

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): - **(1911)**

PDF erstellt am: **28.06.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

$$\begin{aligned}
 (AK, Rr') &= -1, & (BL, Pp') &= -1, & (CI, Qq') &= -1, \\
 (Ak, rR') &= -1, & (Bl, pP') &= -1, & (Ci, qQ') &= -1, \\
 (AL, QQ') &= -1, & (BI, RR') &= -1, & (CK, PP') &= -1, \\
 (Al, qq') &= -1, & (Bi, rr') &= -1, & (Ck, pp') &= -1.
 \end{aligned} \quad 15.$$

Durch jeden der Punkte  $u, v, w, u', v', w'$  gehen nun 4 Strahlen, die in Folge der harmonischen Relationen 2 je ein System von 4 harmonischen Strahlen bilden:

$$\left. \begin{array}{l} uKl \\ ukL \\ uPpH \\ uu'BC \end{array} \right\} = -1, \quad \left. \begin{array}{l} vLi \\ vli \\ vQqH \\ vv'CA \end{array} \right\} = -1, \quad \left. \begin{array}{l} wIk \\ wiK \\ wRrH \\ ww'AB \end{array} \right\} = -1, \quad 16.$$

$$\left. \begin{array}{l} u'KL \\ u'kl \\ u'P'p'H \\ u'uBC \end{array} \right\} = -1, \quad \left. \begin{array}{l} v'LI \\ v'li \\ v'Q'q'H \\ v'vCA \end{array} \right\} = -1, \quad \left. \begin{array}{l} w'IK \\ w'ik \\ w'R'r'H \\ w'wAB \end{array} \right\} = -1. \quad 17.$$

Durch jede Ecke des Dreiecks  $ABC$  gehen 2 Systeme von je 4 harmonischen Strahlen, wo aber das betreffende Höhenperpendikel beiden Systemen angehört:

$$\left. \begin{array}{l} ABww' \\ AHi \\ AkrR' \\ AKr'R \end{array} \right\} = -1, \quad \left. \begin{array}{l} BCuu' \\ BHKk \\ BlpP' \\ BLp'P \end{array} \right\} = -1, \quad \left. \begin{array}{l} CAvv' \\ CHLl \\ CiqQ' \\ CIq'Q \end{array} \right\} = -1, \\
 \left. \begin{array}{l} ACvv' \\ AHi \\ Alqq' \\ ALQQ' \end{array} \right\} = -1, \quad \left. \begin{array}{l} BAww' \\ BHKk \\ Birr' \\ BIRR' \end{array} \right\} = -1, \quad \left. \begin{array}{l} CBuu' \\ CHLl \\ Ckpp' \\ CKPP' \end{array} \right\} = -1. \quad 18.$$

§ 4.

Die Dreiecke  $ABC, IKL, ikl$  liegen perspektivisch mit dem gemeinsamen perspektivischen Zentrum  $H$ , und somit liegen die Punkte

$$\left. \begin{array}{l} BC \\ KL \\ kl \end{array} \right\} = u', \quad \left. \begin{array}{l} CA \\ LI \\ li \end{array} \right\} = v', \quad \left. \begin{array}{l} AB \\ IK \\ ik \end{array} \right\} = w'$$

in einer Geraden, der gemeinsamen perspektivischen Axe der

genannten drei Dreiecke. Da nun  $u, v, w$  zu  $u' v' w'$  respektive in Bezug auf  $BC, CA, AB$  harmonisch liegen, so folgt weiter:

Es schneiden sich je in einem nämlichen Punkte die Geraden:

$$\left. \begin{array}{l} Au \\ Bv \\ Cw \end{array} \right\} = S, \quad \left. \begin{array}{l} Au \\ Bv' \\ Cw' \end{array} \right\} = S', \quad \left. \begin{array}{l} Au' \\ Bv \\ Cw' \end{array} \right\} = S'', \quad \left. \begin{array}{l} Au' \\ Bv' \\ Cw \end{array} \right\} = S''', \quad 19.$$

und es liegen in einer Geraden die Punkte:

$$\begin{array}{l} u', v', w' \dots \text{Gerade } s \quad \begin{array}{c} o \quad N \quad n \\ \text{persp. Axe der Dreiecke } ABC, IKL, ikl \end{array} \\ u', v, w \dots \text{Gerade } s' \quad \begin{array}{c} o \quad N' \quad n' \\ \text{persp. Axe der Dreiecke } ABC, iKL, Ikl \end{array} \\ u, v', w \dots \text{Gerade } s'' \quad \begin{array}{c} o \quad N'' \quad n'' \\ \text{persp. Axe der Dreiecke } ABC, Ikl, iKL \end{array} \\ u, v, w' \dots \text{Gerade } s''' \quad \begin{array}{c} o \quad N''' \quad n''' \\ \text{persp. Axe der Dreiecke } ABC, IKl, ikL \end{array} \end{array} \quad 20.$$

