Die Rotationshyperboloïde, erzeugt durch projektivische Ebenenbüschel

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1911)**

PDF erstellt am: **28.06.2024**

§ 8.

Die Rotationshyperboloïde, erzeugt durch projektivische Ebenenbüschel.

Die Gleichung der einschaligen Hyperboloïde des Rotationsflächensystems kann nach Gleichung (1) auch in folgender Form geschrieben werden:

$$(k^2-1)\,x^2+(k^2-1)\,y^2-z^2+2\,s\cdot x-s^2=0 \qquad \text{(a)}$$

In dieser Gleichung kann der Parameter k alle Werte von $k=1$ bis $k=\infty$ annehmen. Nun kann man sich jedes einschalige Hyperboloïd entstanden denken aus zwei projektivischen Ebenenbüscheln von den Gleichungen

$$E_1+\lambda\,E_2=0 \qquad \text{und} \qquad E_3+\lambda\,E_4=0$$

Wenn in diesen zwei Gleichungen der Parameter λ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, so erzeugen die aufeinander folgenden Schnittlinien je zweier entsprechender Ebenen der beiden Büschel ein Hyperboloïd, dessen Gleichung lautet: $E_1\,E_4-E_2\,E_3=0$. Wir suchen daher die Gleichung (a.) auf diese Form zu bringen. Ersetzt man in ihr

$(k^2-1)\,x^2+2\,s\,x-s^2$ durch $[(k+1)\,x-s]\cdot[(k-1)\,x+s]$ und

$-[z^2-(k^2-1)\,y^2]$ durch $-[z+\sqrt{k^2-1}\cdot y]\cdot[z-\sqrt{k^2-1}\cdot y]$

so geht sie über in

$$[(k+1)\,x-s]\cdot[(k-1)\,x+s]$$
$$-[z+\sqrt{k^2-1}\cdot y]\cdot[z-\sqrt{k^2-1}\cdot y]=0 \qquad (13),$$

und dies ist der Form nach die Gleichung des Hyperboloïdes als Erzeugnis je zweier projektivischer Ebenenbüschel.

Die Gleichung des einen Ebenenbüschels lautet

$$E_1+\lambda\,E_2=(k+1)\,x-s+\lambda\,[z+\sqrt{k^2-1}\cdot y]=0$$

und diejenige des zu ihm projektivischen Ebenenbüschels:

$$E_3+\lambda\,E_4=z-\sqrt{k^2-1}\cdot y+\lambda\,[(k-1)\,x+s]=0$$

Das erste Ebenenbüschel hat die beiden Grundebenen:

$$E_1: x=\frac{s}{k+1} \quad \text{und} \quad E_2: z=-\sqrt{k^2-1}\cdot y$$

Die Grundebene E_1 liegt parallel zur Koordinatenebene (y z) im Abstand $x=\frac{s}{k+1}$. Für alle k zwischen $k=1$ bis $k=\infty$ variiert dieser Abstand von $x = \frac{s}{2}$ bis $x = 0$. Die Grundebene E_2 steht senkrecht auf der (y z)-Ebene des Koordinatensystems und geht durch die (x)-Achse desselben, sie geht durch den II., III, V. und VIII. Oktanten. Die Scheitelkante S_1 des ersten Ebenenbüschels, also die Schnittgerade der beiden Grundebenen E_1 und E_2, geht folglich durch den II. und V. Oktanten, liegt parallel zur (y z)-Ebene und schneidet die (x)-Achse des Koordinatensystems im Abstand $x = \frac{s}{k+1}$ zwischen $x = 0$ und $x = \frac{s}{2}$. Für das Hyperboloïd $k = 1$ liegt die Scheitelkante S_1 in der (x y)-Ebene und hat die Gleichung $x = \frac{s}{2}$. Bei wachsendem k nähert sich der Schnittpunkt auf der (x-)Achse dem Nullpunkt, und der mit der (x y)-Ebene gebildete Winkel wird immer grösser, für $k = \infty$ fällt die Scheitelkante S_1 mit der (z)-Achse zusammen.

