Die verschiedenen Flächenarten des Rotationsflächensystems

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1911)**

PDF erstellt am: **28.06.2024**

Nun ist noch die Determinante $\triangle$ zu berechnen; nach Gleichung (1) wird sie

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1-k^2 \cdot 0 & \cdot\, 0 \cdot -s \\ 0 \quad \cdot\, 1-k^2 . & 0 \cdot \quad 0 \\ 0 \quad \cdot \quad 0 & \cdot\, 1 \cdot \quad 0 \\ -s \quad \cdot \quad 0 & \cdot\, 0 \cdot \quad s^2 \end{vmatrix}$$

oder ausgerechnet

$$\triangle = s^2 (1-k^2)^2 - s^2 (1-k^2) = - s^2 k^2 (1-k^2)$$

Nach der Transformation hat dann die Flächengleichung (1) die folgende Form:

$$f(x' y' z') = a_{11} x'^2 + a_{22} y'^2 + a_{33} z'^2 + 2 a_{12} x' y' + 2 a_{23} y' z' + 2 a_{13} x' z' + \frac{\triangle}{\delta} = 0$$

Setzt man die Werte der Koëffizienten, sowie diejenigen für $\triangle$ und δ ein, so folgt:

$$f(x' y' z') = (1-k^2) x'^2 + (1-k^2) y'^2 + z'^2 - \frac{s^2 k^2}{1-k^2} = 0$$

oder

$$\frac{x'^2}{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{y'^2}{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{z'^2}{\frac{s^2 k^2}{1-k^2}} = 1 \qquad (2)$$

Der gesuchte Ort des Punktes P ist also eine Rotationsfläche zweiter Ordnung, deren Mittelpunkt auf der (x)-Achse im Abstand $x = \frac{s}{1-k^2}$ von O liegt, und deren Rotationsachse parallel der (z)-Achse ist. Ihre Halbachsen sind

$$a = b = \frac{s k}{1-k^2} \quad \text{und} \quad c = \frac{s k}{\sqrt{1-k^2}}$$

§ 2.

Die verschiedenen Flächenarten des Rotationsflächensystems.

Die auf die Achsen transformierte Flächengleichung (2), die den Parameter k enthält, stellt eine Schar von unendlich vielen Rotationsflächen 2. Grades dar. Je nachdem nun $k \lesseqgtr 1$ ist, hat man es entweder mit einem Rotationsellipsoïd, einem parabolischen Zylinder oder mit einem einschaligen Rotationshyperboloïd zu tun. Dies soll in einem kurzen Abschnitt etwas ausgeführt werden.

1. Fall: $k < 1$.

also $m < n$

In diesem Fall werden sämtliche Nenner der Flächengleichung (2) immer einen positiven Wert haben, und wir schreiben die Gleichung zur Abkürzung in der Form:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1 \tag{3}$$

Dies ist die Gleichung eines Rotationsellipsoïdes.

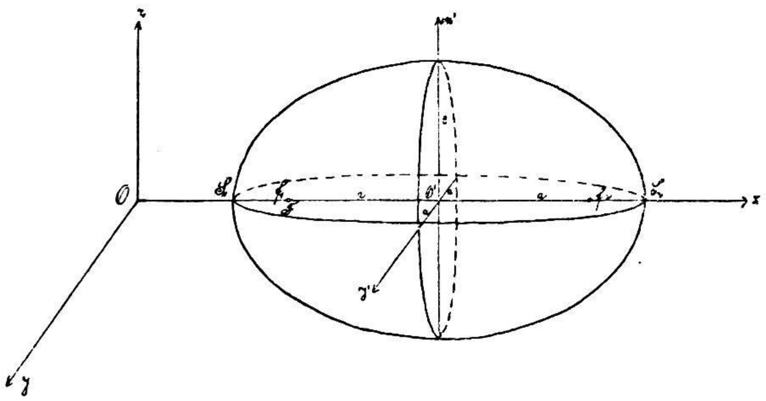

Fig. 2.

