Von den 12 zuletzt eingeführten Geraden schneiden sich daher noch 8 mal je 3 in einem nämlichen Punkte. Nämlich wir haben

$$\left.\begin{matrix}AP\\BQ\\CR\end{matrix}\right\} = N = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } IKL,$$

$$\left.\begin{matrix}Ap\\Bq\\Cr\end{matrix}\right\} = n = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } ikl,$$

$$\left.\begin{matrix}AP\\BQ'\\Cr'\end{matrix}\right\} = N' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } iKL,$$

$$\left.\begin{matrix}Ap\\Bq'\\CR'\end{matrix}\right\} = n' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } Ikl,$$

$$\left.\begin{matrix}Ap'\\BQ\\CR'\end{matrix}\right\} = N'' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } IkL, \tag{7.}$$

$$\left.\begin{matrix}AP'\\Bq\\Cr'\end{matrix}\right\} = n'' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } iKl,$$

$$\left.\begin{matrix}AP'\\Bq'\\CR\end{matrix}\right\} = N''' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } IKl,$$

$$\left.\begin{matrix}Ap'\\BQ'\\Cr\end{matrix}\right\} = n''' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } ikL.$$

Dies vorausgesetzt haben wir auf den in 6 eingeführten 12 Geraden je die Punkte

$$\begin{matrix}APNN', & BQNN'', & CRNN''' \\ Apnn', & Bqnn'', & Crnn''' \\ AP'n''N''', & BQ'n'''N', & CR'n'N'' \\ Ap'N''n''', & Bq'N'''n', & Cr'N'n''.\end{matrix} \tag{8.}$$

§ 3.

Da $AK = Ak = AL = Al$, so liegen die vier Punkte K, k, L, l auf einem Kreise vom Mittelpunkt A. Auf diesem Kreise hat das Viereck K k L l die Eigenschaft, dass von den Gegenseiten K k und L l jede durch den Pol der andern geht. Da ferner $\overline{AK}^2 = AE \cdot AC$, so ist der obige Kreis A orthogonal zum Kreise um B C als Durchmesser.

Betrachten wir einen beliebigen Kreis, dessen Mittelpunkt wir A nennen, ziehen in diesem Kreise irgend eine Sehne L l, deren Pol wir mit B bezeichnen, und legen durch B irgend eine zweite Sehne K k, so liegt der Pol C von K k auf der Polaren von B d. h. auf der Geraden L l. Sei endlich $\left.\begin{matrix} Kk \\ Ll \end{matrix}\right\} = H$, so ist H der Pol der Geraden B C.

Dies vorausgesetzt ist die Figur A B C H K k L l identisch mit der in §§ 1 und 2 ebenso bezeichneten Figur. Denn die Geraden B K k und C L l stehen respektive senkrecht zu A C und zu A B, und somit ist H der Höhenpunkt des Dreiecks A B C, und da A K und A k respektive senkrecht zu C K und C k stehen, so sind K und k die Schnittpunkte des Höhenperpendikels B E von A B C mit dem um A C als Durchmesser beschriebenen Kreise, und analog sind L und l die Schnittpunkte des Höhenperpendikels C F von A B C mit dem um A B als Durchmesser beschriebenen Kreise.

Im Viereck K k L l ist der eine Diagonalpunkt $H = \left\{\begin{matrix} Kk, \\ Ll \end{matrix}\right.$ und die zwei andern Diagonalpunkte seien u und u′, nämlich

$$u = \left\{\begin{matrix} Kl \\ kL \end{matrix}\right., \quad u' = \left\{\begin{matrix} KL \\ kl. \end{matrix}\right.$$

Dies vorausgesetzt liegen u und u′ auf den Polaren B C von H in Bezug auf den Kreis A, und man hat $(BC, u\,u') = -1$.

Die Polare von u′ ist die Gerade H u, und auf dieser liegen die Pole der Geraden u′ K L und u′ k l, d. h.:

Die Punkte $P = \left\{\begin{matrix} BL \\ CK \end{matrix}\right.$ und $p = \left\{\begin{matrix} Bl \\ Ck \end{matrix}\right.$ liegen auf H u.

Die Polare von u ist die Gerade H u′, und auf dieser liegen die Pole der Geraden u K l und u k L, d. h.:

Die Punkte $P' = \left\{\begin{matrix} Bl \\ CK \end{matrix}\right.$ und $p' = \left\{\begin{matrix} BL \\ Ck \end{matrix}\right.$ liegen auf H u′.

Wir erhalten also den Satz:

Die Geraden P p und P′ p′ gehen durch den Punkt H, und schneiden B C respektive in den Punkten u und u′.