Das zweite Ebenenbüschel hat die beiden Grundebenen:

$$E_3 : z = \sqrt{k^2 - 1} \cdot y \quad \text{und} \quad E_4 : x = -\frac{s}{k-1}$$

Die Grundebene E_3 steht senkrecht auf der (y z)-Ebene des Koordinatensystems und enthält die (x)-Achse desselben; sie geht durch die Oktanten I, IV, VI, VII. Die Grundebene E_4 ist parallel der (y z)-Ebene des Koordinatensystems und hat vom Nullpunkt den Abstand $x = -\frac{s}{k-1}$; für die verschiedenen Flächen der Schar kann derselbe also variieren zwischen $x = -\infty$ und $x = 0$. Die Scheitelkante S_2 des zweiten Ebenenbüschels ist also parallel zur (y z)-Ebene, schneidet den negativen Teil der (x)-Achse im Abstand $x = -\frac{s}{k-1}$ und geht durch den IV. und VII. Oktanten. Für das Hyperboloïd $k = \infty$ fällt die Scheitelkante S_2 des zweiten Büschels mit der (z)-Achse, also auch mit der Scheitelkante S_1 des ersten Büschels, zusammen. Lassen wir den Parameter k successive kleinere Werte annehmen, so wird der Winkel, den die Scheitelkante S_2 mit der (x y)-Ebene bildet, immer kleiner, und ihr Schnittpunkt mit der negativen (x)-Achse entfernt sich immer weiter vom Nullpunkt. Für das Rotationshyperboloïd $k = 1$ liegt die Scheitelkante S_2 des zweiten projektivischen Ebenenbüschels in der (x y)-Ebene im Unendlichen.

Diese zwei projektivischen Ebenenbüschel $E_1 + \lambda E_2 = 0$ und $E_3 + \lambda E_4 = 0$ erzeugen auf jedem Hyperboloïd vom Parameter k eine Schar von Geraden oder Erzeugenden. Nach der Gleichung (13) kann man sich aber das Rotationshyperboloïd noch aus zwei andern projektivischen Ebenenbüscheln entstanden denken, nämlich aus folgenden:

$$E_1' + \lambda E_2' = (k+1)x - s + \lambda\,[z - \sqrt{k^2-1}\cdot y] = 0 \quad \text{und}$$

$$E_3' + \lambda E_4' = z + \sqrt{k^2-1}\cdot y + \lambda\,[(k-1)x + s] = 0$$

Das Ebenenbüschel $E_1' + \lambda E_2' = 0$ hat die beiden Grundebenen

$$E_1' : x = \frac{s}{k+1} \quad \text{und} \quad E_2' : z = \sqrt{k^2-1}\cdot y$$

Die Grundebene E_1' ist identisch mit der Grundebene E_1 der ersten zwei projektivischen Ebenenbüschel, E_2' dagegen liegt in Bezug auf die (x z)-Ebene des Koordinatensystems symmetrisch zur Ebene E_2. Die Scheitelkante S_1' dieses Ebenenbüschels, also die Schnittgerade der Grundebenen E_1' und E_2', liegt daher parallel zur (y z)-Ebene, schneidet die (x)-Achse im Abstand $x = \frac{s}{k+1}$ also zwischen $x = 0$ und $x = \frac{s}{2}$, und geht durch den I. und VI. Oktanten. Für das Hyperboloïd $k = 1$ liegt die Scheitelkante S_1' in der (x y)-Ebene und hat die Gleichung $x = \frac{s}{2}$, sie ist also identisch mit der Scheitelkante S_1 des ersten Büschels. Bei wachsendem k nähert sich der Schnittpunkt auf der (x)-Achse dem Nullpunkt, und der mit der (x y)-Ebene gebildete Winkel wird immer grösser, und zwar so, dass die Scheitelkante S_1' in Bezug auf die (x z)- oder (x y)-Ebene symmetrisch liegt zur entsprechenden Scheitelkante S_1; für $k = \infty$ fällt S_1' mit der (z)-Achse, also auch wieder mit S_1 zusammen.

Das Ebenenbüschel $E_3' + \lambda E_4' = 0$ hat die beiden Grundebenen $E_3' : z = -\sqrt{k^2-1}\cdot y$ und $E_4' : x = -\frac{s}{k-1}$

E_4' ist identisch mit E_4, und E_3' liegt in Bezug auf die (x z)- oder (x y)-Ebene des Koordinatensystems symmetrisch zu E_3. Daher wird für jedes bestimmte Hyperboloïd die Scheitelkante S_2' dieses Ebenenbüschels, das zu $E_1' + \lambda E_2' = 0$ projektivisch ist, zu der entsprechenden Scheitelkante S_2 des Ebenenbüschels $E_3 + \lambda E_4 = 0$ in Bezug auf die (x z)-Ebene symmetrisch liegen. Für $k = \infty$ fällt S_2' mit S_2 in der (z)-Achse zusammen, für $k = 1$ wird sowohl S_2 als auch S_2' von der unendlich fernen Geraden der (x y)-Ebene gebildet.