Die Halbachsen desselben sind $a = b = \frac{s\,k}{1 - k^2}$ und $c = \frac{s\,k}{\sqrt{1 - k^2}}$; a ist immer grösser als c. Die Rotationsachse der Fläche steht senkrecht auf der (x y)-Ebene, ihr Mittelpunkt liegt auf der (x)-Achse; sein Abstand vom Koordinatenursprung O beträgt $a_0 = \frac{s}{1 - k^2}$. Da k alle Werte zwischen 0 und 1 durchlaufen kann, so fällt O′ je nach der Grösse des Parameters mit irgend einem Punkte der positiven (x)-Achse zwischen + s und ∞ zusammen.

Nun ist $\frac{s}{1 - k^2} > \frac{s\,k}{1 - k^2}$ oder $a_0 > a$, d. h. der alte Koordinatenursprung O liegt ausserhalb der Fläche. (S. Fig. 2).

2. Fall: $k > 1$

also $m > n$

Dann nimmt die Gleichung (2) die Form an:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1 \tag{4}$$

und stellt ein einschaliges Rotationshyperboloïd dar.

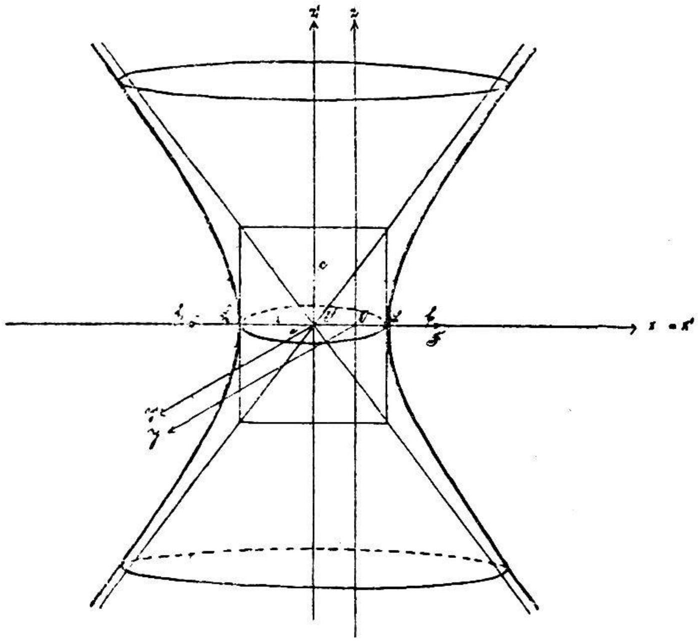

Fig. 3.

Die Rotationsachse steht senkrecht auf der (xy)-Ebene. Die (z')-Achse schneidet die Fläche nicht, die in ihr liegende imaginäre Halbachse hat die Länge $c = \frac{s\,k}{\sqrt{k^2 - 1}}$, die Länge der Halbachse $a = b = \frac{s\,k}{k^2 - 1}$

$$\begin{array}{lll} \text{wo } c > a & \text{wenn} & k > \sqrt{2} \\ c = a & \text{„} & k = \sqrt{2} \\ \text{und } c < a & \text{„} & k < \sqrt{2} \end{array}$$

Der Abstand des Mittelpunktes O' vom Ursprung O beträgt $a_0 = \frac{s}{1 - k^2} = - \frac{s}{k^2 - 1}$, er liegt auf der negativen (x)-Achse.

Ferner ist $\frac{s\,k}{1 - k^2} > \frac{s}{1 - k^2}$ oder $a > a_0$, d. h. der alte Koordinatenursprung O liegt also innerhalb der Rotationsfläche. (S. Fig. 3).

3. Fall: $k = 1$

also $m = n$

Setzt man in der Gleichung (1) für k den Wert 1 ein, so wird sie:

$$z^2 - 2\,s\,x + s^2 = 0 \qquad (5)$$

Die Determinante δ wird in diesem Falle

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 \cdot 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 \cdot 1 \end{vmatrix} = 0$$

Der neue Mittelpunkt O' liegt daher im Unendlichen, und eine Transformation der obigen Gleichung auf den Mittelpunkt der Fläche ist nicht möglich. Wir substituieren für $z = z'$, $y = y'$ und $x = x' + \frac{s}{2}$.

