Die Schnitte der Rotationsflächenschar mit einer Ebene durch die (x)-Achse

welcher den Abstand der Ebene des Hauptschnittes vom Koordinatenursprung O darstellt. Als Resultat dieser Elimination ergibt sich die Gleichung:

$$s y'^2 + a_0 z'^2 + a_0 s (s - a_0) = 0.$$

In dieser Gleichung ist s eine Konstante; a_0 dagegen kann als laufende Koordinate betrachtet werden, da es bei veränderlichem k alle Werte der positiven und negativen (x)-Achse durchlaufen kann, ausgenommen diejenigen der Strecke OF. Substituiert man daher für $a_0 = x$, ersetzt ferner y' wieder durch y und z' durch z, so wird obige Gleichung:

$$x z^2 - s (x^2 - y^2) + s^2 x = 0. \qquad (11)$$

Durch sie ist der Ort aller Hauptschnitte parallel der (yz)-Ebene für sämtliche Rotationsflächen bestimmt. Sie stellt eine Fläche 3. Ordnung in den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z dar, die symmetrisch liegt zu der (xy)- und (xz)-Ebene. Die Diskussion dieser Hauptschnittfläche 3. Grades erfolgt in § 12.

§ 7.
Die Schnitte der Rotationsflächenschar mit einer Ebene durch die (x)-Achse.

Es werde durch die (x)-Achse unseres Koordinatensystems (xyz) eine Ebene gelegt, welche mit der (xy)-Ebene einen beliebigen Winkel φ bildet; wir betrachten sie als neue Koordinatenebene $(x'y')$ und transformieren nun die Gleichung des betrachteten Rotationsflächensystems

$$(1.) \qquad (1-k^2)\, x^2 + (1-k^2) y^2 + z^2 - 2 s x + s^2 = 0$$

auf das neue Koordinatensystem $(x' y' z')$. Dabei gelten folgende Transformationsformeln:

$$y = y' \cos\varphi - z' \sin\varphi$$
$$z = y' \sin\varphi + z' \cos\varphi$$
$$x = x'$$

Die Gleichung (1.) geht dann über in

$$(1-k^2) x'^2 + (1-k^2 \cos^2\varphi)\, y'^2 + (1-k^2 \sin^2\varphi)\, z'^2 + k^2 \sin 2\varphi \cdot y' z' - 2 s x' + s^2 = 0$$

Um die Gleichung der Schnittkurven des Rotationsflächensystems mit der $(x' y')$-Ebene zu erhalten, ist in der letzten Gleichung $z' = 0$ zu setzen, und wir erhalten als Gleichung des Schnittkurvensystems

$$(1-k^2) x'^2 + (1-k^2 \cos^2\varphi)\, y'^2 - 2 s x' + s^2 = 0 \qquad (12)$$

Dies ist eine Gleichung zweiten Grades, jede Ebene durch die (x)-Achse schneidet also das Rotationsflächensystem im allgemeinen in einem Kegelschnitt.

Die Gleichung (12) enthält zwei Parameter, nämlich k und φ. Wir wollen zunächst zwei Spezialfälle betrachten, indem wir vorerst $\varphi = 0$ und dann $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wählen.

Für $\varphi = 0$ geht die Kegelschnittgleichung (12) über in

$$(1-k^2)\,x'^2 + (1-k^2)\,y'^2 - 2\,s\,x' + s^2 = 0$$

und wenn man diese Gleichung durch die Transformationsformeln $x' = x'' + \frac{s}{1-k^2}$ und $y' = y''$ auf die Normalform bringt, so erhält man die Kreisbüschelgleichung (8) in § 5. Diese stellt den Schnitt des Rotationsflächensystems mit der (x y)-Ebene dar (s. Fig. 7).

Setzt man für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und wendet die vorigen Transformationsformeln an, so geht die Gleichung (12) über in die Gleichung (7) § 4, welche das Schnittkurvensystem der Rotationsflächen in der (x z)-Ebene darstellt (Fig 5).

Wir untersuchen nun das durch Gleichung (12) dargestellte Kegelschnittsystem für einen bestimmten, konstanten Winkel φ, der zwischen 0^0 und 90^0 liegt; der Parameter k dagegen soll alle Werte von Null bis ∞ durchlaufen.