Die vier Scheitelkanten S_1, S_2, S_1' und S_2' der 4 Ebenenbüschel, von denen je zwei zueinander projektivisch sind, haben für jedes Rotationshyperboloïd eine ganz bestimmte, feste Lage. Wenn aber der Parameter k alle Werte von $k = 1$ bis $k = \infty$ durchläuft, so ändert sich successive auch die Lage dieser Scheitelkanten, und jede derselben erzeugt dabei eine developpable Fläche. Die Gleichung derselben wird gefunden, indem man aus den beiden Grundebenen des entsprechenden Büschels den Parameter k eliminiert. Nun führt aber diese Elimination bei jedem dieser vier Ebenenbüschel zu derselben Gleichung; man erhält nämlich

$$x^2 z^2 + 2 s x y^2 - s^2 y^2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$x^2 z^2 - s y^2 (s - 2 x) = 0 \tag{14}$$

Dies ist die Gleichung einer Fläche 4. Grades in den Coordinaten x y z. Variiert also der Parameter k von $k = 1$ bis $k = \infty$, so erzeugen die Scheitelkanten S_1, S_2, S_1' und S_2' der vier Ebenenbüschel alle dieselbe developpable Fläche 4. Grades, welche durch Gleichung (14) bestimmt ist. Den Verlauf dieser Fläche kennen wir bereits aus ihrer Entstehungsweise. Da die Koordinaten y und z nur quadratisch in der Flächengleichung (14) vorkommen, so liegt die Fläche wirklich symmetrisch in Bezug auf die beiden Koordinatenebenen (x y) und (x z). Untersucht man die Schnittkurven der Fläche 4. Grades mit den Koordinatenebenen, so zeigt es sich, dass sowohl die (x)-Achse als auch die (z)-Achse Doppelgeraden der Fläche sind. Ferner wird die (x y)-Ebene von ihr in den beiden zur (y)-Achse Parallelen $x = \frac{s}{2}$ und $x = -\infty$ geschnitten. Eine zur (y z)-Ebene parallele Schnittebene im Abstand $x = c$ vom Ursprung erzeugt als Schnittkurve zwei in der (x)-Achse sich schneidende Geraden von den Gleichungen $z = \pm \frac{1}{c} \sqrt{s (s - 2 c)} \cdot y$. Für $c = -\infty$, sowie auch für $c = + \frac{s}{2}$ fallen die beiden Geraden je in der (x y)-Ebene zusammen, das eine Mal in der unendlich fernen Geraden dieser Ebene, das andere Mal in der Geraden $x = \frac{s}{2}$. Für $c = 0$ fallen beide Geraden zusammen mit der (z)-Achse des Koordinatensystems. Wenn $c > \frac{s}{2}$ ist, so wird die Schnittkurve imaginär, die Fläche 4. Grades liegt also ihrer ganzen Ausdehnung nach links von der Ebene $x = \frac{s}{2}$. In Bezug auf die Entstehungsweise der Fläche können wir nach dem Früheren noch schliessen, dass der im I. und VI. Oktanten liegende Teil derselben durch die Scheitelkante S_1' erzeugt wird, der im II. und V. durch S_1, der im IV. und VII. durch S_2 und der im III. und VIII. Oktanten liegende Teil durch die Scheitelkante S_2'.

§ 9.

Kreispunkte der Flächenschar.

Die Achsengleichung der centrischen Flächen 2. Grades hat allgemein die Form:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Das Vorzeichen von b^2 und c^2 ist dabei noch unbestimmt gelassen. — Für jede Fläche, deren Gleichung diese Form hat, ist es möglich, zwei Systeme paralleler Schnittebenen so zu bestimmen, dass alle Schnittkurven Kreise sind. Die äussersten Ebenen der beiden Systeme sind Tangentialebenen der Fläche; sie schneiden diese in einem unendlich kleinen Kreise, in ihrem Berührungspunkte, und ein solcher Punkt heisst K r e i s p u n k t oder Umbilikus. Jede centrische Fläche besitzt also im allgemeinen 4 reelle Kreispunkte; sie liegen in der (x z)-Ebene und haben die Koordinaten:

$$x = \pm \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} \quad \text{und} \quad z = \pm c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$$

Unsere auf die Achsen transformierte Flächengleichung heisst nun: