Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Band: - (1911)

Artikel: Zur Geometrie des Dreiecks

Kapitel

Autor: Droz-Farny, A. / Silder, G. / Schenker, O.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319223

§ 1.

Um die Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks ABC als Durchmesser schlagen wir Kreise, so gehen diese Kreise je durch die Fusspunkte der von den Endpunkten der betreffenden Seite ausgehenden Höhenperpendikel. Die Höhenperpendikel AD, BE, CF des gegebenen Dreiecks sind daher die gemeinsamen Sehnen je zweier dieser Kreise, und der Höhenpunkt H des Dreiecks ABC ist der Punkt gleicher Potenzen in Bezug auf diese drei Kreise.

Die drei Höhen des Dreiecks ABC mögen nun die entsprechenden Kreise in den Punktenpaaren i, I; k, K; l, L schneiden, und zwar mögen Di, Ek, Fl je dieselben Richtungen wie DA, EB, FC und DI, EK, FL die entgegengesetzten Richtungen haben. Sollen die Punktenpaare i, I; k, K; l, L alle reell werden, so muss das Dreieck ABC spitzwinklig sein. Alsdann liegen die Ecken A, B, C ausserhalb der um die Gegenseiten als Durchmesser beschriebenen Kreise, und die Punkte i, k, l liegen innerhalb des Dreiecks.

Da nun H der Potenzpunkt der drei Kreise ist, so haben wir

$$Hi \cdot HI = Hk \cdot HK = Hl \cdot HL =$$
$$= HA \cdot HD = HB \cdot HE = HC \cdot HF.$$

Beim spitzwinkligen Dreieck ist $HA \cdot AD$ negativ, und es liegt somit der Höhenpunkt H zwischen den Punktenpaaren iI, kK, lL.

Nun ist $DH = BD \cdot \operatorname{cotg} C = \frac{c \cos B \cos C}{\sin C} = 2R \cos B \cos C,$

---

*) In der Programmabhandlung des Gymnasiums zu Beuthen 1894: «Aufgaben und Lehrsätze über Linien im Dreieck» betrachtet Herr O. Bröckerhoff die oben mit i, k, l bezeichneten Punkte so wie die Punkte p, q, r, und zeigt im Lehrsatz VI wie oben, dass die Geraden Ap, Bq, Cr sich in einem nämlichen Punkte n schneiden. Diese Betrachtungen suchte ich zu vervollständigen und zu erweitern, und habe darüber auch mit meinem Freunde, Herrn A. Droz-Farny in Pruntrut, korrespondiert; so ist unsere obige gemeinsame Arbeit entstanden. G. Sidler.

wo R der Radius des Umkreises von ABC ist; ferner $HA = = \frac{AF}{\sin B} = \frac{b \cos A}{\sin B} = 2 R \cos A$. Wir finden somit

$$\begin{aligned} Hi \cdot HI = Hk \cdot HK = Hl \cdot HL = \\ = HA \cdot HD = HB \cdot HE = HC \cdot HF = \\ = -4 R^2 \cos A \cos B \cos C. \end{aligned} \qquad 1.$$

Aus 1 folgt $\frac{Hk}{Hl} = \frac{HL}{HK}$. Die Scheiteldreiecke kHl und KHL sind also einander ähnlich, und kl und KL liegen zueinander antiparallel.

Die Polare von H in Bezug auf den Kreis um BC als Durchmesser geht durch die zwei übrigen Diagonalpunkte des Vierecks BECF d. h. durch A und durch den Schnittpunkt D′ von EF mit BC. Die zu H in Bezug auf die Strecken iI, kK, lL harmonischen Punkte sind daher die Ecken A, B, C des gegebenen Dreiecks.

Auf den Höhenperpendikeln des Dreiecks ABC haben wir also die harmonischen Relationen:

$$(AH, iI) = -1, \ (BH, kK) = -1, \ (CH, lL) = -1. \qquad 2.$$

Die Punktenpaare i, I; k, K; l, L kann man daher auch definieren als die Punktenpaare, die im Dreieck ABC die Eckabschnitte AH, BH, CH der Höhenperpendikel harmonisch teilen, und zwar so, dass die Mitten dieser Punktenpaare die Fusspunkte D, E, F der betreffenden Höhenperpendikel sind.

Aus dieser Definition folgt $Di^2 = DI^2 = DH \cdot DA$. Die ähnlichen Dreiecke CDH und BDA geben aber $\frac{DH}{CD} = \frac{DB}{DA}$, und somit wird $Di^2 = DI^2 = CD \cdot DB$, woraus wieder folgt, dass die Dreiecke BiC und BIC respektive in i und I rechtwinklig sind, und somit i und I die Schnittpunkte des Höhenperpendikels AD mit dem um BC als Durchmesser beschriebenen Kreise darstellen. Dieses ist wieder die frühere Definition.