Alle diese 9 Dreiecke haben den Höhenpunkt  $H$  von  $ABC$  zum gemeinsamen perspektivischen Zentrum. Oberhalb dieser Dreiecke haben wir je das Umkreiszentrum des betreffenden Dreiecks hingeschrieben.

Die Geraden  $s, s', s'', s'''$  sind die harmonischen Polaren der Punkte  $S, S', S'', S'''$  in Bezug auf das Dreieck  $ABC$ .

Die Strahlen  $HQqv$  und  $HRrw$  mögen  $BC$  in  $y$  und in  $z$  schneiden. Projizieren wir nun das Höhenperpendikel  $AHDi$  von  $B$  aus auf  $rR$  und von  $C$  aus auf  $qQ$ , so erhalten wir, wenn wir mit  $\sim$  die projektivische Beziehung bezeichnen

$$\begin{aligned} (A, H, D, i, I) &\sim (w, H, z, r, R) \text{ und} \\ (A, H, D, i, I) &\sim (v, H, y, q, Q). \end{aligned}$$

Daher auch  $B(v, H, y, q, Q) \sim C(w, H, z, r, R)$ , und da  $By$  und  $Cz$  eine nämliche Gerade bilden, so folgt:

$$\text{Die Punkte } \left. \begin{array}{l} Bv \\ Cw \end{array} \right\} = S, \quad \left. \begin{array}{l} BH \\ CH \end{array} \right\} = H, \quad \left. \begin{array}{l} Bq \\ Cr \end{array} \right\} = n, \quad \left. \begin{array}{l} BQ \\ CR \end{array} \right\} = N$$

liegen in einer nämlichen Geraden, und da nach 14  $(vH, qQ) = -1$ , so hat man auch  $(HS, nN) = -1$ .

Wir erhalten somit vier neue ausgezeichnete Gerade im Dreieck:

$$\begin{aligned} H, S, n, N & \dots \text{ Gerade } h \\ H, S', n', N' & \dots \text{ Gerade } h' \\ H, S'', n'', N'' & \dots \text{ Gerade } h'' \\ H, S''', n''', N''' & \dots \text{ Gerade } h''', \end{aligned} \quad 21.$$

und die ausgezeichneten vier Punkte auf jeder dieser Geraden liegen je zueinander harmonisch:

$$\begin{aligned} (HS, nN) = -1, (HS', n'N') = -1, \\ (HS'', n''N'') = -1, (HS''', n'''N''') = -1. \end{aligned} \quad 22.$$

Die Punkte S u. s. w. sind durch 19, die Punkte n und N u. s. w. durch 7 definiert.

Aus der Definition der vier Punkte S in 19 geht hervor:

Das Viereck  $SS'S''S'''$  hat zu Diagonalknoten die Ecken A, B, C des Stammdreiecks, indem

$$\left. \begin{array}{l} SS' \\ S''S''' \end{array} \right\} = A, \left. \begin{array}{l} SS'' \\ S'''S' \end{array} \right\} = B, \left. \begin{array}{l} SS''' \\ S'S'' \end{array} \right\} = C. \quad 23.$$

Die obigen Geraden  $h, h', h'', h'''$  stellen also die Strahlen dar, die man in einem gegebenen Viereck  $SS'S''S'''$  vom Höhenpunkt H des Dreiecks der Diagonalknoten nach den Ecken des gegebenen Vierecks zieht.

