

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): - **(1911)**

PDF erstellt am: **28.06.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

Von den 12 zuletzt eingeführten Geraden schneiden sich daher noch 8 mal je 3 in einem nämlichen Punkte. Nämlich wir haben

$$\left. \begin{array}{l} AP \\ BQ \\ CR \end{array} \right\} = N = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } IKL,$$

$$\left. \begin{array}{l} Ap \\ Bq \\ Cr \end{array} \right\} = n = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } ikl,$$

$$\left. \begin{array}{l} AP \\ BQ' \\ Cr' \end{array} \right\} = N' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } iKL,$$

$$\left. \begin{array}{l} Ap \\ Bq' \\ CR' \end{array} \right\} = n' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } Ikl,$$

$$\left. \begin{array}{l} Ap' \\ BQ \\ CR' \end{array} \right\} = N'' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } IkL, \quad 7.$$

$$\left. \begin{array}{l} AP' \\ Bq \\ Cr' \end{array} \right\} = n'' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } iKl,$$

$$\left. \begin{array}{l} AP' \\ Bq' \\ CR \end{array} \right\} = N''' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } IKl,$$

$$\left. \begin{array}{l} Ap' \\ BQ' \\ Cr \end{array} \right\} = n''' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } ikL.$$

Dies vorausgesetzt haben wir auf den in 6 eingeführten 12 Geraden je die Punkte

$$\begin{array}{lll} APNN', & BQNN'', & CRNN''' \\ Apnn', & Bqnn'', & Crnn''' \\ AP'n''N''', & BQ'n'''N', & CR'n'N'' \\ Ap'N''n''', & Bq'N'''n', & Cr'N'n''. \end{array} \quad 8.$$

### § 3.

Da  $AK = Ak = AL = Al$ , so liegen die vier Punkte  $K, k, L, l$  auf einem Kreise vom Mittelpunkt  $A$ . Auf diesem Kreise

hat das Viereck  $KkLl$  die Eigenschaft, dass von den Gegenseiten  $Kk$  und  $Ll$  jede durch den Pol der andern geht. Da ferner  $\overline{AK}^2 = AE \cdot AC$ , so ist der obige Kreis  $A$  orthogonal zum Kreise um  $BC$  als Durchmesser.

Betrachten wir einen beliebigen Kreis, dessen Mittelpunkt wir  $A$  nennen, ziehen in diesem Kreise irgend eine Sehne  $Ll$ , deren Pol wir mit  $B$  bezeichnen, und legen durch  $B$  irgend eine zweite Sehne  $Kk$ , so liegt der Pol  $C$  von  $Kk$  auf der Polaren von  $B$  d. h. auf der Geraden  $Ll$ . Sei endlich  $\left. \begin{matrix} Kk \\ Ll \end{matrix} \right\} = H$ , so ist  $H$  der Pol der Geraden  $BC$ .

Dies vorausgesetzt ist die Figur  $ABCHKkLl$  identisch mit der in §§ 1 und 2 ebenso bezeichneten Figur. Denn die Geraden  $BKk$  und  $CLl$  stehen respektive senkrecht zu  $AC$  und zu  $AB$ , und somit ist  $H$  der Höhenpunkt des Dreiecks  $ABC$ , und da  $AK$  und  $Ak$  respektive senkrecht zu  $CK$  und  $Ck$  stehen, so sind  $K$  und  $k$  die Schnittpunkte des Höhenperpendikels  $BE$  von  $ABC$  mit dem um  $AC$  als Durchmesser beschriebenen Kreise, und analog sind  $L$  und  $l$  die Schnittpunkte des Höhenperpendikels  $CF$  von  $ABC$  mit dem um  $AB$  als Durchmesser beschriebenen Kreise.

