$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\left(\frac{h}{b} - \beta\right)\left(\frac{h}{c} + \gamma\right)} - \frac{1}{\left(\frac{h}{b} + \beta\right)\left(\frac{h}{c} - \gamma\right)} = \frac{2\left(\beta\frac{h}{c} - \gamma\frac{h}{b}\right)}{\left(\frac{h^2}{b} - \beta^2\right)\left(\frac{h^2}{c} - \gamma^2\right)}$$

und wo $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ sich aus $\mathfrak{A}$ mittelst des Buchstabenrades ergeben. In Folge von 47 und 48 kommt nun $a\,\alpha\,\mathfrak{A} = \frac{4\triangle(b\,\beta - c\,\gamma)}{a\,b\,c\,\alpha} = \frac{b\,\beta - c\,\gamma}{R\,\alpha}$, und wir erhalten die erste der folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\text{Gerade } n\,N \,.\,. \quad \frac{(b\,\beta - c\,\gamma)\,x}{\alpha} + \frac{(c\,\gamma - a\,\alpha)\,y}{\beta} + \frac{(a\,\alpha - b\,\beta)\,z}{\gamma} = o\\
&\text{Gerade } n'\,N' \,.\,. \quad \frac{(b\,\beta - c\,\gamma)\,x}{\alpha} - \frac{(c\,\gamma + a\,\alpha)\,y}{\beta} + \frac{(a\,\alpha + b\,\beta)\,z}{\gamma} = o\\
&\text{Gerade } n''\,N'' \,.\,. \quad \frac{(b\,\beta + c\,\gamma)\,x}{\alpha} + \frac{(c\,\gamma - a\,\alpha)\,y}{\beta} - \frac{(a\,\alpha + b\,\beta)\,z}{\gamma} = o\\
&\text{Gerade } n'''\,N''' \,.\,. - \frac{(b\,\beta + c\,\gamma)\,x}{\alpha} + \frac{(c\,\gamma + a\,\alpha)\,y}{\beta} + \frac{(a\,\alpha - b\,\beta)\,z}{\gamma} = o.
\end{aligned} \qquad 54.$$

Die Gleichungen der Geraden $n'\,N'$, $n''\,N''$, $n'''\,N'''$ entstehen aus der Gleichung der Geraden $n\,N$, wenn in dieser α in $-\alpha$, oder β in $-\beta$, oder γ in $-\gamma$ umgesetzt wird.

Allen diesen vier Geraden in 54 genügt der Punkt

$$x : y : z = a\,\alpha^2 : b\,\beta^2 : c\,\gamma^2.$$

Dieses ist aber der Höhenpunkt H des Dreiecks A B C, denn H als Winkelgegenpunkt des Umkreiszentrums O hat die Coordinaten $x : y : z = \frac{1}{\cos A} : \frac{1}{\cos B} : \frac{1}{\cos C}$, das heisst gemäss 45 $x \sim \frac{a\,\alpha}{\beta\,\gamma} = \frac{a\,\alpha^2}{\alpha\,\beta\,\gamma}$, und somit $x : y : z = a\,\alpha^2 : b\,\beta^2 : c\,\gamma^2$, w. z. z.

Die vier Geraden $n\,N$, $n'\,N'$, $n''\,N''$, $n'''\,N'''$ gehen daher alle durch den Höhenpunkt H des Dreiecks ABC.

Auf diesen Geraden liegen auch respektive die Punkte $x : y : z = \alpha : \beta : \gamma$, $x : y : z = -\alpha : \beta : \gamma$, $x : y : z = \alpha : -\beta : \gamma$, $x : y : z = \alpha : \beta : -\gamma$, deren Bedeutung wir in § 9 kennen lernen werden.

§ 9.

Bilden wir jetzt die Gleichung der Geraden p P.

Mittelst den in 51 angegebenen Coordinaten der Punkte p und P erhalten wir für diese Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{\alpha}, & \frac{y}{c\gamma}, & \frac{z}{b\beta}, \\ 1, & \frac{1}{\frac{h}{b}-\beta}, & \frac{1}{\frac{h}{c}-\gamma} \\ 1, & -\frac{1}{\frac{h}{b}+\beta}, & -\frac{1}{\frac{h}{c}+\gamma} \end{vmatrix} = o.$$

