

Schnitt des Rotationsflächensystems mit der (xz)-Ebene des Koordinatensystems

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): - **(1911)**

PDF erstellt am: **28.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Zusammenstellung der Ergebnisse.

k	$a = b = \frac{sk}{1-k^2}$	$a_0 = \frac{s}{1-k^2}$	Abstände der Scheitel von O		$e = \frac{sk^2}{1-k^2}$	$\frac{e}{a}$
			S_1	S_2		
0	0	s	$x_1 = s$	$x_2 = s$	0	k
1	∞	$\pm \infty$	$= \frac{s}{2}$	$= \pm \infty$	∞	k
∞	0	0	$= 0$	$= 0$	s	k

§ 4.

Schnitt des Rotationsflächensystems mit der (xz)-Ebene
des Koordinatensystems.

Die (xz)-Ebene des Koordinatensystems schneidet jede Fläche des Rotationsflächensystems in einem Hauptschnitt. Die Achsengleichung desselben erhält man aus der auf den Mittelpunkt transformierten Gleichung (2), indem man in ihr $y' = 0$ setzt; sie lautet dann

$$\frac{x'^2}{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{z'^2}{\frac{s^2 k^2}{1-k^2}} = 1 \quad (7)$$

Betrachten wir in dieser Gleichung k als variablen Parameter, so stellt sie die Schar von Kurven dar, in welchen die (xz)-Ebene das Flächensystem schneidet, und zwar sind es Ellipsen, wenn $k < 1$, Hyperbeln, wenn $k > 1$ ist. Die eine Achse dieser Kegelschnitte liegt in der (x)-Achse des Koordinatensystems, der eine Brennpunkt fällt mit dem Punkte F zusammen; die zu F gehörige Leitlinie hat die Gleichung $x' = -\frac{a^2}{e} = -a_0$, d. h. alle diese Kegelschnitte haben die eine Leitlinie gemeinsam, sie wird gebildet von der (z)-Achse des alten Koordinatensystems. Ueber die Länge der Achsen und die verschiedenen Lagen der Scheitel und Brennpunkte der in der (xz)-Ebene erzeugten Schnittkegelschnitte gibt § 3 Aufschluss.

Der spezielle Fall $k = 1$ wird nach Gleichung (5.) diskutiert; die Schnittkurve nimmt hier die Form einer Parabel an, deren Gleichung durch

$$z'^2 = 2sx' \quad (6.)$$

gegeben ist.

Nach dem Bisherigen lässt sich nun die Schnittkurvenschar in der (xz) -Ebene folgenderweise darstellen:

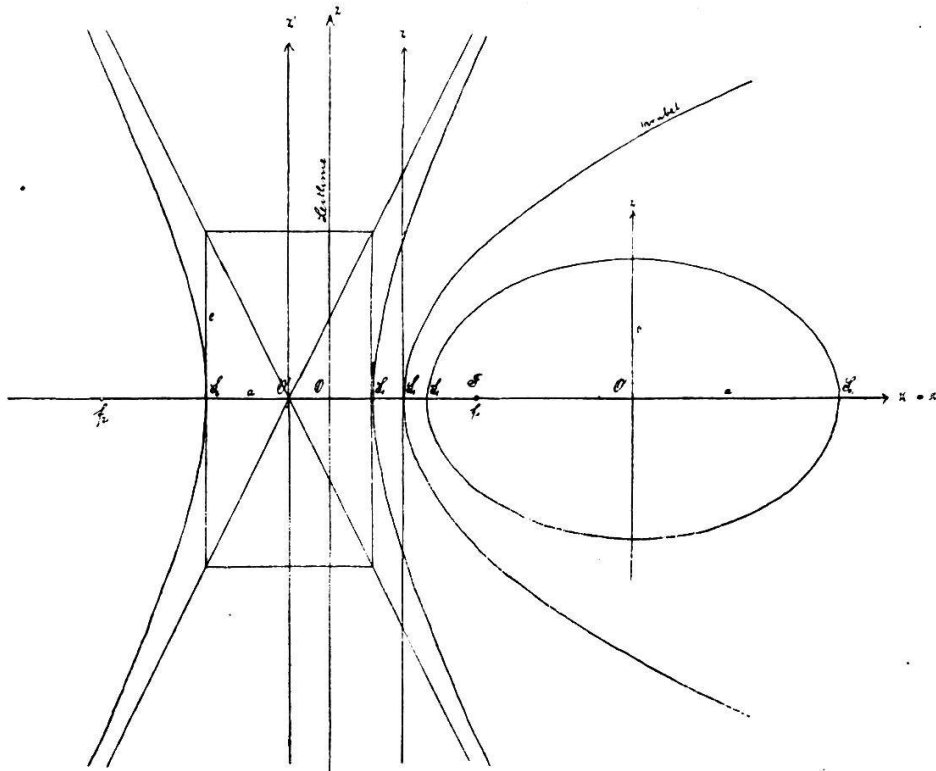


Fig. 5.

