Ort der Schnittpunkte von drei sich rechtwinklig schneidenden Tangentialebenen für die verschiedenen Flächen des Rotationsflächensystems

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1911)**

PDF erstellt am: **28.06.2024**

also ein hyperbolisches Paraboloïd, wenn die Verbindungsgerade $P_1 P_2$ die (x)-Achse schneidet, zwei Ebenen, wenn sie entweder zur (z)- oder zur (y)-Achse parallel ist, in allen andern Fällen dagegen ein einschaliges Hyperboloïd.

§ 11.

Ort der Schnittpunkte von drei sich rechtwinklig schneidenden Tangentialebenen für die verschiedenen Flächen des Rotationsflächensystems.

Die Achsengleichung einer beliebigen centrischen Fläche 2. Grades hat allgemein die Form $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Nun ist der Ort aller Punkte im Raum, von denen aus drei zueinander senkrecht stehende Tangentialebenen an eine solche Fläche gelegt werden können, eine mit der Fläche concentrische Kugel vom Radius $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Da die Halbachsen unserer Rotationsfläche $a = b = \frac{s\,k}{1 - k^2}$ und $c = \frac{s\,k}{\sqrt{1 - k^2}}$ sind, so ist der Radius der Kugel von obiger Beschaffenheit

$$R = \sqrt{\frac{2\,s^2\,k^2}{(1 - k^2)^2} + \frac{s^2\,k^2}{1 - k^2}} = \frac{s\,k}{1 - k^2} \sqrt{3 - k^2} \qquad \text{(a)}$$

Wir können aus diesem Wert für R bereits schliessen, dass nur für diejenigen Flächen des Rotationsflächensystems eine Kugel von der oben erwähnten Eigenschaft besteht, für welche $k < \sqrt{3}$ ist, also für alle Rotationsellipsoïde und für die Rotationshyperboloïde $k < \sqrt{3}$. Für jede dieser Flächen lässt sich die Gleichung einer Kugel bestimmen, deren sämtliche Flächenpunkte Schnittpunkte von je drei senkrecht aufeinander stehenden Tangentialebenen an die betreffende Fläche sind; diese Kugelgleichung lautet

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{s^2\,k^2}{(1 - k^2)^2} (3 - k^2) \qquad (17)$$

Um diese Gleichung auf das alte Coordinatensystem zu beziehen, haben wir in ihr $x' = x - \frac{s}{1 - k^2}$, $y' = y$ und $z' = z$ zu setzen; die Gleichung (17) geht dann über in

$$F(x\,y\,z\,k) = x^2 - \frac{2\,s}{1-k^2}\,x + y^2 + z^2 + \frac{s^2\,(k^4 - 3\,k^2 + 1)}{(1-k^2)^2} = 0 \qquad (17\,a)$$

Es soll nun die Enveloppe aller Kugeln bestimmt werden, die den unendlich vielen Flächen des Rotationsflächensystems entsprechen. Dies geschieht durch Elimination des Parameters k aus der Gleichung (17 a) und der folgenden;

$$\frac{\partial F}{\partial k} = (s - 2\,x)\,k^4 + 4\,x\,k^2 - 2\,x - s = 0$$

Wir bestimmen aus der letzten Gleichung die Wurzeln k^2; die eine wird $k_1^2 = 1$, die andere $k_2^2 = \frac{2\,x + s}{2\,x - s}$. Nur die letzte liefert ein brauchbares Resultat. Setzt man ihren Wert in Gleichung (17 a) ein, so geht sie über in

$$2\,x^2 + y^2 + z^2 - s\,x + \frac{5}{4}\,s^2 = 0$$

Dies ist die Gleichung eines imaginären Rotationsellipsoïdes. Wir finden also das Resultat, dass die durch Gleichung (17 a) gegebene Schar von Kugelflächen keine Enveloppe besitzt.