Vergleichen wir dies mit der Gleichung von n N, so kommt

$$-\frac{\mathfrak{A}\,x}{\alpha}+\frac{\mathfrak{B}'\,y}{c\gamma}+\frac{\mathfrak{C}'\,z}{b\beta}=o,$$

wo $\mathfrak{A}$ dieselbe Bedeutung hat wie oben $\mathfrak{A}=\frac{b\beta-c\gamma}{R\,a\,\alpha^2}$, und wo

$$\mathfrak{B}'=\frac{1}{\frac{h}{c}-\gamma}+\frac{1}{\frac{h}{c}+\gamma}=\frac{2\frac{h}{c}}{\frac{h^2}{c}-\gamma^2}=\frac{4\triangle c\gamma}{a\,b\,c\cdot\alpha\beta}=\frac{c\gamma}{R\,\alpha\beta},$$

$$\mathfrak{C}'=-\frac{1}{\frac{h}{b}+\beta}-\frac{1}{\frac{h}{c}-\beta}=-\frac{2\frac{h}{b}}{\frac{h^2}{b}-\beta^2}=-\frac{b\beta}{R\gamma\alpha}.$$

Wir erhalten so die erste der folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\text{Gerade } pP \ldots \frac{(b\beta-c\gamma)\,x}{a\,\alpha^2}-\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=o,\\
&\text{Gerade } p'P' \ldots \frac{(b\beta+c\gamma)\,x}{a\,\alpha^2}-\frac{y}{\beta}-\frac{z}{\gamma}=o,\\
&\text{Gerade } qQ \ldots \frac{x}{\alpha}+\frac{(c\gamma-a\alpha)\,y}{b\beta^2}-\frac{z}{\gamma}=o,\\
&\text{Gerade } q'Q' \ldots -\frac{x}{\alpha}+\frac{(c\gamma+\alpha a)\,y}{b\beta^2}-\frac{z}{\gamma}=o,\\
&\text{Gerade } rR \ldots -\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{(a\alpha-b\beta)\,z}{c\gamma^2}=o,\\
&\text{Gerade } r'R' \ldots -\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}+\frac{(a\alpha+b\beta)\,z}{c\gamma^2}=o.
\end{aligned} \tag{55}$$

Alle diese sechs Geraden gehen durch den Höhenpunkt H des Dreiecks ABC oder durch den Punkt

$$x:y:z = a\alpha^2 : b\beta^2 : c\gamma^2.$$

Aus den Gleichungen dieser Geraden ziehen wir noch die folgenden Schlüsse:

Die Geraden HpP und Hp′P′ schneiden die Seite BC in zwei zu BC harmonischen Punkten u und u′, für welche u ... $\frac{y}{z} = \frac{\beta}{\gamma}$, u′ ... $\frac{y}{z} = -\frac{\beta}{\gamma}$.

Die Geraden HqQ und Hq′Q′ schneiden die Seite CA in zwei zu CA harmonischen Punkten v und v′, für welche v ... $\frac{z}{x} = \frac{\gamma}{\alpha}$, v′ ... $\frac{z}{x} = -\frac{\gamma}{\alpha}$.

Die Geraden HrR und Hr′R′ schneiden die Seite AB in zwei zu AB harmonischen Punkten w und w′, für welche w ... $\frac{x}{y} = \frac{\alpha}{\beta}$, w′ ... $\frac{x}{y} = -\frac{\alpha}{\beta}$.

Diesen Punkten u, u′, v, v′, w, w′, deren Coordinaten also:

	x,	y,	z
u	o,	β,	γ
u′	o,	$-\beta$,	γ
v	α,	o,	γ
v′	α,	o,	$-\gamma$
w	α,	β,	o
w′	$-\alpha$,	β,	o

56.

werden wir noch wiederholt begegnen.

Zunächst ergibt sich aus diesen Coordinaten:

Die Geraden Au, Bv, Cw schneiden sich in einem nämlichen Punkte S, für welchen

$$S \dots x:y:z = \alpha:\beta:\gamma.$$

Die Geraden Au, Bv′, Cw′ schneiden sich in einem nämlichen Punkte S′, für welchen

$$S' \dots x:y:z = -\alpha:\beta:\gamma.$$

Die Geraden Au′, Bv, Cw′ schneiden sich in einem nämlichen Punkte S″, für welchen

$$S'' \dots x:y:z = \alpha:-\beta:\gamma. \qquad 57.$$

Die Geraden Au', Bv', Cw schneiden sich in einem nämlichen Punkte S''', für welchen 57.

$$S''' \ldots x : y : z = \alpha : \beta : -\gamma.$$

Am Schlusse von § 8 sahen wir, dass diese Punkte S, S', S'', S''' respektive auf den Geraden HnN, $Hn'N'$, $Hn''N''$ $n'''N'''$ liegen.