Betrachten wir jetzt ebenso die Vierecke L l I i und I i K k, so haben wir die folgenden Resultate:

Seien u, v, w, u′, v′, w′ die Punkte:

$$\begin{aligned} u &= \begin{cases} K\,l \\ k\,L \end{cases}, \quad v = \begin{cases} L\,i \\ l\,I \end{cases}, \quad w = \begin{cases} I\,k \\ i\,K \end{cases}, \\ u' &= \begin{cases} K\,L \\ k\,l \end{cases}, \quad v' = \begin{cases} L\,I \\ l\,i \end{cases}, \quad w' = \begin{cases} I\,K \\ i\,k \end{cases}, \end{aligned} \qquad 9.$$

so liegen u, u′ auf der Geraden BC; v, v′ auf der Geraden CA; w, w′ auf der Geraden AB, und teilen je diese Strecken harmonisch, d. h.:

$$(BC, u\,u') = -1, \quad (CA, v\,v') = -1, \quad (AB, w\,w') = -1. \qquad 10.$$

Ferner gehen die Geraden:

$$P\,p,\ P'\,p',\ Q\,q,\ Q'\,q',\ R\,r,\ R'\,r' \qquad 11.$$

alle durch den Höhenpunkt H des Dreiecks ABC, und die Geraden H P p und H P′ p′ schneiden B C respektive in den Punkten u und u′; die Geraden H Q q und H Q′ q′ schneiden C A in den Punkten v und v′; die Geraden H R r und H R′ r′ schneiden AB in den Punkten w und w′.

In Folge von 10 haben wir daher die harmonischen Strahlsysteme:

$$\left.\begin{matrix} HB & kK \\ HC & lL \\ \hline Hu & Pp \\ Hu' & P'p' \end{matrix}\right\} = -1, \quad \left.\begin{matrix} HC & lL \\ HA & iI \\ \hline Hv & Qq \\ Hv' & Q'q' \end{matrix}\right\} = -1, \quad \left.\begin{matrix} HA & iI \\ HB & kK \\ \hline Hw & Rr \\ Hw' & R'r' \end{matrix}\right\} = -1. \qquad 12.$$

Das Viereck P p P′ p′ hat zu Diagonalpunkten B, C, H,
Das Viereck Q q Q′ q′ hat zu Diagonalpunkten C, A, H, 13.
Das Viereck R r R′ r′ hat zu Diagonalpunkten A, B, H,

und wir haben die harmonischen Punktsysteme:

$$\begin{aligned} (P\,p, H\,u) &= -1, \quad (Q\,q, H\,v) = -1, \quad (R\,r, H\,w) = -1, \\ (P'\,p', H\,u') &= -1, \quad (Q'\,q', H\,v') = -1, \quad (R'\,r', H\,w') = -1, \end{aligned} \qquad 14.$$

und ferner auf den durch die Ecken A, B, C des Stammdreiecks gehenden Strahlen die harmonischen Punktsysteme:

$$\begin{array}{llll}
(AK, Rr') = -1, & (BL, Pp') = -1, & (CI, Qq') = -1, & \\
(Ak, rR') = -1, & (Bl, pP') = -1, & (Ci, qQ') = -1, & \multirow{2}{*}{15.} \\
(AL, QQ') = -1, & (BI, RR') = -1, & (CK, PP') = -1, & \\
(Al, qq') = -1, & (Bi, rr') = -1, & (Ck, pp') = -1. &
\end{array}$$

Durch jeden der Punkte u, v, w, u', v', w' gehen nun 4 Strahlen, die in Folge der harmonischen Relationen 2 je ein System von 4 harmonischen Strahlen bilden:

$$\left.\begin{array}{l} uKl \\ \underline{ukL} \\ uPpH \\ uu'BC \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} vLi \\ \underline{vlI} \\ vQqH \\ vv'CA \end{array}\right\} = -1. \quad \left.\begin{array}{l} wIk \\ \underline{wiK} \\ wRrH \\ ww'AB \end{array}\right\} = -1, \qquad 16.$$

$$\left.\begin{array}{l} u'KL \\ \underline{u'kl} \\ u'P'p'H \\ u'uBC \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} v'LI \\ \underline{v'li} \\ v'Q'q'H \\ v'vCA \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} w'IK \\ \underline{w'ik} \\ w'R'r'H \\ w'wAB \end{array}\right\} = -1. \qquad 17.$$

Durch jede Ecke des Dreiecks ABC gehen 2 Systeme von je 4 harmonischen Strahlen, wo aber das betreffende Höhenperpendikel beiden Systemen angehört:

$$\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} ABww' \\ \underline{AHIi} \\ AkrR' \\ AKr'R \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} BCuu' \\ \underline{BHKk} \\ BlpP' \\ BLp'P \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} CAvv' \\ \underline{CHLl} \\ CiqQ' \\ CIq'Q \end{array}\right\} = -1, \\
\left.\begin{array}{l} ACvv' \\ \underline{AHIi} \\ Alqq' \\ ALQQ' \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} BAww' \\ \underline{BHKk} \\ Birr' \\ BIRR' \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} CBuu' \\ \underline{CHLl} \\ Ckpp' \\ CKPP' \end{array}\right\} = -1.
\end{array} \qquad 18.$$

§ 4.

Die Dreiecke ABC, IKL, ikl liegen perspektivisch mit dem gemeinsamen perspektivischen Zentrum H, und somit liegen die Punkte

$$\left.\begin{array}{r} BC \\ KL \\ kl \end{array}\right\} = u', \quad \left.\begin{array}{r} CA \\ LI \\ li \end{array}\right\} = v', \quad \left.\begin{array}{r} AB \\ IK \\ ik \end{array}\right\} = w'$$

in einer Geraden, der gemeinsamen perspektivischen Axe der