Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Band: - (1912)

Artikel: Das Dreieck und die Kiepert'sche Parabel
Kapitel: Geschichtliches
Autor: Schenker, O.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319226

O. Schenker.

Das Dreieck und die Kiepert'sche Parabel.

I. Geschichtliches.

In den Mitteilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1909 habe ich einen kleinen Aufsatz veröffentlicht, betitelt: «Über eine dem ebenen Dreieck eingeschriebene Parabel». Seither habe ich in dem Buche von W. Fuhrmann: «Synthetische Beweise planimetrischer Sätze» herumgeblättert (das Werk ist mir von Herrn Prof. Sidler † empfohlen worden) und durch Vergleichung gefunden, dass die von mir behandelte Parabel mit der Kiepert'schen identisch ist. In dem Fuhrmann'schen Werke wird die Kiepert'sche Parabel auf folgende Weise erzeugt: man errichtet über den Seiten eines Dreiecks ähnliche gleichschenklige Dreiecke, so bestimmen die Scheitel derselben ein neues Dreieck, dessen Kollineationsachse mit dem Grunddreieck Tangente an die Kiepert'sche Parabel ist.

Geheimrat Prof. Kiepert an der technischen Hochschule in Hannover war so freundlich, mir aus der Geschichte seiner Parabel folgendes mitzuteilen.

Marienbad in Böhmen, Elbschloss, d. 19. 8. 09,

Sehr geehrter Herr Schenker,

Ihre gefl. Karte vom 16. d. M. ist mir nach Marienbad, wo ich augenblicklich zur Kur weile, nachgeschickt worden. Zur Beantwortung Ihrer Fragen teile ich Ihnen hiedurch mit, dass ich allerdings noch am Leben bin und als Professor an der technischen Hochschule in Hannover meine Lehrtätigkeit ausübe. Die Kiepert'sche Hyperbel und die Kiepert'sche Parabel sind nach mir genannt. Es handelt sich dabei um ein paar kleine Abhandlungen, die ich als Student im Jahre 1869 in den Nouvelles Annales de Math. von Gérano et Bourget veröffentlicht hatte. Ich ging dabei von der Lösung der Aufgabe aus: «Über den Seiten eines Dreiecks A B C sind drei gleichseitige Dreiecke B C A_1, C A B_1, A B C_1, errichtet; man soll das Dreieck A B C konstruieren, wenn die Scheitel A_1, B_1, C_1, dieser gleichseitigen Dreiecke gegeben sind».

Ich hatte mich nachher um diese kleinen Aufsätze nicht mehr gekümmert, da ich ganz in das Fahrwasser von Weierstrass gekommen war und mich hauptsächlich mit der Transformation der elliptischen Funktionen und mit der komplexen Multiplikation dieser Funktionen beschäftigte. Erst vor wenigen Jahren erfuhr ich, dass sich in Belgien und in England eine ziemlich umfangreiche Literatur an die kleinen Aufsätze aus meiner Studentenzeit angeschlossen hatte, und dass man die oben genannten Kurven nach mir genannt hat. Ich kann Ihnen aber augenblicklich keine Angaben über diese Literatur machen, da ich die Sachen hier nicht zur Hand habe.

Herr Professor Neuberg in Lüttich (Liège) hat sich für diese Literatur besonders interessiert.

Mit freundlichem Grusse

Prof. Dr. L. Kiepert, Geheimer Regierungsrat.

Herr Prof. Neuberg, dem ich hierauf meine Arbeit übersandte, schrieb mir folgendes:

Hochgeehrter Herr Kollege,

Meinen besten Dank für Ihre interessante Mitteilung. Der Satz war mir unbekannt und scheint wirklich neu zu sein. Ich habe versucht, die Frage anders anzugreifen, und schicke Ihnen meine Untersuchungen, welche den Gegenstand nicht erschöpfen. Ich werde noch weiter forschen und, wenn ich Erfolg habe, Ihnen meine Resultate mitteilen.

Meine Resultate könnten vielleicht in derselben Berner Zeitschrift erscheinen.

