$$\begin{matrix} (AK, Rr') = -1, & (BL, Pp') = -1, & (CI, Qq') = -1, \\ (Ak, rR') = -1, & (Bl, pP') = -1, & (Ci, qQ') = -1, \\ (AL, QQ') = -1, & (BI, RR') = -1, & (CK, PP') = -1, \\ (Al, qq') = -1, & (Bi, rr') = -1, & (Ck, pp') = -1. \end{matrix} \qquad 15.$$

Durch jeden der Punkte u, v, w, u′, v′, w′ gehen nun 4 Strahlen, die in Folge der harmonischen Relationen 2 je ein System von 4 harmonischen Strahlen bilden:

$$\left.\begin{matrix} uKl \\ \underline{ukL} \\ uPpH \\ uu'BC \end{matrix}\right\} = -1, \quad \left.\begin{matrix} vLi \\ \underline{vlI} \\ vQqH \\ vv'CA \end{matrix}\right\} = -1. \quad \left.\begin{matrix} wIk \\ \underline{wiK} \\ wRrH \\ ww'AB \end{matrix}\right\} = -1, \qquad 16.$$

$$\left.\begin{matrix} u'KL \\ \underline{u'kl} \\ u'P'p'H \\ u'uBC \end{matrix}\right\} = -1, \quad \left.\begin{matrix} v'LI \\ \underline{v'li} \\ v'Q'q'H \\ v'vCA \end{matrix}\right\} = -1, \quad \left.\begin{matrix} w'IK \\ \underline{w'ik} \\ w'R'r'H \\ w'wAB \end{matrix}\right\} = -1. \qquad 17.$$

Durch jede Ecke des Dreiecks ABC gehen 2 Systeme von je 4 harmonischen Strahlen, wo aber das betreffende Höhenperpendikel beiden Systemen angehört:

$$\begin{matrix} \left.\begin{matrix} ABww' \\ \underline{AHIi} \\ AkrR' \\ AKr'R \end{matrix}\right\} = -1, & \left.\begin{matrix} BCuu' \\ \underline{BHKk} \\ BlpP' \\ BLp'P \end{matrix}\right\} = -1, & \left.\begin{matrix} CAvv' \\ \underline{CHLl} \\ CiqQ' \\ CIq'Q \end{matrix}\right\} = -1, \\ \left.\begin{matrix} ACvv' \\ \underline{AHIi} \\ Alqq' \\ ALQQ' \end{matrix}\right\} = -1, & \left.\begin{matrix} BAww' \\ \underline{BHKk} \\ Birr' \\ BIRR' \end{matrix}\right\} = -1, & \left.\begin{matrix} CBuu' \\ \underline{CHLl} \\ Ckpp' \\ CKPP' \end{matrix}\right\} = -1. \end{matrix} \qquad 18.$$

§ 4.

Die Dreiecke ABC, IKL, ikl liegen perspektivisch mit dem gemeinsamen perspektivischen Zentrum H, und somit liegen die Punkte

$$\left.\begin{matrix} BC \\ KL \\ kl \end{matrix}\right\} = u', \quad \left.\begin{matrix} CA \\ LI \\ li \end{matrix}\right\} = v', \quad \left.\begin{matrix} AB \\ IK \\ ik \end{matrix}\right\} = w'$$

in einer Geraden, der gemeinsamen perspektivischen Axe der genannten drei Dreiecke. Da nun u, v, w zu u′ v′ w′ respektive in Bezug auf BC, CA, AB harmonisch liegen, so folgt weiter:

Es schneiden sich je in einem nämlichen Punkte die Geraden:

$$\left.\begin{matrix}Au\\Bv\\Cw\end{matrix}\right\} = S,\quad \left.\begin{matrix}Au\\Bv'\\Cw'\end{matrix}\right\} = S',\quad \left.\begin{matrix}Au'\\Bv\\Cw'\end{matrix}\right\} = S'',\quad \left.\begin{matrix}Au'\\Bv'\\Cw\end{matrix}\right\} = S''', \qquad 19.$$

und es liegen in einer Geraden die Punkte:

