, dieselben Beziehungen wie die Geraden g zum Stammdreieck ABC.

Es ist nun leicht, Tangenten von G in beliebiger Anzahl zu konstruieren: Sei z. B. w ein variabler Punkt der Geraden $I'i'$, so möge $k'w$ die Gerade g_c in Z, und $L'w$ die Gerade g_b in Y schneiden, so ist YZ eine variable Tangente von G. Oder es möge $K'w$ die gerade g_c' in Z', und $l'w$ die Gerade g_b' in Y' schneiden, so ist auch $Y'Z'$ eine variable Tangente von G. 116.

Das Buchstabenrad ergibt hieraus analoge Konstruktionen von Tangenten von G, wenn wir w die Gerade $K'k'$ oder die Gerade $L'l'$ durchlaufen lassen.

Lassen wir in 116 Z in den Schnittpunkt von g_b und g_c rücken, so geht Y in den Berührungspunkt β von g_b über. Oder lassen wir Y in den Schnittpunkt von g_b und g_c rücken, so geht Z in den Berührungspunkt γ von g_c über.

Der Strahl, der den Schnittpunkt Va von g_b und g_c mit k' verbindet, schneide also $i'I'$ in w, so trifft $L'w$ die Gerade g_b in ihrem Berührungspunkt β. Und wenn der 117.
Strahl, der den Schnittpunkt Va von g_b und g_c mit L' verbindet, $i'I'$ in w schneidet, so trifft $k'w$ die Gerade g_c in ihrem Berührungspunkt γ.

Analog werde $i'I'$ vom Strahl, der den Schnittpunkt Wa von g_b' und g_c' mit K' verbindet in w geschnitten, so trifft $l'w$ die Gerade g_b' in ihrem Berührungspunkt β'. 117'.
Und wenn der Strahl, der den Schnittpunkt Wa von g_b' und g_c' mit l' verbindet, $i'I'$ in w schneidet, so trifft $K'w$ die Gerade g_c' in ihrem Berührungspunkte γ'.

Endlich möge der Strahl, der i' mit dem Schnittpunkt Uc von g_a und g_b verbindet, $l'L'$ in w schneiden, so trifft $K'w$ die Gerade g_a in ihrem Berührungspunkt α. 117''.
Und wenn der Strahl, der I' mit dem Schnittpunkt Vc von g_a' und g_b' verbindet $l'L'$ in w schneidet so trifft $k'w$ die Gerade g_a' in ihrem Berührungspunkte α'.

Da wir ferner den Mittelpunkt μ des Kegelschnittes G kennen, so ergeben die Berührungspunkte der Geraden g unmittelbar auch die Berührungspunkte der hiezu parallelen Geraden γ.

Auch die Berührungspunkte der in 116 konstruierten variabeln Tangenten YZ und $Y'Z'$ ergeben sich in ein-

facher Weise: Der Strahl, der I′ mit dem Schnittpunkt von YZ und g_b' verbindet, schneide YL′ in w, so trifft k′w die Gerade YZ in ihrem Berührungspunkte. 118.
Oder der Strahl, der i′ mit dem Schnittpunkte von Y′Z′ und g_b verbindet, schneide′ Yl′ in w, so trifft K′w die Gerade Y′Z′ in ihrem Berührungspunkte.

