Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1911)

Artikel: Diskussion eines Systems von Rotationsflächen 2. Grades
Autor: Meyer, Friedrich
Kapitel: 2: Die verschiedenen Flächenarten des Rotationsflächensystems
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319219

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Nun ist noch die Determinante $\triangle$ zu berechnen; nach Gleichung (1) wird sie

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1-k^2 & 0 & 0 & -s \\ 0 & 1-k^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & 0 & s^2 \end{vmatrix}$$

oder ausgerechnet

$$\triangle = s^2 (1-k^2)^2 - s^2 (1-k^2) = -s^2 k^2 (1-k^2)$$

Nach der Transformation hat dann die Flächengleichung (1) die folgende Form:

$$f(x'y'z') = a_{11} x'^2 + a_{22} y'^2 + a_{33} z'^2 + 2 a_{12} x'y' + 2 a_{23} y'z' + 2 a_{13} x'z' + \frac{\triangle}{\delta} = 0$$

Setzt man die Werte der Koëffizienten, sowie diejenigen für $\triangle$ und δ ein, so folgt:

$$f(x'y'z') = (1-k^2) x'^2 + (1-k^2) y'^2 + z'^2 - \frac{s^2 k^2}{1-k^2} = 0$$

oder

$$\frac{x'^2}{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{y'^2}{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{z'^2}{\frac{s^2 k^2}{1-k^2}} = 1 \qquad (2)$$

Der gesuchte Ort des Punktes P ist also eine Rotationsfläche zweiter Ordnung, deren Mittelpunkt auf der (x)-Achse im Abstand $x = \frac{s}{1-k^2}$ von O liegt, und deren Rotationsachse parallel der (z)-Achse ist. Ihre Halbachsen sind

$$a = b = \frac{sk}{1-k^2} \quad \text{und} \quad c = \frac{sk}{\sqrt{1-k^2}}$$

§ 2.

Die verschiedenen Flächenarten des Rotationsflächensystems.

Die auf die Achsen transformierte Flächengleichung (2), die den Parameter k enthält, stellt eine Schar von unendlich vielen Rotationsflächen 2. Grades dar. Je nachdem nun $k \lesseqgtr 1$ ist, hat

man es entweder mit einem Rotationsellipsoïd, einem parabolischen Zylinder oder mit einem einschaligen Rotationshyperboloïd zu tun. Dies soll in einem kurzen Abschnitt etwas ausgeführt werden.

1. Fall: $k < 1$.

also $m < n$

In diesem Fall werden sämtliche Nenner der Flächengleichung (2) immer einen positiven Wert haben, und wir schreiben die Gleichung zur Abkürzung in der Form:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1 \qquad (3)$$

Dies ist die Gleichung eines Rotationsellipsoïdes.

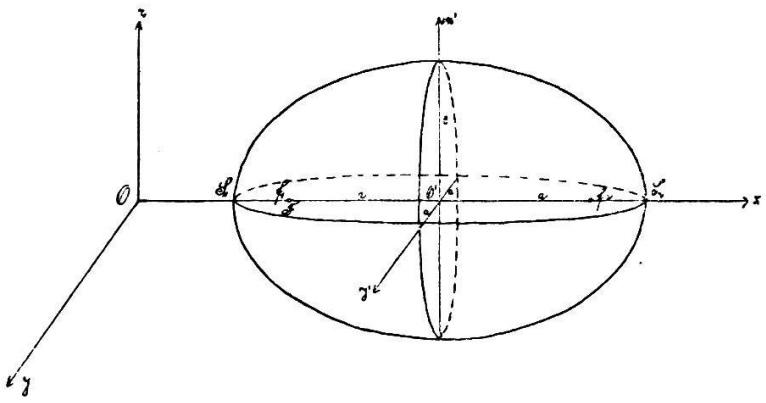

Fig. 2.