$$\left.\begin{array}{l} u', v', w' \,..\, \text{Gerade } s \;\;= \text{persp. Axe der Dreiecke } \overset{o}{ABC}, \overset{N}{IKL}, \overset{n}{ikl} \\ u', v, w \,..\, \text{Gerade } s' \;= \text{persp. Axe der Dreiecke } \overset{o}{ABC}, \overset{N'}{iKL}, \overset{n'}{Ikl} \\ u, v', w \,..\, \text{Gerade } s'' = \text{persp. Axe der Dreiecke } \overset{o}{ABC}, \overset{N''}{IkL}, \overset{n''}{iKl} \\ u, v, w' \,..\, \text{Gerade } s''' = \text{persp. Axe der Dreiecke } \overset{o}{ABC}, \overset{N'''}{IKl}, \overset{n'''}{ikL}. \end{array}\right\} \; 20.$$

Alle diese 9 Dreiecke haben den Höhenpunkt H von ABC zum gemeinsamen perspektivischen Zentrum. Oberhalb dieser Dreiecke haben wir je das Umkreiszentrum des betreffenden Dreiecks hingeschrieben.

Die Geraden s, s′, s″, s‴ sind die harmonischen Polaren der Punkte S, S′, S″, S‴ in Bezug auf das Dreieck ABC.

Die Strahlen HQqv und HRrw mögen BC in y und in z schneiden. Projizieren wir nun das Höhenperpendikel AHDiI von B aus auf rR und von C aus auf qQ, so erhalten wir, wenn wir mit $\sim$ die projektivische Beziehung bezeichnen

$$(A, H, D, i, I) \sim (w, H, z, r, R) \text{ und}$$
$$(A, H, D, i, I) \sim (v, H, y, q, Q).$$

Daher auch B (v, H, y, q, Q) $\sim$ C (w, H, z, r, R), und da By und Cz eine nämliche Gerade bilden, so folgt:

$$\text{Die Punkte } \left.\begin{matrix}Bv\\Cw\end{matrix}\right\} = S,\ \left.\begin{matrix}BH\\CH\end{matrix}\right\} = H,\ \left.\begin{matrix}Bq\\Cr\end{matrix}\right\} = n,\ \left.\begin{matrix}BQ\\CR\end{matrix}\right\} = N$$

liegen in einer nämlichen Geraden, und da nach 14 (vH, qQ) $= -1$, so hat man auch (HS, nN) $= -1$.

Wir erhalten somit vier neue ausgezeichnete Gerade im Dreieck:

$$\begin{array}{l} H, S, \quad n, \quad N \ \ldots \text{Gerade } h \\ H, S', \ n', \ N' \ \ldots \text{Gerade } h' \\ H, S'', \ n'', \ N'' \ldots \text{Gerade } h'' \\ H, S''', n''', N''' \ldots \text{Gerade } h''', \end{array} \qquad 21.$$

und die ausgezeichneten vier Punkte auf jeder dieser Geraden liegen je zueinander harmonisch:

$$\begin{array}{c} (HS, nN) = -1, \ (HS', n'N') = -1, \\ (HS'', n''N'') = -1, \ (HS''', n'''N''') = -1. \end{array} \qquad 22.$$

Die Punkte S u. s. w. sind durch 19, die Punkte n und N u. s. w. durch 7 definiert.

Aus der Definition der vier Punkte S in 19 geht hervor:

Das Viereck $SS'S''S'''$ hat zu Diagonalpunkten die Ecken A, B, C des Stammdreiecks, indem

$$\left.\begin{array}{l} SS' \\ S''S''' \end{array}\right\} = A, \quad \left.\begin{array}{l} SS'' \\ S'''S' \end{array}\right\} = B, \quad \left.\begin{array}{l} SS''' \\ S'S'' \end{array}\right\} = C. \qquad 23.$$

Die obigen Geraden h, h', h'', h''' stellen also die Strahlen dar, die man in einem gegebenen Viereck $SS'S''S'''$ vom Höhenpunkt H des Dreiecks der Diagonalpunkte nach den Ecken des gegebenen Vierecks zieht.

