

Der Ort der Mittelpunkte, Scheitel und Brennpunkte des Rotationsflächensystems bei variablem k

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): - **(1911)**

PDF erstellt am: **28.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

dinatenursprunges O' vom alten O ; also ist die (z) -Achse die Leitlinie der Parabel in der (xz) -Ebene.

Ferner liegt der Scheitel S in der Mitte zwischen O und F , also ist F zugleich der Brennpunkt der Schnittparabel mit der (xz) -Ebene. Die Ebene $x = \frac{s}{2}$ ist Scheiteltangentialebene des parabolischen Cylinders. (S. Fig. 4).

§ 3.

Der Ort der Mittelpunkte, Scheitel und Brennpunkte des Rotationsflächensystems bei variablem k .

Nach § 1 liegt der Mittelpunkt O' der durch Gleichung (1) dargestellten Flächen 2. Grades immer auf der (x) -Achse; sein Abstand vom Nullpunkt $= a_0 = \frac{s}{1-k^2}$. Setzen wir für k nacheinander alle zwischen 0 und ∞ liegenden Werte ein, so ändert sich die Lage des Mittelpunktes O' folgenderweise:

k	a_0
0	s
1	$2s$
$\sqrt{2}$	$\pm \infty$
1	0
∞	0

Für den Parameterwert $k = 0$ befindet sich der Flächenmittelpunkt O' im Punkte F ; bei wachsendem k bewegt er sich auf der positiven (x) -Achse ins Unendliche, für $k = 1$ geht er im Unendlichen auf den negativen Teil der (x) -Achse über und nähert sich dann bei weiter zunehmendem k wieder dem Ursprung O , den er erreicht, wenn man k den Wert ∞ gibt. Alle Punkte der positiven und negativen (x) -Achse können für einen bestimmten Wert von k Mittelpunkt einer Fläche der Schar werden, ausgenommen diejenigen innerhalb der Strecke OF .

Wenn man zunächst vom Spezialfall $k = 1$ absieht, so stellt die Gleichung (1) für jeden beliebigen Parameter k eine Rotationsfläche 2. Ordnung dar, deren Rotationsachse senkrecht auf der (xy) -Ebene steht. Die Lage ihrer Scheitel in der (x) -Achse wird gefunden, wenn man in der Flächengleichung (1) $y = z = 0$ setzt. Dann erhält man die quadratische Gleichung

$$(1 - k^2)x^2 - 2sx + s^2 = 0.$$

Durch Auflösen nach x ergibt sich hieraus

$$x_1 = \frac{s}{1+k} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{s}{1-k}$$

Dies sind die Abstände der Scheitel S_1 und S_2 vom Ursprung O . Variiert man k , so ändern sich die Stellungen der Scheitel nach folgender Tabelle:

k	x_1	x_2
0	s	s
1	$\frac{s}{2}$	$\pm \infty$
∞	0	0

Für $k=0$ fallen die Scheitel S_1 und S_2 im Punkte F zusammen, die Fläche 2. Grades reduziert sich auf den festen Punkt F . Durchläuft k die Werte von 0 bis 1, so stellt die Flächengleichung stets ein Rotationsellipsoid dar; bei zunehmendem Werte von k nähert sich dessen einer Scheitel S_1 dem Mittelpunkte der Strecke OF , der andere, S_2 , rückt gegen den unendlich fernen Punkt der positiven (x)-Achse. Im Spezialfall $k=1$ geht die Fläche 2. Ordnung in den parabolischen Cylinder über, dessen eine Scheitel im Unendlichen, der andere im Abstand $x = \frac{s}{2}$ von O liegt. Ueberschreitet k den Wert 1, so geht der Scheitel S_2 der Rotationsfläche im Unendlichen auf den negativen Teil der (x)-Achse über und rückt mit wachsendem k auf derselben wieder ins Endliche, indem er sich immer mehr dem Nullpunkt O nähert, bis er für $k=\infty$ mit ihm zusammenfällt. Der Scheitel S_1 wandert in der bisherigen Richtung weiter gegen O . Im Intervall $1 < k < \infty$ handelt es sich immer um einschalige Rotationshyperboloide; das Hyperboloïd $k=\infty$ reduziert sich auf die ursprüngliche (z)-Achse.

Die Längen der Halbachsen der Rotationsflächen variieren zwischen 0 (für $k=0$ und $k=\infty$) und ∞ (für $k=1$).

