§ 11.

In § 6 sind zwei Punkte aufgetreten, die wir mit i′ uud I′ bezeichnet haben

$$\mathrm{i}' = \begin{cases}\mathrm{u}'\mathrm{i} \\ \mathrm{u\,I}\end{cases}, \quad \mathrm{I}' = \begin{cases}\mathrm{u}'\,\mathrm{I} \\ \mathrm{u\,i}\end{cases}.$$

Bestimmen wir auch die Coordinaten dieser beiden Punkte.

Gemäss der Coordinaten von u′ und von i in 56 und 50 erhalten wir als Gleichung der Geraden u′ i

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ o, & -\beta, & \gamma \\ \frac{1}{\frac{h}{a}-\alpha}, & \frac{\beta}{c\,\gamma}, & \frac{\gamma}{b\,\beta} \end{vmatrix} = o,$$

d. h.:
$$-\left(\frac{\gamma}{b}+\frac{\beta}{c}\right)x + \frac{\gamma\,y}{\frac{h}{a}-\alpha} + \frac{\beta\,z}{\frac{h}{a}-\alpha} = o.$$

Wir erhalten also die erste der Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\text{Gerade u}'\,\text{i} \ldots \frac{\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)(b\,\beta+c\,\gamma)\,x}{b\,c} - \gamma\,y - \beta\,z = o \\
&\text{Gerade u I} \ldots \frac{\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)(b\,\beta-c\,\gamma)\,x}{b\,c} + \gamma\,y - \beta\,z = o \\
&\text{Gerade u}'\,\text{I} \ldots \frac{\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)(b\,\beta+c\,\gamma)\,x}{b\,c} + \gamma\,x + \beta\,z = o \\
&\text{Gerade u i} \ldots \frac{\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)(b\,\beta-c\,\gamma)\,x}{b\,c} - \gamma\,y + \beta\,z = o.
\end{aligned} \qquad 63.$$

Für den Schnittpunkt i′ der zwei ersten dieser Geraden erhalten wir

$$x \sim 2\,\beta\,\gamma$$

$$y \sim \frac{-\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)(b\,\beta-c\,\gamma)\,\beta + \left(\frac{h}{a}-\alpha\right)(b\,\beta+c\,\gamma)\,\beta}{b\,c} =$$

$$= \frac{2\beta\left(\frac{h}{a} c\gamma - b\alpha\beta\right)}{bc},$$

$$z \sim \frac{\left(\frac{h}{a} - \alpha\right)(b\beta + c\gamma)\gamma + \left(\frac{h}{a} + \alpha\right)(b\beta - c\gamma)\gamma}{bc} =$$

$$= \frac{2\gamma\left(\frac{h}{a} b\beta - c\gamma\alpha\right)}{bc}.$$

Im Ausdruck von y schreiben wir $\frac{h}{a} = b \sin C$, $\alpha\beta = c\gamma \cos C$ und im Ausdruck von z ... $\frac{h}{a} = c \sin B$, $\gamma\alpha = b\beta \cos B$, so erhalten wir für den Punkt i′ und analoger Weise für den Punkt I′ die Coordinatenverhältnisse:

	x,	y,	z
i′	$+1$,	$\sin C - \cos C$,	$\sin B - \cos B$
I′	-1,	$\sin C + \cos C$,	$\sin B + \cos B$

64.

oder auch:

	x,	y,	z
i′	$\sin 45^\circ$,	$\sin(C - 45^\circ)$,	$\sin(B - 45^\circ)$
I′	$-\sin 45^\circ$,	$\sin(C + 45^\circ)$,	$\sin(B + 45^\circ)$.

64′.

Wir sahen 36, dass diese beiden Punkte i′ und I′ auf dem Kreise um BC als Durchmesser liegen. Prüfen wir daraufhin die für diese Punkte erhaltenen Coordinaten.

Die Gleichung irgend eines auf das Dreieck ABC bezogenen Kreises ist

$$(ax + by + cz)(\mathfrak{A}ax + \mathfrak{B}by + \mathfrak{C}cz) - \\ - abc(ayz + bzx + cxy) = o, \qquad 65.$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Potenzen der Ecken des Dreiecks ABC in Bezug auf den gegebenen Kreis darstellen.

Für den Kreis um BC als Durchmesser ist nun $\mathfrak{A} = AE \cdot AC = bc \cos A$ und $\mathfrak{B} = o$, $\mathfrak{C} = o$. Die Gleichung dieses Kreises wird also $(ax + by + cz)x \cos A - (ayz + bzx + cxy) = o$, woraus

Kreis um BC als Durchmesser

$$x(x\cos A - y\cos B - z\cos C) - yz = o. \quad 66.$$

Führen wir hier aus 64 die Coordinaten, sei es des Punktes i′ sei es des Punktes I′ ein, so sehen wir, dass diese Werte in der Tat der Kreisgleichung 66 identisch genügen. Auch von den Coordinaten 50 der Punkte i und I wird man sich mittelst der Relationen 45 und 46 leicht überzeugen, dass dieselben der Kreisgleichung 66 genügen.

Bilden wir nun die Gleichung der Geraden i′ I′.

Aus den Coordinaten 64 der Punkte i′ und I′ erhält man hiefür:

Gerade i′ I′ ... $x\sin(B - C) + y\sin B - z\sin C = o.$ 67.

Diese Gerade schneidet die Seite BC im Punkte $y:z = \frac{1}{b}:\frac{1}{c}$.

Die Gerade i′ I′ geht somit durch die Mitte der Seite BC, und in Verbindung mit Satz 36 finden wir:

Die Punkte i′ und I′ sind in dem um BC als Durchmesser geschlagenen Kreise die Endpunkte des zur Geraden BC senkrechten Durchmessers. 68.

§ 12.

Aus dem Viereck i′ I′ i I, wo u und u′ die beiden auf BC liegenden Diagonalpunkte, folgt ferner:

Es liegen u und u′ harmonisch zur Strecke A D, wo A die Mitte der Seite BC, und D der Fusspunkt des Höhenperpendikels AD ist. Gemäss 10 liegen u u′ aber auch harmonisch zur Strecke BC. Es sind also u und u′ die Doppelpunkte der durch die Punktenpaare B, C und A, D bestimmten Involution. 69.

Aus 69 folgt auch:

Legt man zu dem um BC als Durchmesser beschriebenen Kreise durch die Punkte i und I, wo dieser Kreis von dem durch A gehenden Höhenperpendikel des Dreiecks ABC geschnitten wird, einen Orthogonalkreis, so sind u und u′ die Schnittpunkte dieses Orthogonalkreises mit der Seite BC. 70.

Denn sei λ der Mittelpunkt dieses Orthogonalkreises, so ist die Potenz von λ in Bezug auf den um BC beschriebenen Kreis