Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1911)

Artikel: Diskussion eines Systems von Rotationsflächen 2. Grades

Autor: Meyer, Friedrich

Kapitel: 4: Schnitt des Rotationsflächensystems mit der (xz)-Ebene des Koordinatensystems

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319219

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zusammenstellung der Ergebnisse.

k	$a = b = \frac{sk}{1-k^2}$	$a_0 = \frac{s}{1-k^2}$	Abstände der Scheitel von O		$e = \frac{sk^2}{1-k^2}$	$\frac{e}{a}$
			S_1	S_2		
0	0	s	$x_1 = s$	$x_2 = s$	0	k
1	∞	$\pm\infty$	$= \frac{s}{2}$	$= \pm\infty$	∞	k
∞	0	0	$= 0$	$= 0$	s	k

§ 4.

Schnitt des Rotationsflächensystems mit der (xz)-Ebene des Koordinatensystems.

Die (xz)-Ebene des Koordinatensystems schneidet jede Fläche des Rotationsflächensystems in einem Hauptschnitt. Die Achsengleichung desselben erhält man aus der auf den Mittelpunkt transformierten Gleichung (2), indem man in ihr $y' = 0$ setzt; sie lautet dann

$$\frac{x'^2}{\frac{s^2k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{z'^2}{\frac{s^2k^2}{1-k^2}} = 1 \qquad (7)$$

Betrachten wir in dieser Gleichung k als variabeln Parameter, so stellt sie die Schar von Kurven dar, in welchen die (xz)-Ebene das Flächensystem schneidet, und zwar sind es Ellipsen, wenn $k < 1$, Hyperbeln, wenn $k > 1$ ist. Die eine Achse dieser Kegelschnitte liegt in der (x)-Achse des Koordinatensystems, der eine Brennpunkt fällt mit dem Punkte F zusammen; die zu F gehörige Leitlinie hat die Gleichung $x' = -\frac{a^2}{e} = -a_0$, d. h. alle diese Kegelschnitte haben die eine Leitlinie gemeinsam, sie wird gebildet von der (z)-Achse des alten Koordinatensystems. Ueber die Länge der Achsen und die verschiedenen Lagen der Scheitel und Brennpunkte der in der (xz)-Ebene erzeugten Schnittkegelschnitte gibt § 3 Aufschluss.

Der spezielle Fall $k = 1$ wird nach Gleichung (5.) diskutiert; die Schnittkurve nimmt hier die Form einer Parabel an, deren Gleichung durch

$$z'^2 = 2\,sx' \qquad (6.)$$

gegeben ist.

Nach dem Bisherigen lässt sich nun die Schnittkurvenschar in der (xz)-Ebene folgenderweise darstellen:

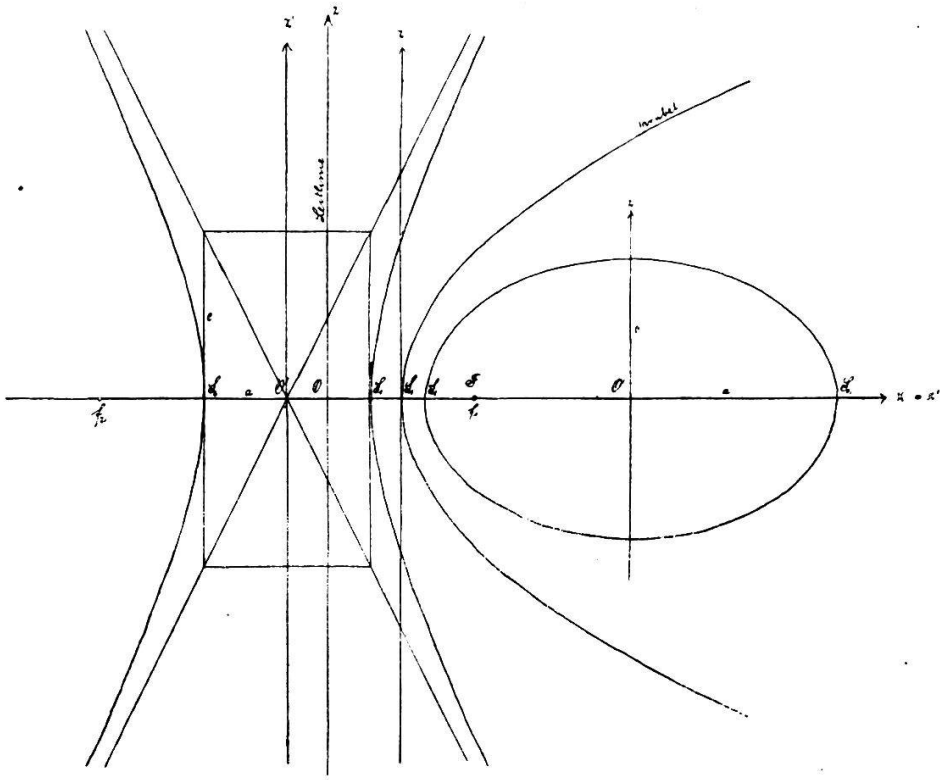

Fig. 5.