Nach 19 liegen ferner auf  $SS'$  der Punkt u und auf  $S''S'''$  der Punkt u'. Aber u und u' liegen auf BC, und somit haben wir auch:

$$\begin{aligned} u = \left\{ \begin{array}{l} ASS' \\ BC \end{array} \right., \quad v = \left\{ \begin{array}{l} BSS'' \\ CA \end{array} \right., \quad w = \left\{ \begin{array}{l} CSS''' \\ AB \end{array} \right., \\ u' = \left\{ \begin{array}{l} AS''S''' \\ BC \end{array} \right., \quad v' = \left\{ \begin{array}{l} BS'''S' \\ CA \end{array} \right., \quad w' = \left\{ \begin{array}{l} CS'S'' \\ AB \end{array} \right. \end{aligned} \quad 24.$$

Im Viereck  $SS'S''S'''$  stellen somit die Punktenpaare  $u, u'$ ;  $v, v'$ ;  $w, w'$  die Schnittpunkte je einer Diagonalen mit dem durch den dritten Diagonalknoten gehenden Gegenseitenpaare dar.

Und es bestehen somit die harmonischen Relationen:

$$(A u, S S') = -1, (B v, S S'') = -1, (C w, S S''') = -1 \\ (A u', S'' S''') = -1, (B v', S''' S') = -1, (C w', S' S'') = -1 \quad 25.$$

und ferner

$$\left. \begin{array}{l} u A S S' \\ u u' B C \\ u v' w \\ u v w' \end{array} \right\} = -1, \left. \begin{array}{l} v B S S'' \\ v v' C A \\ v w' u \\ v w u' \end{array} \right\} = -1, \left. \begin{array}{l} w C S S''' \\ w w' A B \\ w u' v \\ w u v' \end{array} \right\} = -1, \\ \left. \begin{array}{l} u' A S'' S''' \\ u' u B C \\ u' v w \\ u' v' w' \end{array} \right\} = -1, \left. \begin{array}{l} v' B S''' S' \\ v' v C A \\ v' w u \\ v' w' u' \end{array} \right\} = -1, \left. \begin{array}{l} w' C S' S'' \\ w' w A B \\ w' u v \\ w' u' v' \end{array} \right\} = -1. \quad 26.$$

§ 5.

Betrachten wir jetzt das Viereck  $n N n' N'$ .

Aus 8 folgt  $\left. \begin{array}{l} N N' \\ n n' \end{array} \right\} = A$ , und aus 21  $\left. \begin{array}{l} n N \\ n' N' \end{array} \right\} = H$ . Es sind also  $A$  und  $H$  zwei Diagonalpunkte des Vierecks. Gemäss 22 sind aber auf den durch  $H$  gehenden Gegenseiten je die Punkte  $S$  und  $S'$  zu  $H$  harmonisch; die zweite durch  $A$  gehende Diagonale ist somit die Gerade  $A S S'$ , und der dritte Diagonalpunkt ist der zu  $A$  in Bezug auf  $S S'$  harmonische Punkt d. h. nach 25 der Punkt  $u$ , und wir finden somit  $\left. \begin{array}{l} n N' \\ n' N \end{array} \right\} = u$ .

Aus 8 folgt ferner, dass  $P$  auf  $A N$  und  $p$  auf  $A n$  liegt, und gemäss 14 liegen  $P$  und  $p$  auf  $H u$ ; wir haben also  $P = \left\{ \begin{array}{l} A N N' \\ u H \end{array} \right.$ ,  $p = \left\{ \begin{array}{l} A n n' \\ u H \end{array} \right.$ , und die harmonischen Eigenschaften des Vierecks  $n N n' N'$  ergeben  $(A P N N') = -1$  und  $(A p, n n') = -1$ .

Betrachten wir ebenso die Vierecke  $n N n'' N''$ ,  $n N n''' N'''$ , und  $n'' N'' n''' N'''$ ,  $n''' N''' n' N'$ ,  $n' N' n'' N''$ , so erhalten wir:

$$\begin{array}{ll} \text{Viereck } n N n' N' & \dots \text{ Diagonalpunkte } H, A, u \\ \text{Viereck } n N n'' N'' & \dots \text{ Diagonalpunkte } H, B, v \\ \text{Viereck } n N n''' N''' & \dots \text{ Diagonalpunkte } H, C, w \\ \text{Viereck } n'' N'' n''' N''' & \dots \text{ Diagonalpunkte } H, A, u' \\ \text{Viereck } n''' N''' n' N' & \dots \text{ Diagonalpunkte } H, B, v' \\ \text{Viereck } n' N' n'' N'' & \dots \text{ Diagonalpunkte } H, C, w', \end{array} \quad 27.$$