Der Ort der Mittelpunkte, Scheitel und Brennpunkte des Rotationsflächensystems bei variablem k

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1911)**

PDF erstellt am: **10.07.2024**

dinatenursprunges O' vom alten O; also ist die (z)-Achse die Leitlinie der Parabel in der (xz)-Ebene.

Ferner liegt der Scheitel S in der Mitte zwischen O und F, also ist F zugleich der Brennpunkt der Schnittparabel mit der (xz)-Ebene. Die Ebene $x = \frac{s}{2}$ ist Scheiteltangentialebene des parabolischen Cylinders. (S. Fig. 4).

§ 3.
Der Ort der Mittelpunkte, Scheitel und Brennpunkte des Rotationsflächensystems bei variablem k.

Nach § 1 liegt der Mittelpunkt O' der durch Gleichung (1) dargestellten Flächen 2. Grades immer auf der (x)-Achse; sein Abstand vom Nullpunkt $= a_0 = \frac{s}{1-k^2}$. Setzen wir für k nacheinander alle zwischen 0 und ∞ liegenden Werte ein, so ändert sich die Lage des Mittelpunktes O' folgenderweise:

k	a_0
o	s
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$2s$
1	$\pm\infty$
∞	0

Für den Parameterwert $k = 0$ befindet sich der Flächenmittelpunkt O' im Punkte F; bei wachsendem k bewegt er sich auf der positiven (x)-Achse ins Unendliche, für $k = 1$ geht er im Unendlichen auf den negativen Teil der (x)-Achse über und nähert sich dann bei weiter zunehmendem k wieder dem Ursprung O, den er erreicht, wenn man k den Wert ∞ gibt. Alle Punkte der positiven und negativen (x)-Achse können für einen bestimmten Wert von k Mittelpunkt einer Fläche der Schar werden, ausgenommen diejenigen innerhalb der Strecke OF.

Wenn man zunächst vom Spezialfall $k = 1$ absieht, so stellt die Gleichung (1) für jeden beliebigen Parameter k eine Rotationsfläche 2. Ordnung dar, deren Rotationsachse senkrecht auf der (xy)-Ebene steht. Die Lage ihrer Scheitel in der (x)-Achse wird gefunden, wenn man in der Flächengleichung (1) $y = z = 0$ setzt. Dann erhält man die quadratische Gleichung

$$(1-k^2)\,x^2 - 2sx + s^2 = 0.$$

Durch Auflösen nach x ergibt sich hieraus

$$x_1 = \frac{s}{1+k} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{s}{1-k}$$

Dies sind die Abstände der Scheitel S_1 und S_2 vom Ursprung O. Variiert man k, so ändern sich die Stellungen der Scheitel nach folgender Tabelle:

k	x_1	x_2
0	s	s
1	$\frac{s}{2}$	$\pm\infty$
∞	0	0

Für $k = 0$ fallen die Scheitel S_1 und S_2 im Punkte F zusammen, die Fläche 2. Grades reduziert sich auf den festen Punkt F. Durchläuft k die Werte von 0 bis 1, so stellt die Flächengleichung stets ein Rotationsellipsoïd dar; bei zunehmendem Werte von k nähert sich dessen einer Scheitel S_1 dem Mittelpunkte der Strecke OF, der andere, S_2, rückt gegen den unendlich fernen Punkt der positiven (x)-Achse. Im Spezialfall $k = 1$ geht die Fläche 2. Ordnung in den parabolischen Cylinder über, dessen eine Scheitel im Unendlichen, der andere im Abstand $x = \frac{s}{2}$ von O liegt. Ueberschreitet k den Wert 1, so geht der Scheitel S_2 der Rotationsfläche im Unendlichen auf den negativen Teil der (x)-Achse über und rückt mit wachsendem k auf derselben wieder ins Endliche, indem er sich immer mehr dem Nullpunkt O nähert, bis er für $k = \infty$ mit ihm zusammenfällt. Der Scheitel S_1 wandert in der bisherigen Richtung weiter gegen O. Im Intervall $1 < k < \infty$ handelt es sich immer um einschalige Rotationshyperboloïde; das Hyperboloïd $k = \infty$ reduziert sich auf die ursprüngliche (z)-Achse.

Die Längen der Halbachsen der Rotationsflächen variieren zwischen 0 (für $k = 0$ und $k = \infty$) und ∞ (für $k = 1$).