Hochachtungsvoll

J. Neuberg.

Wenn wir die ungeheure Literatur ins Auge fassen, die sich auf dem Gebiete der Geometrie entwickelt hat, so drängt sich uns unwillkürlich die Frage auf: Aus welchem Bedürfnis ist diese Literatur entstanden? Waren es Gründe praktischer oder mehr geistiger Natur, welche eine derartige Literatur ins Leben rufen konnten? Wir geben der idealen Weltauffassung den Vorzug und glauben daher, dass auch in der Geometrie das geistige Bedürfnis vor allem andern schöpferisch gewesen ist. So verdankt z. B. die Kurventheorie, in moderner Gestalt von Jakob Steiner geschaffen, ihre Entstehung dem Problem von der Verdoppelung des Würfels (Delisches Problem), also einem religiösen Bedürfnis. Zur Lösung desselben erfand Nikomedes die Konchoide und Diokles die Cissoide. Die Entdeckung der Kegelschnitte durch Menächmus, einen Schüler Plato's, hängt mit eben diesem Problem zusammen. Über den Ursprung des delischen Problems wissen wir folgendes: Der griechische Volksstamm der Delier ward vom Unglück heimgesucht, suchte Rat beim Orakel zu Delphi und erhielt den Auftrag, den würfelförmigen Altar des Orakels zu verdoppeln. Da dies nicht gelang, musste sich der Philosoph Plato ins Mittel legen, der seinen Schülern das Studium des Problems empfahl. Menächmus suchte die Aufgabe durch Einschiebung zweier mittleren geometrischen Proportionalen zu lösen; ist a^3 der Inhalt des gegebenen Würfels, so ist $2\,a^3$ der des gesuchten und dann folgt aus:

$$a : x = x : y = y : 2a;\ x^2 = a\,y$$

$$y^2 = 2\,a \cdot x, \quad \text{woraus } \frac{x^4}{a^2} = 2\,a\,x;\ x^3 = 2\,a^3$$

$$x = a\sqrt[3]{2},$$

die gesuchte Würfelseite. Zur Lösung waren also hier die Schnittpunkte zweier Parabeln zu bestimmen. Wir wollen uns auch daran erinnern, dass Euklides, Archimedes und Apollonius, die drei grössten Mathematiker des Altertums, an der Erforschung der Kegelschnitte gearbeitet haben. Die vier Bücher des Euklid über die Kegelschnitte sind leider verloren gegangen. Archimedes gab eine Quadratur der Parabel sowie der Ellipse. In dem Buche: «Über Konoide und Sphäroide» behandelte er die durch Rotation eines Kegelschnittes um eine seiner Hauptachsen entstehenden Körper.

Bewundernswürdig ist, was Apollonius (der 250—200 v. Chr. zu Alexandrien lebte) über die Kegeschnitte in 8 Büchern schrieb. Hierin ist alles von seinen Vorgängern auf diesem Gebiete enthalten und mit eigenen Entdeckungen zu einem Ganzen vereinigt. Er erkannte zuerst, dass alle drei Arten von Kegelschnitten an einem und demselben Kegel erzeugt werden können, ferner dass durch den Koordinatenzusammenhang: $y^2 = -x^2 + ax$, ein Kreis, durch $y^2 = x^2 + ax$ eine Hyperbel und durch $y^2 = ax$ eine Parabel dargestellt wird. Von Apollonius ist auch die Aufgabe in Angriff genommen worden einen Kreis zu konstruieren, der drei gegebene Kreise berührt, die von Jakob Steiner gelöst worden ist. Der grosse Astronom Edmund Halley, der die Ansicht vertrat, dass es uns nicht zum Ruhme gereiche, so vieles nicht besser machen zu können, als es die Alten gemacht haben, veranstaltete selbst eine lateinische Ausgabe der acht Bücher über die Kegelschnitte (Antwerpen 1710) und stellte die Bücher des «grossen Geometers», «De sectione rationis» und «De sectione spatii» nach einem arabischen Text wiederum her (Oxford 1706). Auch Robert Simson (nach ihm ist die Simsonsche Gerade benannt) hat sich um die Erhaltung der Werke des Apollonius verdient gemacht, indem er dessen Bücher «De locis planis» wieder herstellte (Edinburgh 1749). Chasles führt in seiner Geschichte der Geometrie aus, dass nach der Zerstörung des Museums zu Alexandrien im Jahre 642 n. Chr. durch den Kalifen Omar I. das Signal zur Barbarei und zu einer lang andauernden Finsternis auf wissenschaftlichem Gebiete gegeben wurde. Nach langer Nacht für Kunst und Wissenschaft brach um die Mitte des 15. Jahrhunderts durch Vermittlung Italiens die Morgenröte eines neuen Zeitalters an. Purbach, Regiomontanus, de Cusa, Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer gelten als Bahnbrecher in der Zeit der Renaissance.