Die Halbachsen desselben sind $a = b = \frac{s\,k}{1 - k^2}$ und $c = \frac{s\,k}{\sqrt{1 - k^2}}$; a ist immer grösser als c. Die Rotationsachse der Fläche steht senkrecht auf der (x y)-Ebene, ihr Mittelpunkt liegt auf der (x)-Achse; sein Abstand vom Koordinatenursprung O beträgt $a_0 = \frac{s}{1 - k^2}$. Da k alle Werte zwischen 0 und 1 durchlaufen kann, so fällt O′ je nach der Grösse des Parameters mit irgend einem Punkte der positiven (x)-Achse zwischen $+ s$ und ∞ zusammen.

Nun ist $\frac{s}{1 - k^2} > \frac{s\,k}{1 - k^2}$ oder $a_0 > a$, d. h. der alte Koordinatenursprung O liegt ausserhalb der Fläche. (S. Fig. 2).

2. Fall: $k > 1$

also $m > n$

Dann nimmt die Gleichung (2) die Form an:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1 \qquad (4)$$

und stellt ein einschaliges Rotationshyperboloïd dar.

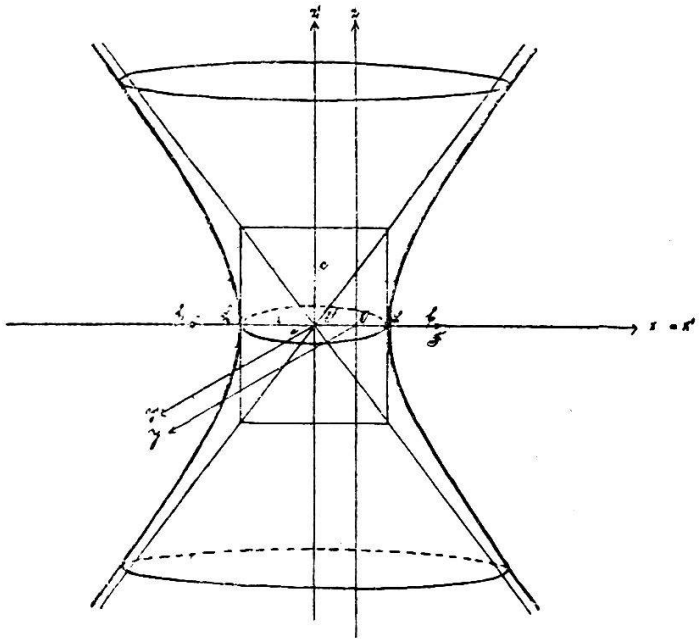

Fig. 3.

Die Rotationsachse steht senkrecht auf der (xy)-Ebene. Die (z')-Achse schneidet die Fläche nicht, die in ihr liegende imaginäre Halbachse hat die Länge $c = \frac{s\,k}{\sqrt{k^2 - 1}}$, die Länge der Halbachse $a = b = \frac{s\,k}{k^2 - 1}$

wo $c > a$ wenn $k > \sqrt{2}$
$c = a$ „ $k = \sqrt{2}$
und $c < a$ „ $k < \sqrt{2}$

Der Abstand des Mittelpunktes O' vom Ursprung O beträgt $a_0 = \frac{s}{1 - k^2} = -\frac{s}{k^2 - 1}$, er liegt auf der negativen (x)-Achse. Ferner ist $\frac{s\,k}{1 - k^2} > \frac{s}{1 - k^2}$ oder $a > a_0$, d. h. der alte Koordinatenursprung O liegt also innerhalb der Rotationsfläche. (S. Fig. 3).

3. Fall: $k = 1$

also $m = n$

Setzt man in der Gleichung (1) für k den Wert 1 ein, so wird sie:

$$z^2 - 2\,sx + s^2 = 0 \qquad (5)$$

Die Determinante δ wird in diesem Falle

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 \cdot 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 \cdot 1 \end{vmatrix} = 0$$

Der neue Mittelpunkt O′ liegt daher im Unendlichen, und eine Transformation der obigen Gleichung auf den Mittelpunkt der Fläche ist nicht möglich. Wir substituieren für $z = z'$, $y = y'$ und $x = x' + \frac{s}{2}$.