Betrachten wir nun die in der (x)-Achse liegenden Brennpunkte f_1 und f_2 des Flächensystems! Nach der Gleichung (2) betragen ihre Abstände von O′ im neuen Koordinatensystem

$$x' = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2} - \frac{s^2 k^2}{1-k^2}} = \pm \frac{s\,k^2}{1-k^2}$$

Nun ist der Abstand des Punktes F vom Ursprung O′ im neuen Koordinatensystem:

$$x' = s - \frac{s}{1-k^2} = -\frac{s\,k^2}{1-k^2}$$

Durch Vergleichung dieses Abstandes mit denjenigen der Brennpunkte f_1 und f_2 ist ersichtlich, dass der eine Brennpunkt f_1 der Rotationsfläche in dem festen Punkte F liegt. Da F in Bezug auf das ursprüngliche Koordinatensystem seine alte Lage stets beibehält, so bleibt auch der Ort des einen Brennpunktes f_1 aller Rotationsflächen unverändert, F ist der eine Brennpunkt aller Rotationsflächen.

Der zweite Brennpunkt, f_2, steht um

$$x_2 = a_0 + \frac{s\,k^2}{1-k^2} = \frac{s}{1-k^2} + \frac{s\,k^2}{1-k^2} = \frac{s\,(1+k^2)}{1-k^2}$$

vom Ursprung O des alten Systems ab. Bei variablem Parameter k bewegt sich daher f_2 auf der positiven (x)-Achse von F nach $+\infty$, wenn k die Werte von 0 bis 1 durchläuft; überschreitet k den Wert 1, so geht der zweite Brennpunkt im Unendlichen von der positiven (x)-Achse auf die negative über, und wenn k unendlich gross wird, so nähert er sich dem alten Nullpunkt bis zum Abstand $x_2 = -s$.

Nach obigem beträgt die lineare Exzentrizität der Rotationsfläche $e = \frac{s\,k^2}{1-k^2}$. Für $k = 0$ ist $e = 0$. Während k bis 1 anwächst, also für die Schar der Rotationsellipsoïde, nimmt sie zu bis ∞, für die Hyperboloïde wird sie wieder kleiner und im Grenzfall $k = \infty$ wird $e = s$.

Die numerische Exzentrizität der Rotationsfläche wird gegeben durch den Ausdruck:

$$\frac{e}{a} = \frac{s\,k^2}{1-k^2} : \frac{s\,k}{1-k^2} = k.$$

Sie ist stets gleich dem variablen Parameter k und gleich dem konstanten Verhältnis der Abstände m und n in der Definition der Fläche. Ihr Wert variiert zwischen 0 und ∞.

Zusammenstellung der Ergebnisse.

k	$a = b = \frac{s\,k}{1-k^2}$	$a_0 = \frac{s}{1-k^2}$	Abstände der Scheitel von O S_1	S_2	$e = \frac{s\,k^2}{1-k^2}$	$\frac{e}{a}$
0	0	s	$x_1 = s$	$x_2 = s$	0	k
1	∞	$\pm\infty$	$= \frac{s}{2}$	$= \pm\infty$	∞	k
∞	0	0	$= 0$	$= 0$	s	k

§ 4.

Schnitt des Rotationsflächensystems mit der (xz)-Ebene des Koordinatensystems.

Die (xz)-Ebene des Koordinatensystems schneidet jede Fläche des Rotationsflächensystems in einem Hauptschnitt. Die Achsengleichung desselben erhält man aus der auf den Mittelpunkt transformierten Gleichung (2), indem man in ihr $\cdot\, y' = 0$ setzt; sie lautet dann

$$\frac{x'^2}{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{z'^2}{\frac{s^2 k^2}{1-k^2}} = 1 \qquad (7)$$

Betrachten wir in dieser Gleichung k als variabeln Parameter, so stellt sie die Schar von Kurven dar, in welchen die (xz)-Ebene das Flächensystem schneidet, und zwar sind es Ellipsen, wenn $k < 1$, Hyperbeln, wenn $k > 1$ ist. Die eine Achse dieser Kegelschnitte liegt in der (x)-Achse des Koordinatensystems, der eine Brennpunkt fällt mit dem Punkte F zusammen; die zu F gehörige Leitlinie hat die Gleichung $x' = -\frac{a^2}{e} = -a_0$, d. h. alle diese Kegelschnitte haben die eine Leitlinie gemeinsam, sie wird gebildet von der (z)-Achse des alten Koordinatensystems. Ueber die Länge der Achsen und die verschiedenen Lagen der Scheitel und Brennpunkte der in der (xz)-Ebene erzeugten Schnittkegelschnitte gibt § 3 Aufschluss.