Im Viereck  $KkLl$  ist der eine Diagonalpunkt  $H = \left\{ \begin{matrix} Kk \\ Ll \end{matrix} \right.$ , und die zwei andern Diagonalpunkte seien  $u$  und  $u'$ , nämlich

$$u = \left\{ \begin{matrix} Kl \\ kL \end{matrix} \right., \quad u' = \left\{ \begin{matrix} KL \\ kl \end{matrix} \right.$$

Dies vorausgesetzt liegen  $u$  und  $u'$  auf den Polaren  $BC$  von  $H$  in Bezug auf den Kreis  $A$ , und man hat  $(BC, uu') = -1$ .

Die Polare von  $u'$  ist die Gerade  $Hu$ , und auf dieser liegen die Pole der Geraden  $u'KL$  und  $u'kl$ , d. h.:

$$\text{Die Punkte } P = \left\{ \begin{matrix} BL \\ CK \end{matrix} \right. \text{ und } p = \left\{ \begin{matrix} Bl \\ Ck \end{matrix} \right. \text{ liegen auf } Hu.$$

Die Polare von  $u$  ist die Gerade  $Hu'$ , und auf dieser liegen die Pole der Geraden  $uKl$  und  $ukL$ , d. h.:

$$\text{Die Punkte } P' = \left\{ \begin{matrix} Bl \\ CK \end{matrix} \right. \text{ und } p' = \left\{ \begin{matrix} BL \\ Ck \end{matrix} \right. \text{ liegen auf } Hu'.$$

Wir erhalten also den Satz:

Die Geraden  $Pp$  und  $P'p'$  gehen durch den Punkt  $H$ , und schneiden  $BC$  respektive in den Punkten  $u$  und  $u'$ .

Betrachten wir jetzt ebenso die Vierecke  $LIIi$  und  $IiKk$ , so haben wir die folgenden Resultate:

Seien  $u, v, w, u', v', w'$  die Punkte:

$$\begin{aligned} u &= \left\{ \begin{array}{l} Kl \\ kL \end{array} \right\}, v = \left\{ \begin{array}{l} Li \\ lI \end{array} \right\}, w = \left\{ \begin{array}{l} Ik \\ iK \end{array} \right\}, \\ u' &= \left\{ \begin{array}{l} KL \\ kl \end{array} \right\}, v' = \left\{ \begin{array}{l} LI \\ li \end{array} \right\}, w' = \left\{ \begin{array}{l} IK \\ ik \end{array} \right\}, \end{aligned} \quad 9.$$

so liegen  $u, u'$  auf der Geraden  $BC$ ;  $v, v'$  auf der Geraden  $CA$ ;  $w, w'$  auf der Geraden  $AB$ , und teilen je diese Strecken harmonisch, d. h.:

$$(BC, uu') = -1, (CA, vv') = -1, (AB, ww') = -1. \quad 10.$$

Ferner gehen die Geraden:

$$Pp, P'p', Qq, Q'q', Rr, R'r' \quad 11.$$

alle durch den Höhenpunkt  $H$  des Dreiecks  $ABC$ , und die Geraden  $HPp$  und  $HP'p'$  schneiden  $BC$  respektive in den Punkten  $u$  und  $u'$ ; die Geraden  $HQq$  und  $HQ'q'$  schneiden  $CA$  in den Punkten  $v$  und  $v'$ ; die Geraden  $HRr$  und  $HR'r'$  schneiden  $AB$  in den Punkten  $w$  und  $w'$ .

In Folge von 10 haben wir daher die harmonischen Strahlensysteme:

$$\left. \begin{array}{l} HB \ kK \\ HC \ lL \\ Hu \ Pp \\ Hu' \ P'p' \end{array} \right\} = -1, \left. \begin{array}{l} HC \ lL \\ HA \ iI \\ Hv \ Qq \\ Hv' \ Q'q' \end{array} \right\} = -1, \left. \begin{array}{l} HA \ iI \\ HB \ kK \\ Hw \ Rr \\ Hw' \ R'r' \end{array} \right\} = -1. \quad 12.$$