Nach 19 liegen ferner auf SS' der Punkt u und auf $S''S'''$ der Punkt u'. Aber u und u' liegen auf BC, und somit haben wir auch:

$$\begin{array}{l} u = \left\{\begin{array}{l} ASS' \\ BC \end{array}\right., \quad v = \left\{\begin{array}{l} BSS'' \\ CA \end{array}\right., \quad w = \left\{\begin{array}{l} CSS''' \\ AB \end{array}\right., \\ u' = \left\{\begin{array}{l} AS''S''' \\ BC \end{array}\right., \quad v' = \left\{\begin{array}{l} BS'''S' \\ CA \end{array}\right., \quad w' = \left\{\begin{array}{l} CS'S'' \\ AB. \end{array}\right. \end{array} \qquad 24.$$

Im Viereck $SS'S''S'''$ stellen somit die Punktenpaare u, u'; v, v'; w, w' die Schnittpunkte je einer Diagonalen mit dem durch den dritten Diagonalpunkt gehenden Gegenseitenpaare dar.

Und es bestehen somit die harmonischen Relationen:

$$\begin{aligned} &(Au,\, SS') = -1, \quad (Bv,\, SS'') = -1, \quad (Cw,\, SS''') = -1 \\ &(Au',\, S''S''') = -1, \quad (Bv',\, S'''S') = -1, \quad (Cw',\, S'S'') = -1 \end{aligned} \qquad 25.$$

und ferner

$$\left.\begin{array}{l} uASS' \\ uu'BC \\ \hline uv'w \\ uvw' \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} vBSS'' \\ vv'CA \\ \hline vw'u \\ vwu' \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} wCSS''' \\ ww'AB \\ \hline wu'v \\ wuv' \end{array}\right\} = -1,$$

$$\left.\begin{array}{l} u'AS''S''' \\ u'uBC \\ \hline u'vw \\ u'v'w' \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} v'BS'''S' \\ v'vCA \\ \hline v'wu \\ v'w'u' \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} w'CS'S'' \\ w'wAB \\ \hline w'uv \\ w'u'v' \end{array}\right\} = -1. \qquad 26.$$

§ 5.

Betrachten wir jetzt das Viereck $nNn'N'$.

Aus 8 folgt $\left.\begin{matrix} NN' \\ nn' \end{matrix}\right\} = A$, und aus 21 $\left.\begin{matrix} nN \\ n'N' \end{matrix}\right\} = H$. Es sind also A und H zwei Diagonalpunkte des Vierecks. Gemäss 22 sind aber auf den durch H gehenden Gegenseiten je die Punkte S und S′ zu H harmonisch; die zweite durch A gehende Diagonale ist somit die Gerade ASS', und der dritte Diagonalpunkt ist der zu A in Bezug auf SS' harmonische Punkt d. h. nach 25 der Punkt u, und wir finden somit $\left.\begin{matrix} nN' \\ n'N \end{matrix}\right\} = u$.

Aus 8 folgt ferner, dass P auf AN und p auf An liegt, und gemäss 14 liegen P und p auf Hu; wir haben also $P = \left\{\begin{matrix} ANN' \\ uH \end{matrix}\right.$, $p = \left\{\begin{matrix} Ann' \\ uH \end{matrix}\right.$, und die harmonischen Eigenschaften des Vierecks $nNn'N'$ ergeben $(APNN') = -1$ und $(Ap,\, nn') = -1$.

Betrachten wir ebenso die Vierecke $nNn''N''$, $nNn'''N'''$, und $n''N''n'''N'''$, $n'''N'''n'N'$, $n'N'n''N''$, so erhalten wir:

$$\begin{array}{lll} \text{Viereck } nNn'N' & \ldots \text{ Diagonalpunkte } & H, A, u \\ \text{Viereck } nNn''N'' & \ldots \text{ Diagonalpunkte } & H, B, v \\ \text{Viereck } nNn'''N''' & \ldots \text{ Diagonalpunkte } & H, C, w \\ \text{Viereck } n''N''n'''N''' & \ldots \text{ Diagonalpunkte } & H, A, u' \\ \text{Viereck } n'''N'''n'N' & \ldots \text{ Diagonalpunkte } & H, B, v' \\ \text{Viereck } n'N'n''N'' & \ldots \text{ Diagonalpunkte } & H, C, w', \end{array} \qquad 27.$$