Dann geht die Gleichung (5) über in

$$z'^2 = 2\,s\,x' \qquad (6)$$

Dies ist nun die Scheitelgleichung eines parabolischen Zylinders, dessen Erzeugende parallel der (y)-Achse sind. Der Halbparameter $p = s$, der Abstand des Scheitels S von der Leit-

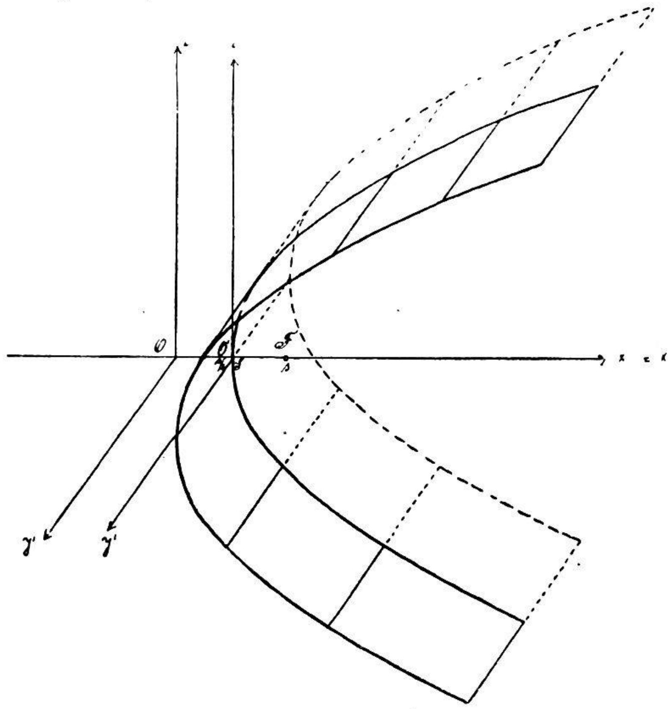

Fig. 4.

linie $= \frac{s}{2}$ und dieser ist gleich der Entfernung des neuen Koordinatenursprunges O′ vom alten O; also ist die (z)-Achse die Leitlinie der Parabel in der (xz)-Ebene.

Ferner liegt der Scheitel S in der Mitte zwischen O und F, also ist F zugleich der Brennpunkt der Schnittparabel mit der (xz)-Ebene. Die Ebene $x = \frac{s}{2}$ ist Scheiteltangentialebene des parabolischen Cylinders. (S. Fig. 4).

§ 3.
Der Ort der Mittelpunkte, Scheitel und Brennpunkte des Rotationsflächensystems bei variablem k.

Nach § 1 liegt der Mittelpunkt O′ der durch Gleichung (1) dargestellten Flächen 2. Grades immer auf der (x)-Achse; sein Abstand vom Nullpunkt $= a_0 = \frac{s}{1 - k^2}$. Setzen wir für k nacheinander alle zwischen 0 und ∞ liegenden Werte ein, so ändert sich die Lage des Mittelpunktes O′ folgenderweise:

k	a_0
0	s
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$2s$
1	$\pm\infty$
∞	0

Für den Parameterwert $k = 0$ befindet sich der Flächenmittelpunkt O′ im Punkte F; bei wachsendem k bewegt er sich auf der positiven (x)-Achse ins Unendliche, für $k = 1$ geht er im Unendlichen auf den negativen Teil der (x)-Achse über und nähert sich dann bei weiter zunehmendem k wieder dem Ursprung O, den er erreicht, wenn man k den Wert ∞ gibt. Alle Punkte der positiven und negativen (x)-Achse können für einen bestimmten Wert von k Mittelpunkt einer Fläche der Schar werden, ausgenommen diejenigen innerhalb der Strecke OF.

Wenn man zunächst vom Spezialfall $k = 1$ absieht, so stellt die Gleichung (1) für jeden beliebigen Parameter k eine Rotationsfläche 2. Ordnung dar, deren Rotationsachse senkrecht auf der (xy)-Ebene steht. Die Lage ihrer Scheitel in der (x)-Achse wird gefunden, wenn man in der Flächengleichung (1) $y = z = 0$ setzt. Dann erhält man die quadratische Gleichung

$$(1 - k^2)\,x^2 - 2sx + s^2 = 0.$$