Im Viereck $pPp'P'$ wird die Seite Pp von der Gegenseite $P'p'$ und von der Diagonalen BC in den Punkten H und u harmonisch geteilt. Projizieren wir diese Punkte H, u, p, P von A aus auf die Gerade HnN, so ergibt sich, dass H und S harmonisch liegen zu n und N. Analog sind S', S'', S''' respektive harmonisch zu H in Bezug auf $n'N'$, $n''N''$, $n'''N'''$.

Aus den so einfachen Ausdrücken der Coordinaten der Punkte S, S', S'', S''' ergibt sich die folgende direkte Konstruktion dieser Punkte, sowie der Punkte u, u', v, v', w, w':

Durch die Punkte i und I ziehen wir Parallele zu BC, durch k und K Parallele zu CA, durch l und L Parallele zu AB, so bilden diese sechs neuen Geraden acht dem Stammdreieck ABC parallele und somit perspektivisch liegende Dreiseite, die wir mit ikl, IKL, Ikl, iKL, iKl, IkL, ikL, IKl bezeichnen können, wo aber diese Buchstaben nicht die Ecken der betreffenden Dreiseite, sondern die durch die gleichnamigen Punkte parallel zu den entsprechenden Seiten des Stammdreiecks abc laufenden Seiten dieser Dreiseite darstellen.

Dies vorausgesetzt sind die Punkte S, S', S'', S''' wie folgt gegeben:

Dreiseite

$$\left.\begin{array}{r} ikl \\ IKL \\ abc \end{array}\right\} \ldots \text{gemeins. perspektiv. Zentrum} = S$$

$$\left.\begin{array}{r} Ikl \\ iKL \\ abc \end{array}\right\} \ldots \text{gemeins. perspektiv. Zentrum} = S'$$

$$\left.\begin{array}{r} iKl \\ IkL \\ abc \end{array}\right\} \ldots \text{gemeins. perspektiv. Zentrum} = S''$$

58.

$$\left.\begin{matrix} i\,k\,L \\ I\,K\,l \\ a\,b\,c \end{matrix}\right\} \ldots \text{ gemeins. perspektiv. Zentrum} = S'''. \qquad 58.$$

Und die Punkte u, u′, v, v′, w, w′ sind bestimmt durch:

$$\left.\begin{matrix} A\,S\,S' \\ B\,C \end{matrix}\right\} = u, \quad \left.\begin{matrix} B\,S\,S'' \\ C\,A \end{matrix}\right\} = v, \quad \left.\begin{matrix} C\,S\,S''' \\ A\,B \end{matrix}\right\} = w,$$

$$\left.\begin{matrix} A\,S''\,S''' \\ B\,C \end{matrix}\right\} = u', \quad \left.\begin{matrix} B\,S'''\,S' \\ C\,A \end{matrix}\right\} = v', \quad \left.\begin{matrix} C\,S'\,S'' \\ A\,B \end{matrix}\right\} = w'. \qquad 59.$$

Aus den Coordinaten der Punkte S, S′, S″, S‴ erhalten wir endlich für die Gleichungen der harmonischen Polaren dieser Punkte in Bezug auf das Dreieck A B C:

$$\text{Gerade } u'\,v'\,w' \ldots \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = o$$

$$\text{Gerade } u'\,v\,w \ldots -\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = o$$

$$\text{Gerade } u\,v'\,w \ldots \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = o \qquad 60.$$

$$\text{Gerade } u\,v\,w' \ldots \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} = o.$$

§ 10.

Laut den in 50 gegebenen Coordinaten der Punkte k und l wird die Gleichung der Geraden k l:

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{\alpha}, & y, & z \\ \frac{1}{c\,\gamma}, & \frac{1}{\frac{h}{b} - \beta}, & \frac{\gamma}{a\,\alpha} \\ \frac{1}{b\,\beta}, & \frac{\beta}{a\,\alpha}, & \frac{1}{\frac{h}{c} - \gamma} \end{vmatrix} = o,$$

d. h.: $\frac{\mathfrak{A}\,x}{\alpha} + \mathfrak{B}\,y + \mathfrak{C}\,z = o$, wo

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\left(\frac{h}{b} - \beta\right)\left(\frac{h}{c} - \gamma\right)} - \frac{\beta\,\gamma}{a^2\,\alpha^2}, \text{ oder gemäss 47:}$$