Sollen vorerst die Asymptotenrichtungen der Kegelschnitte bestimmt werden, so muss man die Glieder 2. Grades gleich Null setzen, also

$$(1-k^2)\,x'^2 + (1-k^2\cos^2\varphi)\,y'^2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$y' = \pm\sqrt{\frac{k^2-1}{1-k^2\cos^2\varphi}}\cdot x' \qquad \text{(a)}$$

Die Asymptoten der Kegelschnitte sind reell, wenn Zähler und Nenner dieser Wurzel entweder beide negativ oder beide positiv sind. Dies ist der Fall, wenn

$$\text{a)}\quad k^2 < 1 \text{ und } k^2\cos^2\varphi > 1 \text{ oder}$$

$$k < 1 \text{ und } k > \frac{1}{\cos\varphi}$$

was unmöglich ist, da $\frac{1}{\cos\varphi}$ immer grösser als 1 ist.

b) wenn $k^2 > 1$ und $k^2 \cos^2 \varphi < 1$ oder

$$k > 1 \text{ und } k < \frac{1}{\cos \varphi}\text{, also } \cos \varphi < \frac{1}{k}$$

Dieser letzte Fall ist möglich. Für Werte von k, die grösser als 1 aber kleiner als $\frac{1}{\cos \varphi}$ sind, besitzt der durch Gleichung (12) dargestellte Kegelschnitt reelle Asymptoten, die von einander verschieden sind; er ist also eine Hyperbel.

Ist $k = 1$, so fallen nach Gleichung (a) die beiden Asymptotenrichtungen in der Geraden $y' = o$ zusammen. Der Kegelschnitt ist daher in diesem Fall eine Parabel von der Gleichung $\sin^2 \varphi \cdot y'^2 - 2\, s\, x' + s^2 = 0$. Die (x')-Achse ist Parabelachse.

Wenn der Parameter k den Wert $k = \frac{1}{\cos \varphi}$ annimmt, so geht die Kegelschnittgleichung (12) über in

$$\left(1 - \frac{1}{\cos^2 \varphi}\right) x'^2 - 2\, s\, x' + s^2 = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in x'; löst man sie auf, so zerfällt sie in die beiden Geradengleichungen

$$x_1' = \frac{s \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \quad \text{und} \quad x_2' = -\frac{s \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}$$

Für den Parameterwert $k = \frac{1}{\cos \varphi}$ besteht also die Schnittkurve (12) aus zwei Parallelen zur (y')-Achse; ihre Abstände von derselben sind $x_1' = \frac{s \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}$, bezüglich $x_2' = -\frac{s \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}$.

Dieser Fall tritt dann ein, wenn die durch die (x)-Achse gelegte Schnittebene (x' y') aus dem Rotationshyperboloïd zwei zur (y z)-Ebene parallele Erzeugende herausschneidet. Da diese durch die auf der (x)-Achse liegenden Scheitel des Hyperboloïdes gehen, so muss ihr Abstand $= \frac{2\, s\, k}{k^2 - 1}$ sein (s. Seite 121). Es besteht daher die Beziehung

$$\frac{s \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} + \frac{s \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} = \frac{2\, s\, k}{k^2 - 1}$$

Löst man diese Gleichung nach k auf, so erhält man als positive, (einzig in Betracht fallende), Wurzel wieder $k = \frac{1}{\cos \varphi}$

Liegt der Wert von k nicht im Bereiche $1 < k < \frac{1}{\cos\varphi}$, ist also $k < 1$ oder $k > \frac{1}{\cos\varphi}$, so werden die Asymptotenrichtungen des Kegelschnittes nach Gleichung (a) imaginär, er ist also eine Ellipse. Fassen wir die bisherigen Ergebnisse zusammen, so folgt: Eine durch die (x)-Achse gelegte Ebene, welche mit der Koordinatenebene (x y) den Winkel φ einschliesst, schneidet alle Rotationsellipsoïde des durch Gleichung (1) gegebenen Rotationsflächensystems in einer Ellipse, den parabolischen Cylinder $k = 1$ in einer Parabel, und die Rotationshyperboloïde entweder in einer Ellipse, oder in zwei parallelen Geraden (Erzeugende des Hyperboloïdes), oder in einer Hyperbel, je nachdem $\cos\varphi \gtreqless \frac{1}{k}$ ist.