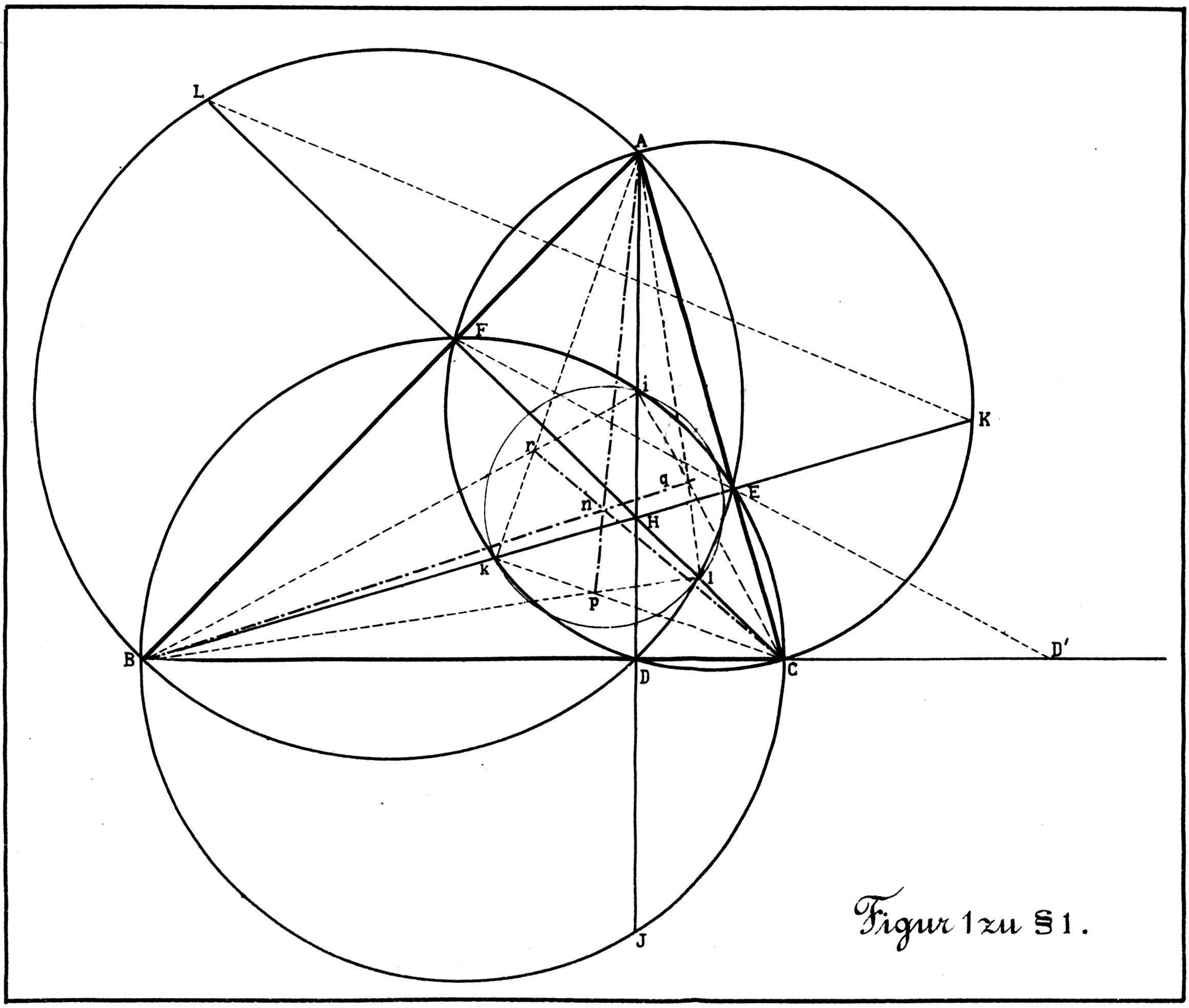
Haben wir den Berührungspunkt irgend einer Tangente G konstruiert z. B. den Berührungspunkt α der Geraden g_a, so ist $\mu\alpha$ ein Halbmesser von G, und ziehen wir durch den Mittelpunkt μ zu g_a eine Parallele, so liegen auf dieser die zu $\mu\alpha$ konjugierten Halbmesser. Sei $\mu\alpha = u$ und bezeichnen wir den hiezu konjugierten Halbmesser mit v, so ist v gegeben durch $u^2 + v^2 = \varrho^2$, wo ϱ der Radius des Neunpunktkreises. Es ist somit v^2 gleich der mit entgegengesetztem Zeichen genommenen Potenz des Berührungspunktes α von g_a in Bezug auf den Neunpunktkreis.

Wir erhalten so nach Grösse und Richtung zwei konjugierte Halbmesser von G, und können schliesslich nach Grösse und Richtung die Axen des Kegelschnittes G konstruieren. 119.