Dann geht die Gleichung (5) über in

$$z'^2 = 2\,s\,x' \qquad (6)$$

Dies ist nun die Scheitelgleichung eines parabolischen Zylinders, dessen Erzeugende parallel der (y)-Achse sind. Der Halbparameter $p = s$, der Abstand des Scheitels S von der Leit-

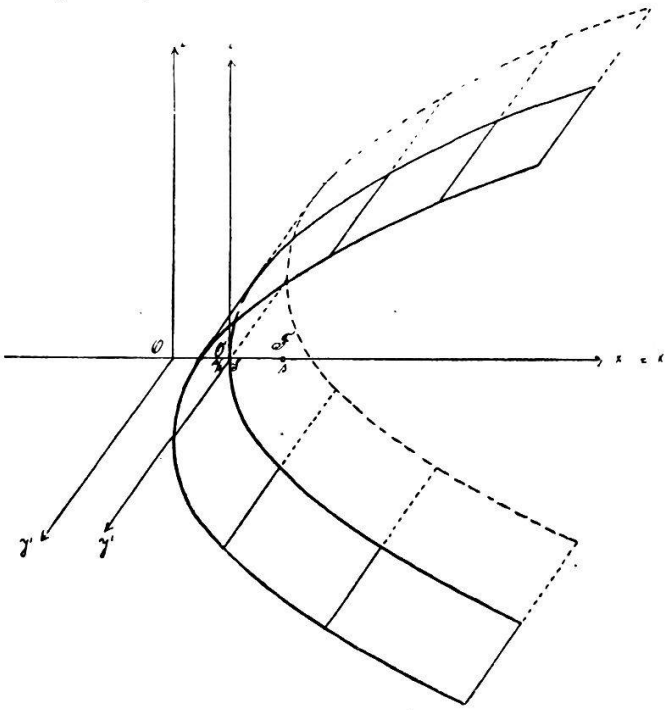

Fig. 4.

linie $= \frac{s}{2}$ und dieser ist gleich der Entfernung des neuen Koor-

dinatenursprunges O′ vom alten O; also ist die (z)-Achse die Leitlinie der Parabel in der (xz)-Ebene.

Ferner liegt der Scheitel S in der Mitte zwischen O und F, also ist F zugleich der Brennpunkt der Schnittparabel mit der (xz)-Ebene. Die Ebene $x = \frac{s}{2}$ ist Scheiteltangentialebene des parabolischen Cylinders. (S. Fig. 4).

§ 3.
Der Ort der Mittelpunkte, Scheitel und Brennpunkte des Rotationsflächensystems bei variablem k.

Nach § 1 liegt der Mittelpunkt O′ der durch Gleichung (1) dargestellten Flächen 2. Grades immer auf der (x)-Achse; sein Abstand vom Nullpunkt $= a_0 = \frac{s}{1-k^2}$. Setzen wir für k nacheinander alle zwischen 0 und ∞ liegenden Werte ein, so ändert sich die Lage des Mittelpunktes O′ folgenderweise:

k	a_0
o	s
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	2s
1	$\pm\infty$
∞	0

Für den Parameterwert $k = 0$ befindet sich der Flächenmittelpunkt O′ im Punkte F; bei wachsendem k bewegt er sich auf der positiven (x)-Achse ins Unendliche, für $k = 1$ geht er im Unendlichen auf den negativen Teil der (x)-Achse über und nähert sich dann bei weiter zunehmendem k wieder dem Ursprung O, den er erreicht, wenn man k den Wert ∞ gibt. Alle Punkte der positiven und negativen (x)-Achse können für einen bestimmten Wert von k Mittelpunkt einer Fläche der Schar werden, ausgenommen diejenigen innerhalb der Strecke OF.

Wenn man zunächst vom Spezialfall $k = 1$ absieht, so stellt die Gleichung (1) für jeden beliebigen Parameter k eine Rotationsfläche 2. Ordnung dar, deren Rotationsachse senkrecht auf der (xy)-Ebene steht. Die Lage ihrer Scheitel in der (x)-Achse wird gefunden, wenn man in der Flächengleichung (1) $y = z = 0$ setzt. Dann erhält man die quadratische Gleichung

$$(1-k^2)\,x^2 - 2sx + s^2 = 0.$$