Um die durch Gleichung (12) dargestellten Kegelschnitte genauer zu untersuchen, transformieren wir die Gleichung auf ihre Achsen, indem wir für $x' = x'' + \frac{s}{1-k^2}$ und für $y' = y''$ substituieren. Sie nimmt dann folgende Form an:

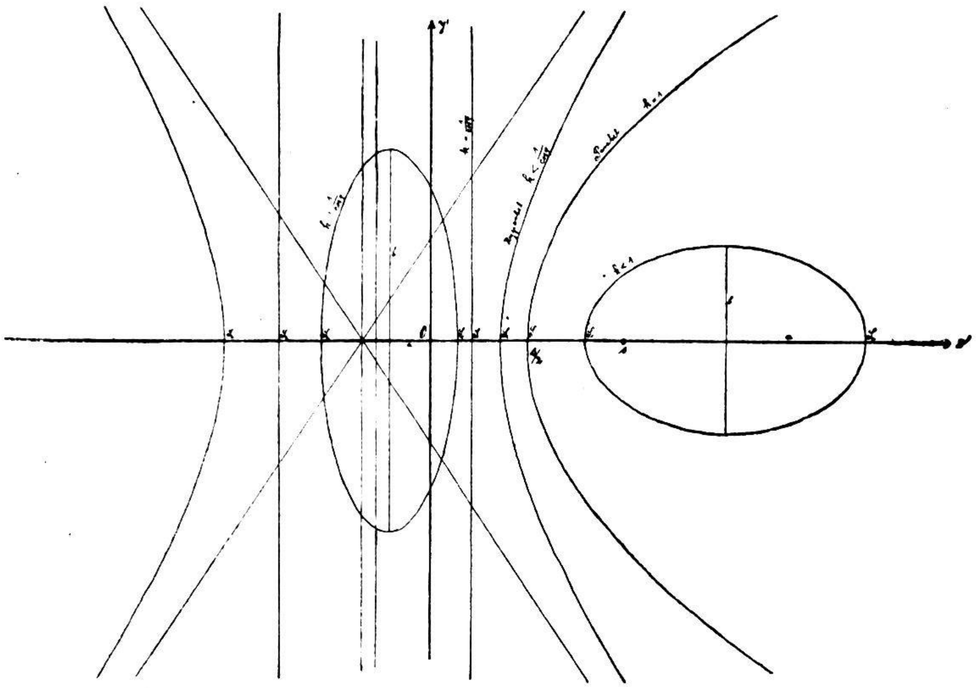

Fig. 10.

$$\frac{x''^2}{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{y''^2}{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)(1-k^2\cos^2\varphi)}} = 1 \qquad \text{(b)}$$

Der Mittelpunkt und die beiden in der (x)-Achse liegenden Scheitel jedes Kegelschnittes dieses Systems fallen mit denjenigen der entsprechenden Rotationsfläche zusammen, und die eine Achse des Kegelschnittes liegt immer in der (x)-Achse des alten Koordinatensystems.

Wir betrachten vorerst die Ellipsen, in welchen die Rotationsellipsoïde $k < 1$ von der durch die (x)-Achse gelegten Ebene geschnitten werden. Der Abstand ihres Mittelpunktes vom Koordinatenursprung wird gegeben durch $a_0 = \frac{s}{1 - k^2}$. Wenn k von Null bis 1 wächst, so nimmt er alle Werte von $+ s$ bis $+ \infty$ an. Die Halbachsen der Ellipsen sind $a = \frac{s\,k}{1 - k^2}$ und $b = \frac{s\,k}{\sqrt{(1 - k^2)\,(1 - k^2 \cos^2 \varphi)}}$, für $k = 0$ reduziert sich die Ellipse auf einen Punkt, der mit F zusammenfällt; bei von 0 bis 1 wachsendem Parameter k nehmen beide zu von 0 bis ∞, wobei a immer grösser als b ist. Der eine Scheitel S_1 bewegt sich bei zunehmendem k von $x_1' = s$ bis $x_2' = \frac{s}{2}$, der andere von $x_2' = + s$ bis $x_2' = + \infty$. Die lineare Excentrizität dieser Ellipsen $e = \frac{s\,k^2 \sin \varphi}{(1 - k^2)\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}}$ nimmt vom Werte 0 an zu bis ∞, die numerische dagegen $= \frac{e}{a} = \frac{k \sin \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}}$ von 0 bis 1.

Um die Gleichung der Parabel zu finden, in welcher der parabolische Cylinder von der Ebene durch die (x)-Achse geschnitten wird, setzen wir in Gleichung (12) den Parameter $k = 1$ ein und finden $y'^2 = \frac{2\,s}{\sin^2 \varphi}\left(x' - \frac{s}{2}\right)$ (c)

Durch die Transformationsformeln $y' = y''$ und $x' = x'' + \frac{s}{2}$ geht die Gleichung (c.) in die Scheitelgleichung der Schnittparabel über, welche heisst $y''^2 = \frac{2\,s}{\sin^2 \varphi}\,x''$ (d)

Die (x)-Achse ist Parabelachse, ihr Scheitel befindet sich im Abstand $x' = \frac{s}{2}$ vom Coordinatenursprung. Der Halbparameter der Schnittparabel ist $p = \frac{s}{\sin^2 \varphi}$. Für veränderliches φ ist er variabel und kann alle Werte zwischen s und ∞ annehmen, d. h. je nach dem Winkel, den die Schnittebene $(x' \, y')$ mit der Koordinatenebene $(x \, y)$ bildet, wird der Parameter grösser oder kleiner. Ein Minimum wird er, wenn $\varphi = 90^0$ ist, wenn also die Schnittebene auf der (x y)-Ebene senkrecht steht und die Erzeugenden des Cylinders rechtwinklig schneidet. In diesem Falle wird er $= s =$ dem Halbparameter der Schnittparabel in der (x z)-Ebene von der Gleichung $z'^2 = 2 \, s \, x'$ (Siehe Gleichung [6]). Je kleiner der Winkel φ wird, d. h. je mehr er sich vom rechten entfernt, desto grösser wird der Parameter. Fällt die Schnittebene mit der (x y)-Ebene zusammen, so ist $\varphi = 0$, also auch $\sin^2 \varphi = 0$, und der Halbparameter $p = \infty$; der parabolische Cylinder wird durch die (x y)-Ebene in der Geraden $x' = 0$, d. h. in der (y')-Achse und in der unendlich fernen Geraden dieser Ebene geschnitten.

Der Abstand des Brennpunktes vom Parabelscheitel $= f = \frac{s}{2 \sin^2 \varphi}$, kann also alle Werte zwischen $\frac{s}{2}$ und ∞ annehmen. Entsprechend verändert sich auch die Lage der Leitlinie; für $\varphi = 90^0$ wird sie gebildet durch die (z)-Achse im alten Koordinatensystem und entfernt sich für abnehmende Werte von φ bis nach $-\infty$.

Wir diskutieren nun das durch Gleichung (12) dargestellte Kegelschnittsystem für die Parameterwerte von $k = 1$ bis $k = \frac{1}{\cos \varphi}$, wo φ einen bestimmten, konstanten Wert besitzt. In diesem Fall ist die Schnittkurve eine Hyperbel, deren Achsengleichung nach Gleichung (b) geschrieben werden kann:

$$\frac{x''^2}{\frac{s^2 k^2}{(k^2 - 1)^2}} - \frac{y''^2}{\frac{s^2 k^2}{(k^2 - 1)\,(1 - k^2 \cos^2 \varphi)}} = 1 \qquad \text{(e)}$$

Der Abstand des Hyperbelmittelpunktes vom Koordinatenursprung $= a_0 = - \frac{s}{k^2 - 1}$; für $k = 1$ liegt der Hyperbelmittelpunkt in

$-\infty$, wenn k zunimmt, so rückt er auf der negativen (x')-Achse ins Endliche und für $k = \frac{1}{\cos\varphi}$ beträgt sein Abstand vom Nullpunkt $x' = -s\operatorname{cotg}^2\varphi$. Der Abstand des Hyperbelscheitels S_1 wird bestimmt aus $x'_1 = \frac{s}{1+k}$; nimmt k alle Werte von 1 bis $\frac{1}{\cos\varphi}$ an, so bewegt sich der Scheitel S_1 auf der (x')-Achse von $x' = \frac{s}{2}$ bis $x' = \frac{s\cos\varphi}{1+\cos\varphi}$. Der Scheitel S_2 liegt im Abstand $x' = -\frac{s}{k-1}$ vom Nullpunkt; für die obigen Parameterwerte durchläuft er den negativen Teil der (x')-Achse von $x' = -\infty$ bis $x' = -\frac{s\cos\varphi}{1-\cos\varphi}$. Die reelle Halbachse der Hyperbel $= a = \frac{sk}{k^2-1}$, die imaginäre $= b = \frac{sk}{\sqrt{(k^2-1)(1-k^2\cos^2\varphi)}}$; für $k=1$ wird $a = b = \infty$ und für $k = \frac{1}{\cos\varphi}$ wird $a = \frac{s\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$ und $b = \infty$. Für alle Hyperbeln der Schar ist $b > a$.

Im Grenzfall $k = \frac{1}{\cos\varphi}$ besteht die Schnitthyperbel, deren Mittelpunkt in $x' = -s\operatorname{cotg}^2\varphi$ liegt, aus zwei parallelen Geraden von den Gleichungen

$$x_1' = \frac{s\cos\varphi}{1+\cos\varphi} \quad \text{und} \quad x_2' = -\frac{s\cos\varphi}{1-\cos\varphi} \tag{f}$$

Dies ergibt sich auch daraus, dass die numerische Excentrizität der Hyperbel für $k = \frac{1}{\cos\varphi}$ unendlich gross wird.

Sind die Parameter k grösser als $\frac{1}{\cos\varphi}$, so stellt die Gleichung (12) des Schnittkurvensystems wieder eine Schar von Ellipsen dar. Ihre Achsengleichung lautet:

$$\frac{x''^2}{\frac{s^2k^2}{(k^2-1)^2}} + \frac{y''^2}{\frac{s^2k^2}{(k^2-1)(k^2\cos^2\varphi-1)}} = 1 \tag{g}$$

Variiert man k von $\frac{1}{\cos\varphi}$ bis ∞, so geht der Ellipsenmittelpunkt von $x' = -s \cot^2\varphi$ bis $x' = 0$. Für $k = \frac{1}{\cos\varphi}$ sind die Halbachsen $a = \frac{s\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$ und $b = \infty$. Bei zunehmendem k werden die Achsen beide kleiner und zwar so, dass a immer kleiner ist als b. Für $k = \infty$ reduziert sich die Ellipse auf einen Punkt, den Nullpunkt O des ursprünglichen Koordinatensystems. Die Scheitel S_1 und S_2 der Ellipse haben für $k = \frac{1}{\cos\varphi}$ die Abstände $x_1' = \frac{s\cos\varphi}{1+\cos\varphi}$, bezüglich $x_2' = -\frac{s\cos\varphi}{1-\cos\varphi}$ und nähern sich bei wachsendem k immer mehr dem Nullpunkt, bis sie für $k = \infty$ mit ihm zusammenfallen.

Zusammenstellung:

k	$a_0 = \frac{s}{1-k^2}$	Halbachsen $a = \frac{sk}{1-k^2}$	Halbachsen $b = \frac{sk}{\sqrt{(1-k^2)(1-k^2\cos^2\varphi)}}$	Scheitelabstände x'_1	Scheitelabstände x'_2	e	$\frac{e}{a}$	Art der Kurve
0	s	0	0	s	s	0	0	Punkt F
1	$\pm\infty$	∞	∞	$\frac{s}{2}$	$\pm\infty$	∞	1	Parabel
$\frac{1}{\cos\varphi}$	$-s\,\mathrm{cotg}^2\varphi$	$\frac{s\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$	∞	$\frac{s\cos\varphi}{1+\cos\varphi}$	$-\frac{s\cos\varphi}{1-\cos\varphi}$	∞	∞	2 parallele Gerade
∞	0	0	0	0	0	0	0	Punkt O