Betrachten wir noch die in der (xz) -Ebene liegende Halb-
achse c der Rotationsfläche! Für die Ellipsoide ist ihre Länge-
 $c = \frac{sk}{\sqrt{1 - k^2}}$. Die Koordinaten der beiden Scheitel sind daher:

$$x = a_0 = \frac{s}{1 - k^2} \quad \text{und} \quad z = \pm \frac{sk}{\sqrt{1 - k^2}} \quad (a.)$$

Wird der Parameter k aus diesen beiden Ausdrücken eli-
miniert, so erhält man die Gleichung

$$z^2 - sx + s^2 = 0 \quad \text{oder} \quad z^2 = s(x - s) \quad (b.)$$

Sie stellt eine Parabel dar als Ort der Scheitelpunkte aller
Halbachsen c , die in der (xz) -Ebene liegen. Die (x) -Achse ist

Parabelachse, der Punkt F Scheitelpunkt. Setzt man für $x = x' + s$ und für $z = z'$, so hat man die Scheitelgleichung der Parabel:

$$z'^2 = sx'.$$

Der Halbparameter $p = \frac{s}{2} = \frac{1}{2}$ der Strecke OF. Der Abstand des Brennpunktes vom Parabelscheiden $= \frac{s}{4} = \frac{1}{4}$ der Strecke OF.

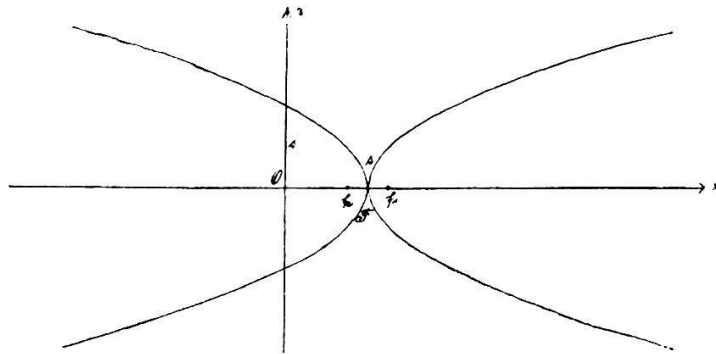


Fig. 6.

Ist $k > 1$, so dass die Rotationsfläche durch ein Hyperboloïd dargestellt wird, so misst die imaginäre Halbachse $c = \frac{sk}{\sqrt{k^2 - 1}}$.

Die Scheitelkoordinaten werden also

$$x = \frac{s}{1 - k^2} = -\frac{s}{k^2 - 1} \quad \text{und} \quad z = \pm \frac{sk}{\sqrt{k^2 - 1}}$$

Durch Elimination von k aus diesen zwei Ausdrücken erhält man die Gleichung einer linksseitigen Parabel, nämlich

$$z^2 = s^2 - sx = -s(x - s)$$

oder, wenn man für $z = z'$ und für $x = x' + s$ einsetzt,

$$z'^2 = -sx'.$$

Der Punkt F ist auch Parabelscheiden, der Halbparameter $= p = -\frac{s}{2}$. Diese Parabel ist mit der obigen kongruent, sie ist nur um 180° gedreht. Die (z)-Achse wird von der Kurve in $\pm s$ geschnitten, d. h. das Hyperboloïd $k = \infty$, dessen Mittelpunkt mit dem Nullpunkt O zusammenfällt, besitzt eine Halbachse $c = s$ (und $a = b = 0$). Nur der links von der (z)-Achse

liegende Teil dieser Parabel ist Ort von reellen Scheiteln der imaginären Halbachsen der Hyperboloide, da die Punkte innerhalb der Strecke OF nie Mittelpunkt der Rotationsflächen werden (S. Fig. 6).

§ 5.

Schnitt des Rotationsflächensystems mit der (xy)-Ebene.

Auch die (xy)-Ebene des Koordinatensystems schneidet jede Fläche des Systems in einem Hauptschnitt. Die Achsengleichung desselben erhalten wir direkt aus der transformierten Flächengleichung (2.), indem wir in ihr $z' = 0$ setzen; sie wird dann:

$$\frac{x'^2}{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{y'^2}{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2}} = 1 \quad (8.)$$

Setzen wir hierin für $\frac{s}{1-k^2} = a_0$ und für $k^2 = \frac{a_0 - s}{a_0}$, so geht sie über in

$$x'^2 + y'^2 = a_0 (a_0 - s) \quad (8_a.)$$

Variiert man k von 0 bis ∞ , so durchläuft a_0 alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, ausgenommen diejenigen von 0 bis s . Für alle möglichen Werte von a_0 wird daher die rechte Seite der Gleichung (8_a) positiv, sie stellt also immer einen Kreis dar. Der Ort aller Punkte in der (xy)-Ebene, deren Abstände von zwei festen Punkten, F und O (dem Fusspunkt der z-Achse), in einem gegebenen, konstanten Verhältnis stehen, ist also ein Kreis. Für variables k kann dessen Zentrum O' mit allen Punkten der positiven und negativen (x)-Achse, ausgenommen mit denjenigen zwischen dem Nullpunkt O und dem festen Punkt F, zusammenfallen. Die Scheitel S_1 der einem positiven a_0 entsprechenden Schnittkreise befinden sich stets zwischen den Abständen $\frac{s}{2}$ und s von O, die Scheitel S_1' der einem negativen Werte von a_0 entsprechenden Schnittkreise dagegen zwischen dem Nullpunkt O und dem Abstand $+\frac{s}{2}$. Die Radien der Kreise werden für $a_0 = \pm \infty$ unendlich gross; die entsprechenden