Betrachten wir nun die in der (x)-Achse liegenden Brennpunkte f_1 und f_2 des Flächensystems! Nach der Gleichung (2) betragen ihre Abstände von O' im neuen Koordinatensystem

$$x' = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2} - \frac{s^2 k^2}{1-k^2}} = \pm \frac{s k^2}{1-k^2}$$

Nun ist der Abstand des Punktes F vom Ursprung O' im neuen Koordinatensystem:

$$x' = s - \frac{s}{1-k^2} = -\frac{s k^2}{1-k^2}$$

Durch Vergleichung dieses Abstandes mit denjenigen der Brennpunkte f_1 und f_2 ist ersichtlich, dass der eine Brennpunkt f_1 der Rotationsfläche in dem festen Punkte F liegt. Da F in Bezug auf das ursprüngliche Koordinatensystem seine alte Lage stets beibehält, so bleibt auch der Ort des einen Brennpunktes f_1 aller Rotationsflächen unverändert, F ist der eine Brennpunkt aller Rotationsflächen.

Der zweite Brennpunkt, f_2 , steht um

$$x_2 = a_0 + \frac{s k^2}{1-k^2} = \frac{s}{1-k^2} + \frac{s k^2}{1-k^2} = \frac{s(1+k^2)}{1-k^2}$$

vom Ursprung O des alten Systems ab. Bei variablem Parameter k bewegt sich daher f_2 auf der positiven (x)-Achse von F nach $+\infty$, wenn k die Werte von 0 bis 1 durchläuft; überschreitet k den Wert 1, so geht der zweite Brennpunkt im Unendlichen von der positiven (x)-Achse auf die negative über, und wenn k unendlich gross wird, so nähert er sich dem alten Nullpunkt bis zum Abstand $x_2 = -s$.

Nach obigem beträgt die lineare Exzentrizität der Rotationsfläche $e = \frac{s k^2}{1-k^2}$. Für $k=0$ ist $e=0$. Während k bis

1 anwächst, also für die Schar der Rotationsellipsoide, nimmt sie zu bis ∞ , für die Hyperboloide wird sie wieder kleiner und im Grenzfall $k = \infty$ wird $e = s$.

Die numerische Exzentrizität der Rotationsfläche wird gegeben durch den Ausdruck:

$$\frac{e}{a} = \frac{s k^2}{1-k^2} : \frac{s k}{1-k^2} = k.$$

Sie ist stets gleich dem variablen Parameter k und gleich dem konstanten Verhältnis der Abstände m und n in der Definition der Fläche. Ihr Wert variiert zwischen 0 und ∞ .

Zusammenstellung der Ergebnisse.

k	$a = b = \frac{sk}{1-k^2}$	$a_0 = \frac{s}{1-k^2}$	Abstände der Scheitel von O		$e = \frac{sk^2}{1-k^2}$	$\frac{e}{a}$
			S_1	S_2		
0	0	s	$x_1 = s$	$x_2 = s$	0	k
1	∞	$\pm \infty$	$= \frac{s}{2}$	$= \pm \infty$	∞	k
∞	0	0	$= 0$	$= 0$	s	k

§ 4.

Schnitt des Rotationsflächensystems mit der (xz)-Ebene
des Koordinatensystems.

Die (xz)-Ebene des Koordinatensystems schneidet jede Fläche des Rotationsflächensystems in einem Hauptschnitt. Die Achsengleichung desselben erhält man aus der auf den Mittelpunkt transformierten Gleichung (2), indem man in ihr $y' = 0$ setzt; sie lautet dann

$$\frac{x'^2}{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{z'^2}{\frac{s^2 k^2}{1-k^2}} = 1 \quad (7)$$

Betrachten wir in dieser Gleichung k als variablen Parameter, so stellt sie die Schar von Kurven dar, in welchen die (xz)-Ebene das Flächensystem schneidet, und zwar sind es Ellipsen, wenn $k < 1$, Hyperbeln, wenn $k > 1$ ist. Die eine Achse dieser Kegelschnitte liegt in der (x)-Achse des Koordinatensystems, der eine Brennpunkt fällt mit dem Punkte F zusammen; die zu F gehörige Leitlinie hat die Gleichung $x' = -\frac{a^2}{e} = -a_0$, d. h. alle diese Kegelschnitte haben die eine Leitlinie gemeinsam, sie wird gebildet von der (z)-Achse des alten Koordinatensystems. Ueber die Länge der Achsen und die verschiedenen Lagen der Scheitel und Brennpunkte der in der (xz)-Ebene erzeugten Schnittkegelschnitte gibt § 3 Aufschluss.