Betrachten wir noch die in der (xz)-Ebene liegende Halbachse c der Rotationsfläche! Für die Ellipsoïde ist ihre Länge $c = \frac{sk}{\sqrt{1 - k^2}}$. Die Koordinaten der beiden Scheitel sind daher:

$$x = a_0 = \frac{s}{1 - k^2} \quad \text{und} \quad z = \pm \frac{sk}{\sqrt{1 - k^2}} \qquad (a.)$$

Wird der Parameter k aus diesen beiden Ausdrücken eliminiert, so erhält man die Gleichung

$$z^2 - sx + s^2 = o \quad \text{oder} \quad z^2 = s\,(x - s) \qquad (b.)$$

Sie stellt eine Parabel dar als Ort der Scheitelpunkte aller Halbachsen c, die in der (xz)-Ebene liegen. Die (x)-Achse ist

Parabelachse, der Punkt F Scheitelpunkt. Setzt man für $x = x' + s$ und für $z = z'$, so hat man die Scheitelgleichung der Parabel:

$$z'^2 = sx'.$$

Der Halbparameter $p = \frac{s}{2} = \frac{1}{2}$ der Strecke OF. Der Abstand des Brennpunktes vom Parabelscheitel $= \frac{s}{4} = \frac{1}{4}$ der Strecke OF.

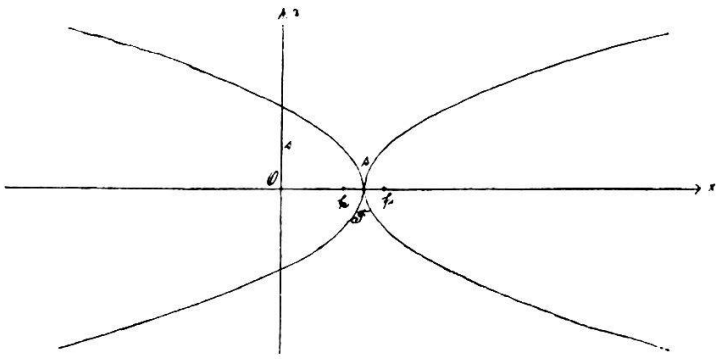

Fig. 6.

Ist $k > 1$, so dass die Rotationsfläche durch ein Hyperboloïd dargestellt wird, so misst die imaginäre Halbachse $c = \frac{sk}{\sqrt{k^2 - 1}}$. Die Scheitelkoordinaten werden also

$$x = \frac{s}{1 - k^2} = -\frac{s}{k^2 - 1} \quad \text{und} \quad z = \pm \frac{sk}{\sqrt{k^2 - 1}}$$

Durch Elimination von k aus diesen zwei Ausdrücken erhält man die Gleichung einer linksseitigen Parabel, nämlich

$$z^2 = s^2 - sx = -s(x - s)$$

oder, wenn man für $z = z'$ und für $x = x' + s$ einsetzt,

$$z'^2 = -sx'.$$

Der Punkt F ist auch Parabelscheitel, der Halbparameter $= p = -\frac{s}{2}$. Diese Parabel ist mit der obigen kongruent, sie ist nur um 180° gedreht. Die (z)-Achse wird von der Kurve in $\pm s$ geschnitten, d. h. das Hyperboloïd $k = \infty$, dessen Mittelpunkt mit dem Nullpunkt O zusammenfällt, besitzt eine Halbachse $c = s$ (und $a = b = o$). Nur der links von der (z)-Achse

liegende Teil dieser Parabel ist Ort von reellen Scheiteln der imaginären Halbachsen der Hyperboloïde, da die Punkte innerhalb der Strecke OF nie Mittelpunkt der Rotationsflächen werden (S. Fig. 6).

§ 5.

Schnitt des Rotationsflächensystems mit der (xy)-Ebene.

Auch die (xy)-Ebene des Koordinatensystems schneidet jede Fläche des Systems in einem Hauptschnitt. Die Achsengleichung desselben erhalten wir direkt aus der transformierten Flächengleichung (2.), indem wir in ihr $z' = o$ setzen; sie wird dann:

$$\frac{x'^2}{\frac{s^2k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{y'^2}{\frac{s^2k^2}{(1-k^2)^2}} = 1 \qquad (8.)$$

Setzen wir hierin für $\frac{s}{1-k^2} = a_o$ und für $k^2 = \frac{a_o - s}{a_o}$, so geht sie über in

$$x'^2 + y'^2 = a_o (a_o - s) \qquad (8_a.)$$

Variiert man k von o bis ∞, so durchläuft a_o alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, ausgenommen diejenigen von o bis s. Für alle möglichen Werte von a_o wird daher die rechte Seite der Gleichung (8_a) positiv, sie stellt also immer einen Kreis dar. Der Ort aller Punkte in der (xy)-Ebene, deren Abstände von zwei festen Punkten, F und O (dem Fusspunkt der z-Achse), in einem gegebenen, konstanten Verhältnis stehen, ist also ein Kreis. Für variables k kann dessen Zentrum O′ mit allen Punkten der positiven und negativen (x)-Achse, ausgenommen mit denjenigen zwischen dem Nullpunkt O und dem festen Punkt F, zusammenfallen. Die Scheitel S_1 der einem positiven a_o entsprechenden Schnittkreise befinden sich stets zwischen den Abständen $\frac{s}{2}$ und s von O, die Scheitel S_1' der einem negativen Werte von a_o entsprechenden Schnittkreise dagegen zwischen dem Nullpunkt O und dem Abstand $+\frac{s}{2}$. Die Radien der Kreise werden für $a_o = \pm\infty$ unendlich gross; die entsprechenden