Der Mittelpunkt des obigen imaginären Ellipsoïdes liegt auf der (x)-Achse im Abstand $x = + \frac{s}{4}$ vom Nullpunkt. Seine Halbachse a hat die Länge $a = \frac{3}{4\,s}$, sie liegt in der (z)-Achse und ist Rotationsachse des Ellipsoïdes. Die beiden andern Halbachsen sind $b = c = \frac{3\,s}{\sqrt{8}}$

Die Mittelpunkte der Kugeln von der oben verlangten Beschaffenheit fallen immer mit denjenigen der entsprechenden Rotationsflächen zusammen; sie liegen also auf der (x)-Achse im Abstand $x = \frac{s}{1-k^2}$ vom Coordinatenursprung. Nun hat ein Hauptschnitt der durch Gleichung (17) dargestellten Kugel parallel zur (y z)-Ebene des Coordinatensystems folgende Kreisgleichung:

$$y'^2 + z'^2 = \frac{s^2\,k^2}{(1-k^2)^2}\,(3 - k^2) \qquad (b)$$

Wenn wir nacheinander immer andere Rotationsflächen des Systems ins Auge fassen, so ändert sich der Radius dieses Kreises, und sein Mittelpunkt rückt auf der (x)-Achse des Coordinatensystems vorwärts. Die aufeinander folgenden Kreise erzeugen so wieder eine Fläche, deren Gleichung sich durch Elimination des Parameters k aus der Kreisgleichung (b) und der Gleichung der Schnittebene $x = \frac{s}{1 - k^2}$ ergibt.

Sie wird, bezogen auf das ursprüngliche Koordinatensystem:

$$2x^2 - y^2 - z^2 - sx - s^2 = 0 \qquad (18)$$

Dies ist die Gleichung einer Fläche 2. Grades; durch die Substitution $x = x' + \frac{s}{4}$, $y = y'$ und $z = z'$ erhält man die Achsengleichung

$$\frac{x'^2}{\frac{9}{16}s^2} - \frac{y'^2}{\frac{9}{8}s^2} - \frac{z'^2}{\frac{9}{8}s^2} = 1$$

Die obige Hauptschnittfläche ist also ein zweischaliges Rotationshyperboloïd. Die reelle Achse desselben liegt in der (x)-Achse des Coordinatensystems, sie ist Rotationsachse. Der Flächenmittelpunkt O′ hat die Koordination $x = \frac{s}{4}$, $y = z = 0$, die reelle Halbachse $a = \frac{3}{4}s$. Der eine Schnittpunkt des Rotationshyperboloïdes mit der (x)-Achse befindet sich daher im Punkte F (s, 0, 0) derselben, der andere im Abstand $x = -\frac{s}{2}$ vom alten Nullpunkt O. Die Schnittkurve des zweischaligen Hyperboloïdes mit der (x y)-Ebene ist eine Hyperbel; die Asymptoten derselben haben die Gleichungen $y' = \pm \frac{4}{\sqrt{8}} x'$, oder im alten Koordinatensystem $y = \pm \frac{4}{\sqrt{8}} \left(x - \frac{s}{4}\right)$. Der Winkel φ, den die Asymptoten mit der (x)-Achse einschliessen, ist bestimmt durch $\operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{\sqrt{8}}$, er ist also grösser als 45°.

Die Hauptschnittfläche (18) wird von der (x z)-Ebene ebenfalls in einer Hyperbel geschnitten; diese ist kongruent zu der Schnitthyperbel in der (x y)-Ebene.

Aus der Beschaffenheit der Fläche dieses zweischaligen Rotationshyperboloïdes sehen wir, dass die Centra der Kugelflächen mit allen Punkten der positiven und negativen (x)-Achse zusammenfallen können, ausgenommen mit denjenigen der Strecke von $x = -\frac{s}{2}$ bis $x = +s$. Demnach existiert für alle Flächen des Rotationsflächensystems, deren Mittelpunkte entweder auf der positiven (x)-Achse zwischen $x = +s$ und $x = +\infty$, oder auf der negativen (x-)Achse zwischen $x = -\infty$ und $x = -\frac{s}{2}$ liegt, eine Kugel, welche der oben geforderten Bedingung Genüge leistet. Für diejenigen einschaligen Rotationshyperboloïde des Flächensystems, deren Mittelpunkte zwischen $x = -\frac{s}{2}$ und $x = 0$ liegen, ist $k > \sqrt{3}$, und für sie lässt sich keine solche Kugelfläche finden.