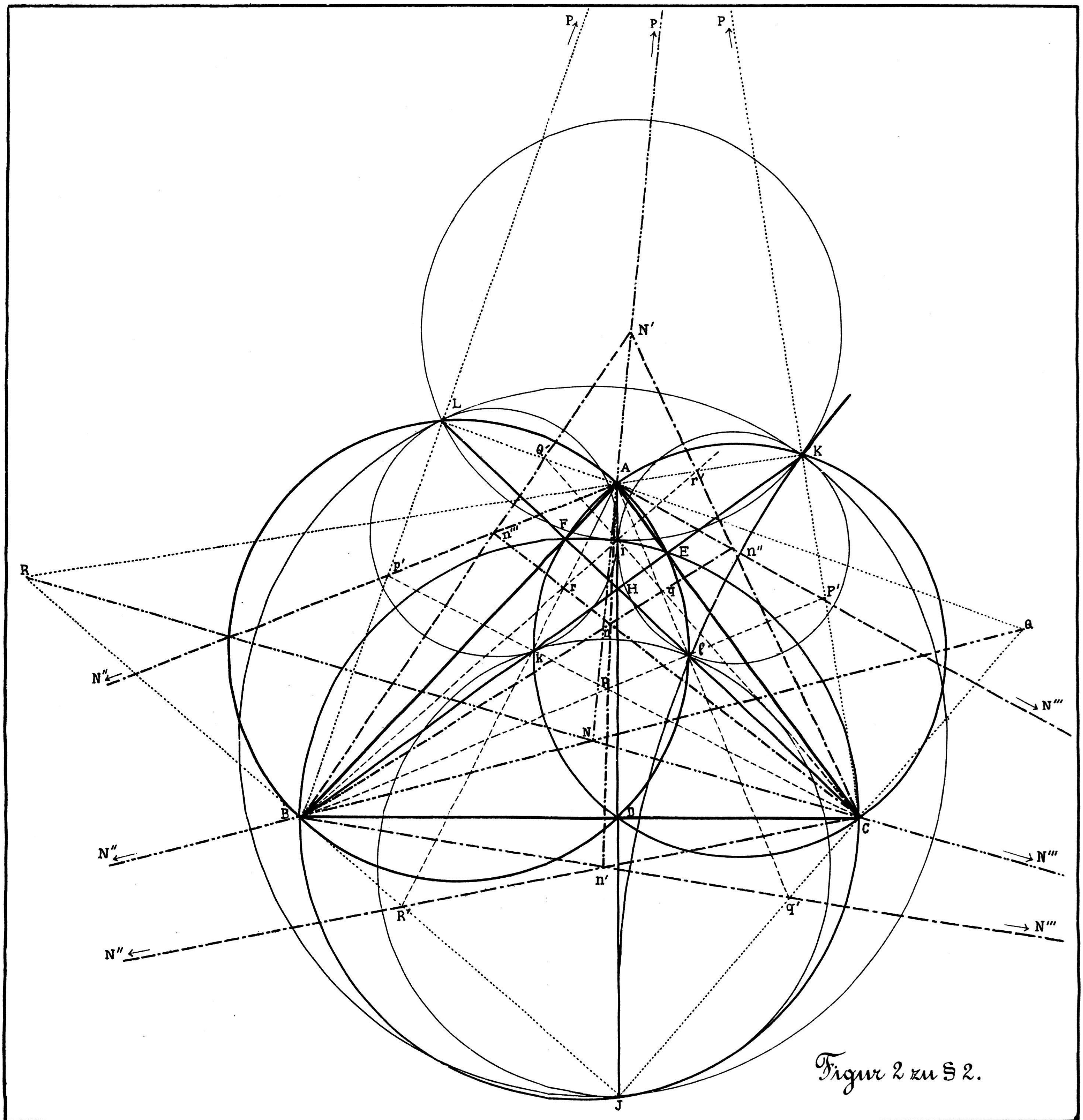
Wenn ein Winkel des Stammdreiecks ABC gleich 45^0 ist, so geht der Kegelschnitt G in die Gerade über, welche die Höhenfusspunkte, die auf den jenen Winkel einschliessenden Seiten liegen, miteinander verbindet, s. 102 und 103. Durch jeden dieser beiden Fusspunkte gehen dann je sechs von den 12 Geraden g und γ. Wenn alle Winkel des Dreiecks 120.
ABC grösser als 45^0 sind, oder was auf dasselbe herauskommt, wenn das Dreieck i′k′l′, ganz innerhalb des Dreiecks ABC liegt, so ist G eine Ellipse. Wenn aber ein Winkel von ABC kleiner als 45^0 ist, so ist der Kegelschnitt G eine Hyperbel.