Das Viereck  $PpP'p'$  hat zu Diagonalknoten  $B, C, H$ ,  
 Das Viereck  $QqQ'q'$  hat zu Diagonalknoten  $C, A, H$ ,  
 Das Viereck  $RrR'r'$  hat zu Diagonalknoten  $A, B, H$ ,  
 13.

und wir haben die harmonischen Punktsysteme:

$$\begin{aligned} (Pp, Hu) &= -1, (Qq, Hv) = -1, (Rr, Hw) = -1, \\ (P'p', Hu') &= -1, (Q'q', Hv') = -1, (R'r', Hw') = -1, \end{aligned} \quad 14.$$

und ferner auf den durch die Ecken  $A, B, C$  des Stammdreiecks gehenden Strahlen die harmonischen Punktsysteme:

$$\begin{aligned}
 (AK, Rr') &= -1, & (BL, Pp') &= -1, & (CI, Qq') &= -1, \\
 (Ak, rR') &= -1, & (Bl, pP') &= -1, & (Ci, qQ') &= -1, \\
 (AL, QQ') &= -1, & (BI, RR') &= -1, & (CK, PP') &= -1, \\
 (Al, qq') &= -1, & (Bi, rr') &= -1, & (Ck, pp') &= -1.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Durch jeden der Punkte  $u, v, w, u', v', w'$  gehen nun 4 Strahlen, die in Folge der harmonischen Relationen 2 je ein System von 4 harmonischen Strahlen bilden:

$$\left. \begin{array}{l} uKl \\ ukL \\ uPpH \\ uu'BC \end{array} \right\} = -1, \quad \left. \begin{array}{l} vLi \\ vli \\ vQqH \\ vv'CA \end{array} \right\} = -1, \quad \left. \begin{array}{l} wIk \\ wiK \\ wRrH \\ ww'AB \end{array} \right\} = -1, \tag{16}$$

$$\left. \begin{array}{l} u'KL \\ u'kl \\ u'P'p'H \\ u'uBC \end{array} \right\} = -1, \quad \left. \begin{array}{l} v'LI \\ v'li \\ v'Q'q'H \\ v'vCA \end{array} \right\} = -1, \quad \left. \begin{array}{l} w'IK \\ w'ik \\ w'R'r'H \\ w'wAB \end{array} \right\} = -1. \tag{17}$$

Durch jede Ecke des Dreiecks  $ABC$  gehen 2 Systeme von je 4 harmonischen Strahlen, wo aber das betreffende Höhenperpendikel beiden Systemen angehört:

$$\left. \begin{array}{l} ABww' \\ AHi \\ AkrR' \\ AKr'R \end{array} \right\} = -1, \quad \left. \begin{array}{l} BCuu' \\ BHKk \\ BlpP' \\ BLp'P \end{array} \right\} = -1, \quad \left. \begin{array}{l} CAvv' \\ CHLl \\ CiqQ' \\ CIq'Q \end{array} \right\} = -1, \\
 \left. \begin{array}{l} ACvv' \\ AHi \\ Alqq' \\ ALQQ' \end{array} \right\} = -1, \quad \left. \begin{array}{l} BAww' \\ BHKk \\ Birr' \\ BIRR' \end{array} \right\} = -1, \quad \left. \begin{array}{l} CBuu' \\ CHLl \\ Ckpp' \\ CKPP' \end{array} \right\} = -1. \tag{18}$$

#### § 4.

Die Dreiecke  $ABC, IKL, ikl$  liegen perspektivisch mit dem gemeinsamen perspektivischen Zentrum  $H$ , und somit liegen die Punkte

$$\left. \begin{array}{l} BC \\ KL \\ kl \end{array} \right\} = u', \quad \left. \begin{array}{l} CA \\ LI \\ li \end{array} \right\} = v', \quad \left. \begin{array}{l} AB \\ IK \\ ik \end{array} \right\} = w'$$

in einer Geraden, der gemeinsamen perspektivischen Axe der