Wir betrachten nun das Schnittkurvensystem, das durch die unendlich vielen, durch Gleichung (17) bestimmten Kugelflächen in der (x y)-Ebene des alten Koordinatensystems erzeugt wird, wenn der variable Parameter k alle Werte von $k = o$ bis $k = \sqrt{3}$ durchläuft. Jede Kugel erzeugt als Schnittkurve einen Kreis, dessen Centrum auf der (x)-Achse liegt; seine Gleichung lautet $x'^2 + y'^2 = \frac{s^2 k^2}{(1 - k^2)^2}(3 - k^2)$. Wenn der Parameter k alle Werte von $k = 0$ bis $k = 1$ annimmt, so durchläuft der Kreismittelpunkt die positive (x)-Achse von $x = s$ bis $x = +\infty$, und für die Parameterwerte von $k = 1$ bis $k = \sqrt{3}$ rückt das Kreiscentrum auf der negativen (x)-Achse von $x = -\infty$ bis $x = -\frac{s}{2}$. Die Abstände x_1 und x_2 der auf der (x)-Achse liegenden Kreisscheitel S_1 und S_2 sind:

$$x_1 = \frac{s}{1 - k^2} - \frac{s\,k}{1 - k^2}\sqrt{3 - k^2}, \quad \text{bezüglich}$$

$$x_2 = \frac{s}{1 - k^2} + \frac{s\,k}{1 - k^2}\sqrt{3 - k^2}$$

Ueber die Veränderung ihrer Lage bei veränderlichem Parameter gibt folgende Tabelle Aufschluss:

k	S_1	S_2
0	$x_1 = s$	$x_2 = s$
1	$x_1 = -\infty$	$x_2 = \infty$
$\sqrt{3}$	$x_1 = -\frac{s}{2}$	$x_2 = -\frac{s}{2}$

Für die Rotationsfläche $k = 0$ reduziert sich der Schnittkreis, also auch die entsprechende Kugelfläche, auf den Punkt F (s, 0, 0). Wenn k von 0 bis 1 wächst, so rücken die beiden Kreisscheitel ins Unendliche, S_1 in negativer, S_2 in positiver Richtung. Alle Rotationsflächen $o < k < 1$ werden somit von der entsprechenden Kugelfläche vollständig eingeschlossen. Wenn k den Wert 1 überschreitet, so ändert sich die Bewegungsrichtung der beiden Kreisscheitel, sie rücken wieder ins Endliche, und für $k = \sqrt{3}$ fallen sie im Punkte $P\left(-\frac{s}{2}, 0, 0\right)$ zusammen. Auch für das Hyperboloïd $k = \sqrt{3}$ reduziert sich der Kreis, folglich auch die entsprechende Kugelfläche, auf einen Punkt der (x)-Achse.

§ 12.

Diskussion der Hauptschnittfläche 3. Grades.

Bei der Besprechung der Hauptschnitte des Rotationsflächensystems parallel zur (y z)-Ebene wurde gezeigt, dass sie in ihrer Aufeinanderfolge eine Fläche 3. Grades erzeugen, deren Gleichung nach § 6 lautet:

$$x z^2 - s(x^2 - y^2) + s^2 x = 0 \qquad (11)$$

Im Folgenden soll nun diese Hauptschnittfläche diskutiert werden.

Um zunächst ihren Asymptoten- oder Richtungskegel zu bestimmen, machen wir Gleichung (11) mit w homogen; sie geht dann über in $x z^2 - s x^2 w + s y^2 w + s^2 w^2 = 0$. Da die unendlich ferne Ebene die Gleichung $w = 0$ hat, so findet man den Schnitt der Hauptschnittfläche mit ihr, indem man in der homogenen