23. Februar 1902.

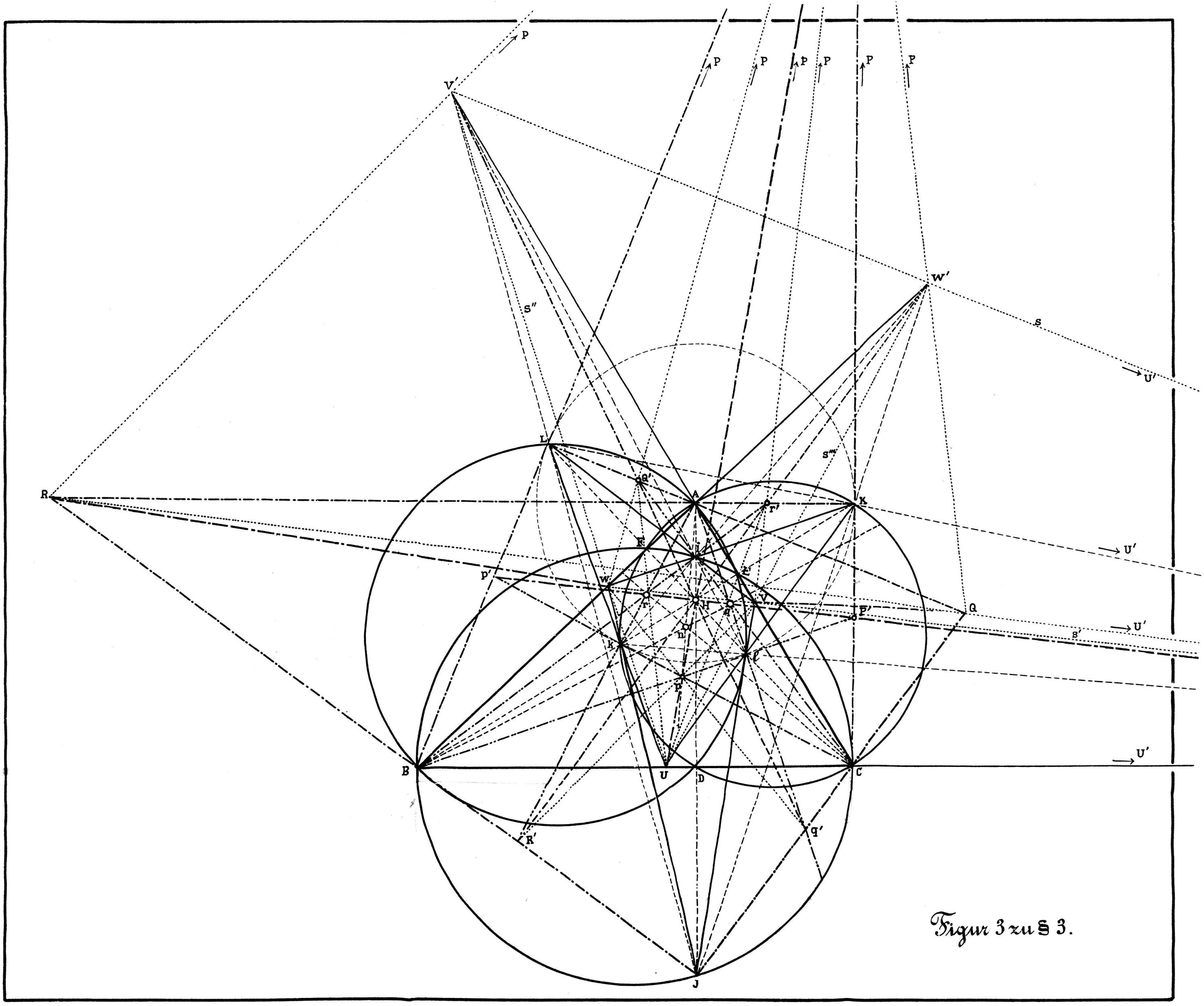
Corrigenda: Seite 231, Zeile 14 lies **p. 53.**
Seite 243, Schluss v. Absatz lies **H n‴ N‴**, statt n‴ N‴.



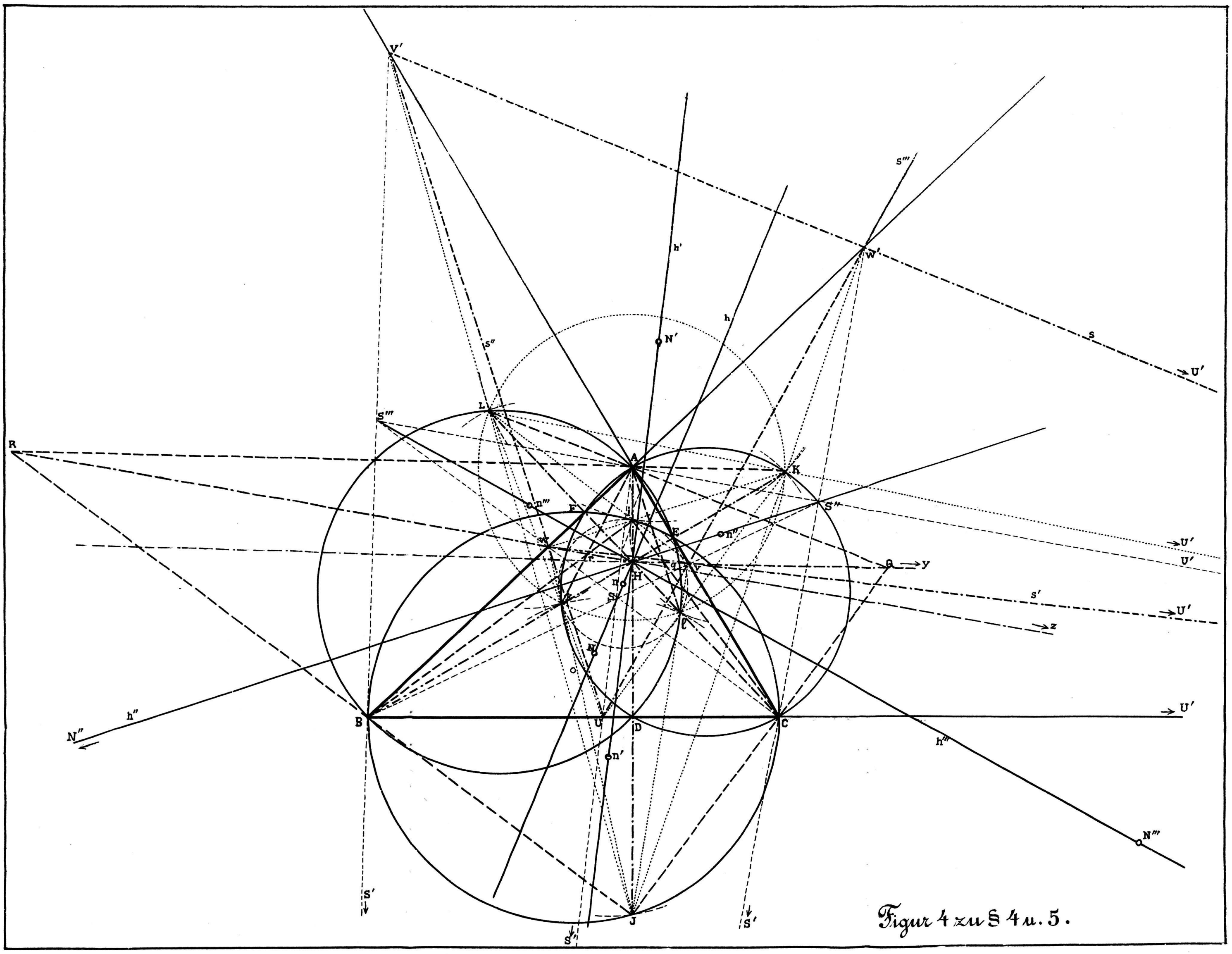
Figur 1 zu § 1.



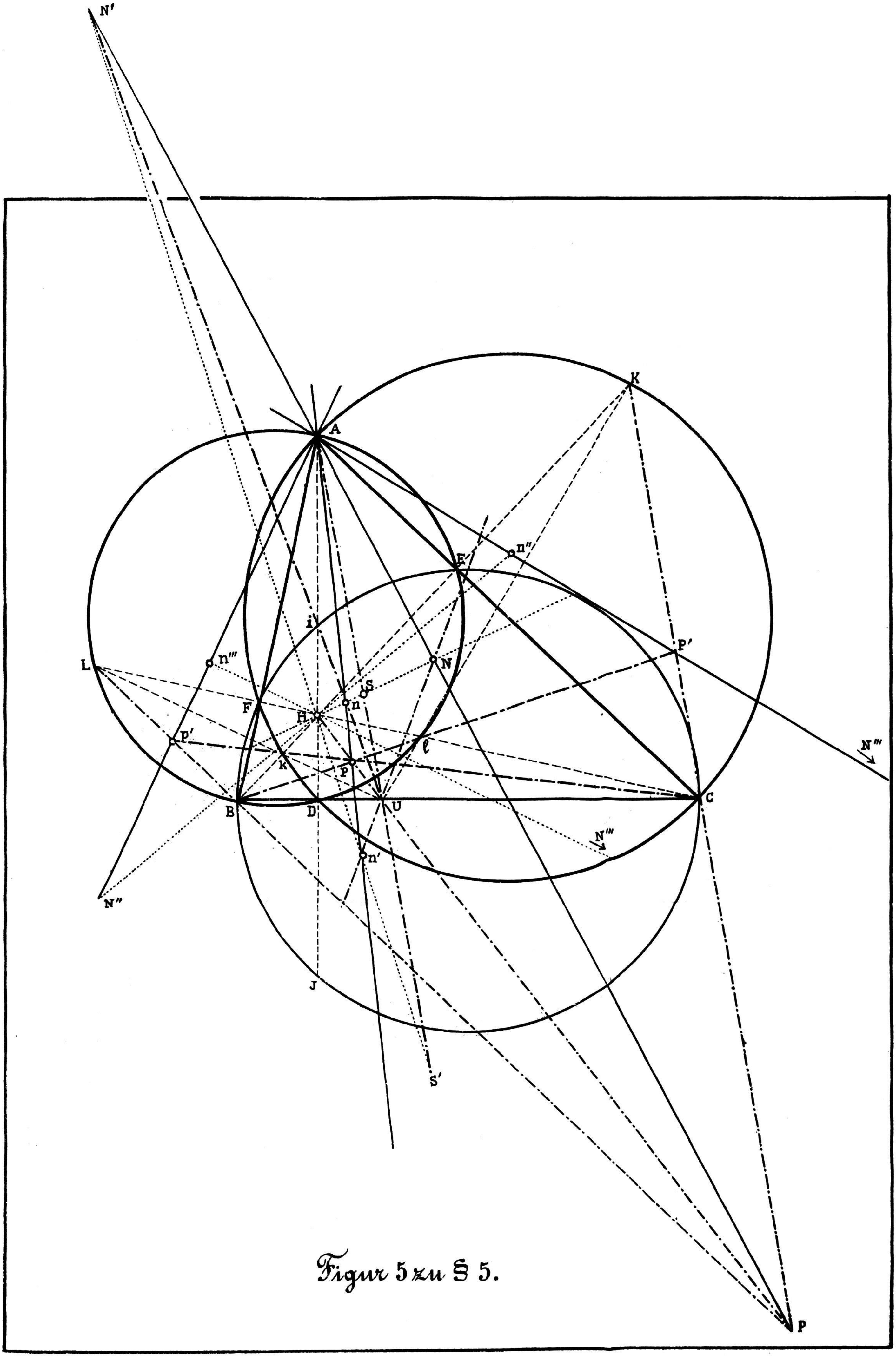
Figur 2 zu § 2.



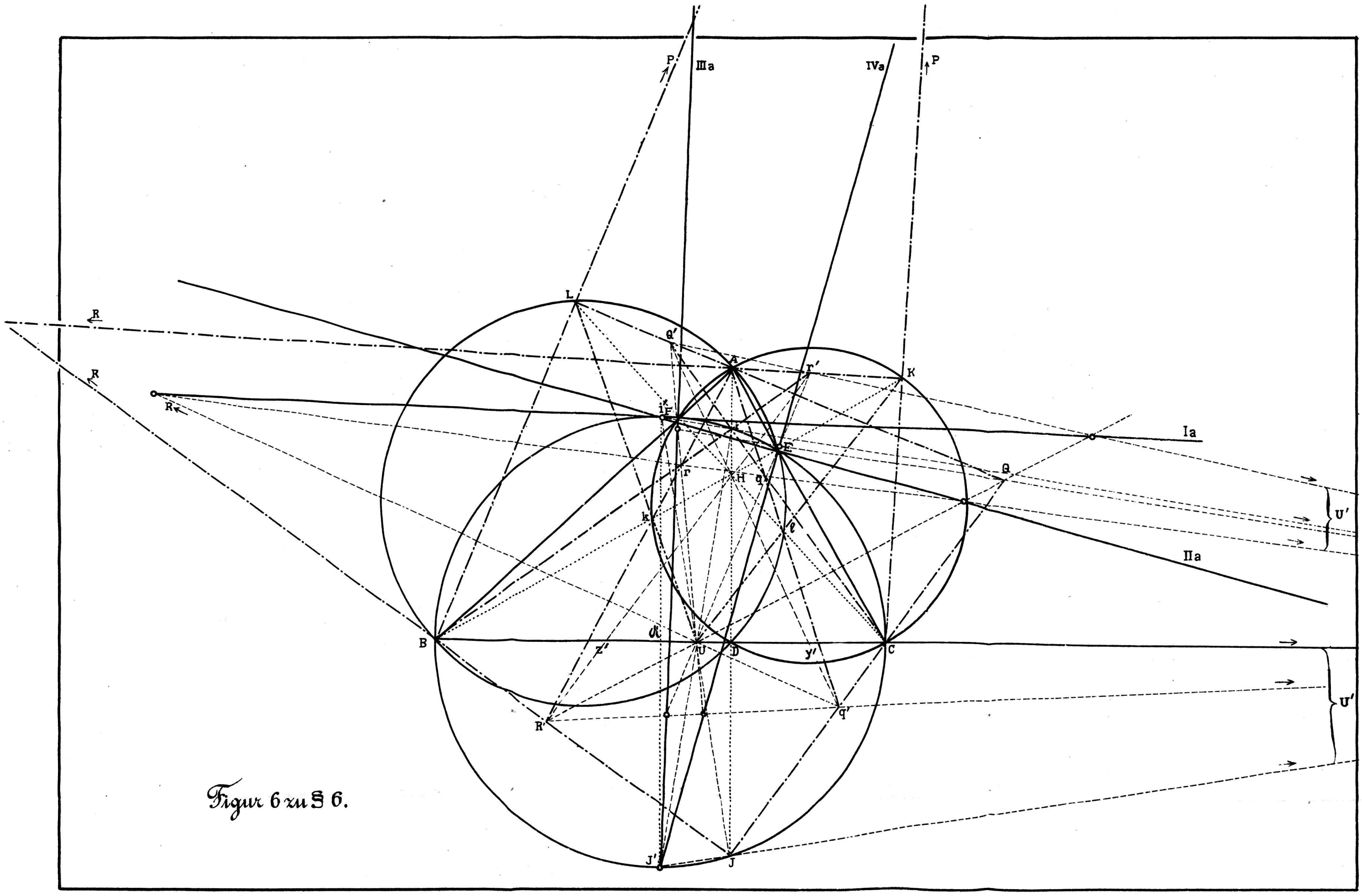
Figur 3 zu § 3.



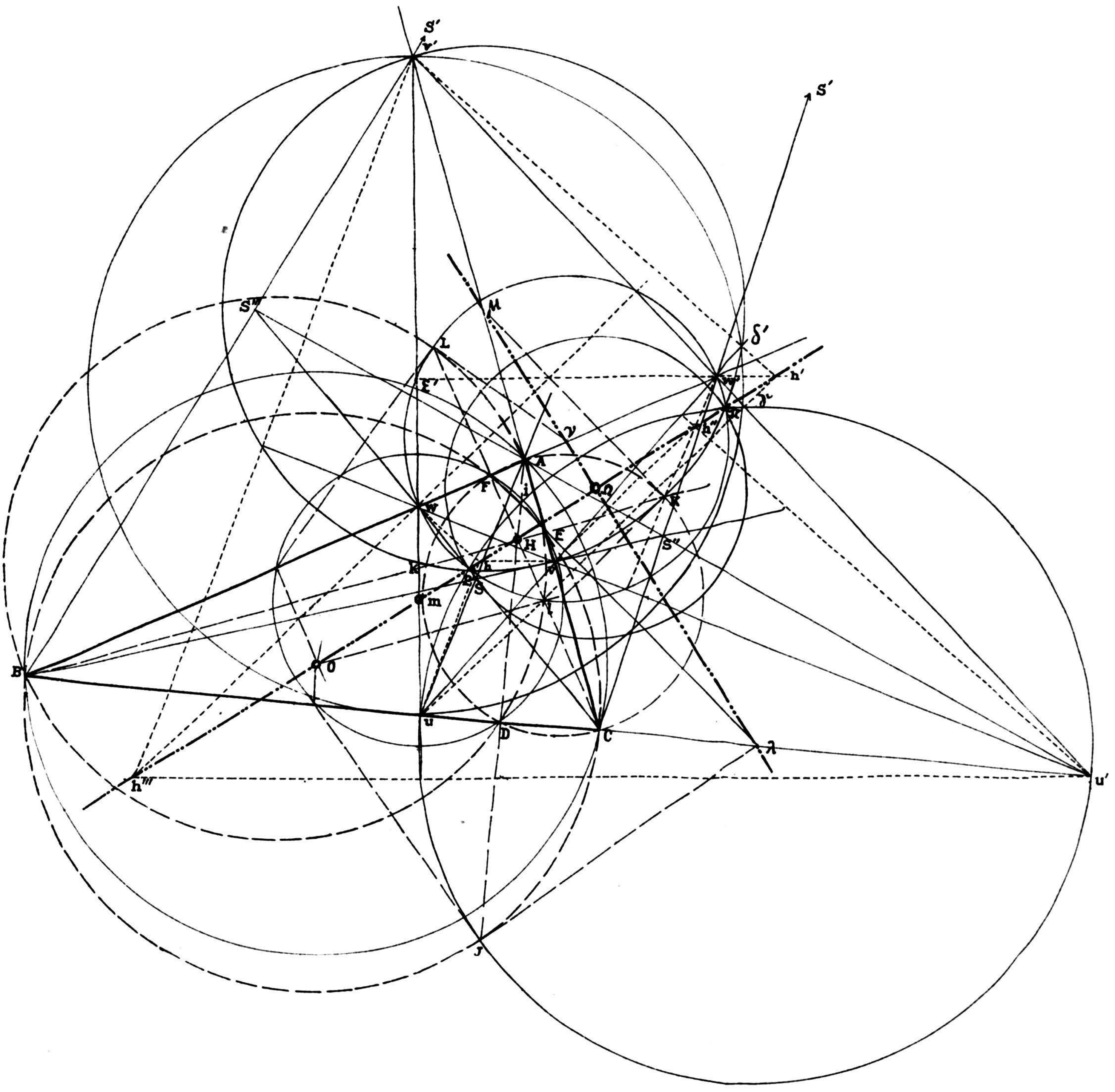
Figur 4 zu § 4 u. 5.



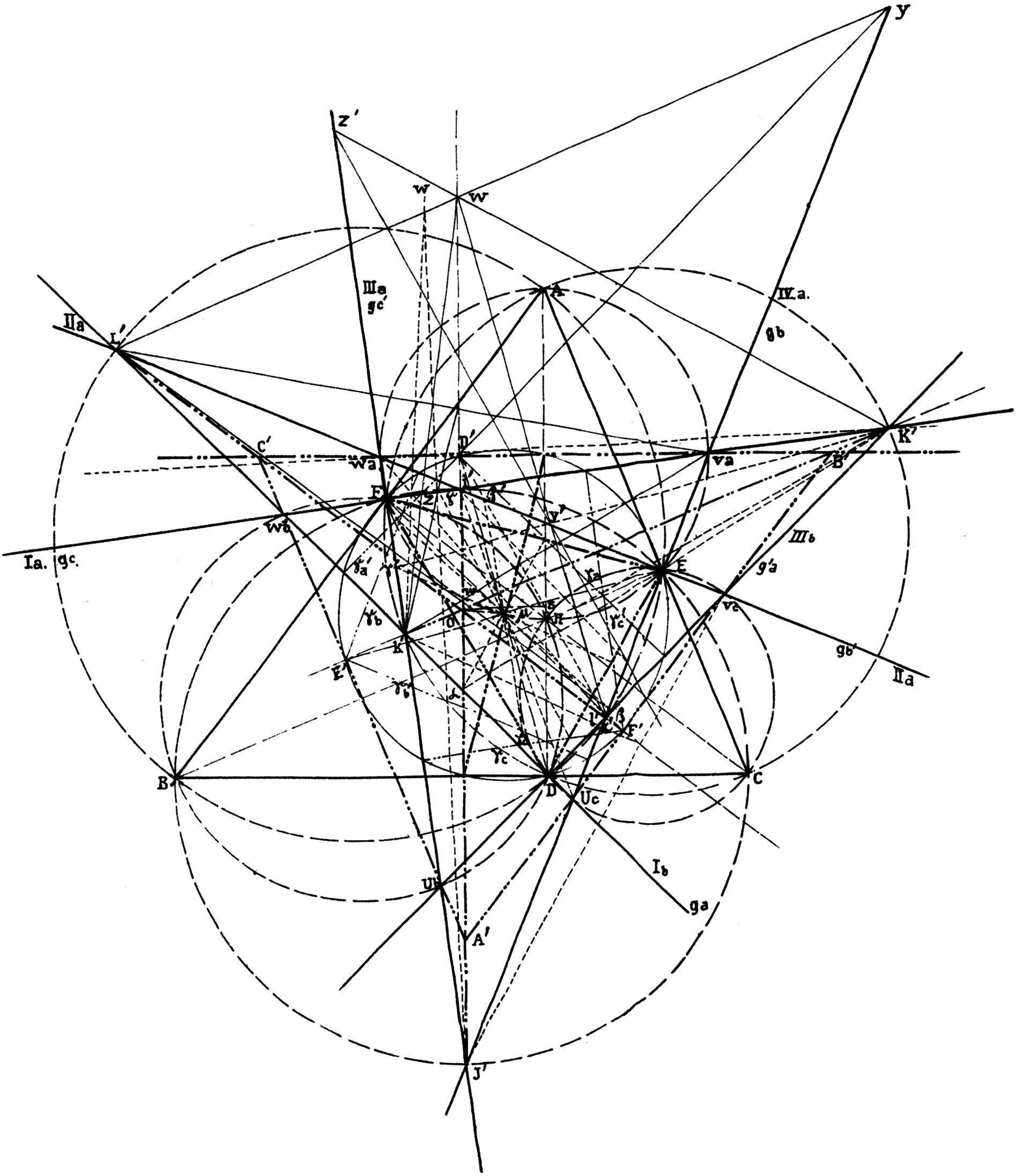
Figur 5 zu § 5.



Figur 6 zu § 6.



Figur 7 zu § 12.



Figur 8 zu § 14-15.