Die Umwälzungen auf dem Gebiete der Astronomie durch Kopernicus, Kepler, Newton, verhalfen auch den Kegelschnitten zu ihrem Recht, sodass sie die populärsten Kurven geworden sind.

Die interessanteste Kurve unter den Kegelschnitten ist die Parabel, da sie sowohl die Eigenschaften der Ellipse, wie der Hyperbel in sich vereinigt. Eine einfache Überlegung zeigt, dass sich ein genügend kleines Stück einer beliebigen Kurve als Stück einer Parabel betrachten lässt; vielleicht ist Thomas Simpson durch eine ähnliche Überlegung zu der nach ihm benannten Formel gelangt. Hätte Archimedes ahnen können, welche nützliche Anwendung seine Formel für den Inhalt eines Parabelsegmentes finden sollte, sicherlich würde er es nicht unterlassen haben auszurufen: Heureka, Heureka, wie damals, als er den hydrostatischen Auftrieb dazu verwandte, um eine Königskrone auf ihre Echtheit zu prüfen.

Auch in der Statistik erweist sich die Parabel als sehr brauchbar. So hat Herr Prof. Kinkelin in Basel dieselbe benützt, um die Abhängigkeit des Alters von der Zahl der durchschnittlichen jährlichen Krankentage darzustellen. Ich verweise auf die von Herrn Kinkelin abgefasste Schrift: Die gegenseitigen Hilfsgesellschaften der Schweiz im Jahre 1880. Ich erinnere ferner an die Formel von Woolhouse, die Ausgleichungszwecken in der Bevölkerungsstatistik dient.

«Geist und Körper sind zwei Welten und im Menschenorganismus unbegreiflich vereint» sagt der Arzt, Philosoph und Dichter Ernst Freiherr v. Feuchtersleben in seinen Aphorismen und seit Plato haben die Philosophen der Freiheit des menschlichen Geistes das Wort geredet. Diese Ungebundenheit des Geistes kam dem Schöpfer der neuen Geometrie Jean Victor Poncelet zugute. Poncelet hatte den Feldzug Napoleons nach Russland als Lieutenant mitgemacht, war bei Krasnoï schwer verwundet und als Gefangener nach Saratoff geführt worden. Um das Unglück, das sein Vaterland und ihn selbst betroffen hatte, zu vergessen, schuf er in der Gefangenschaft die Grundlagen zu seinem berühmten Werk: «Traité des propriétés projectives». Von Poncelet stammt auch das Prinzip der Kontinuität, wonach Eigenschaften, die von reellen geometrischen Gebilden gelten, ohne weiteres auch auf imaginäre Gebilde übertragen werden können und umgekehrt. Hiezu ein Beispiel:

Ein Kegelschnitt ist durch 5 Punkte bestimmt. Da nun ein Kreis schon durch 3 Punkte gegeben ist, so gehen alle Kreise durch dieselben 2 imaginären Punkte. Dieselben lassen sich näher bestimmen, wenn man sich in einem rechtwinkligen Koordinatensystem auf den Fall beschränkt, wo sich ein Kreis auf den Koordinatenanfang reduziert, somit die Gleichung hat:

$$x^2 + y^2 = 0, \text{ oder } (x + i y)(x - i y) = 0$$

Die beiden Richtungen $+i$ und $-i$ bestimmen die beiden imaginären Kreispunkte. Dieselben liegen also auf der unendlich fernen Geraden. Zwei Gerade, gegeben durch die Gleichungen $x + a y = 0$ und $x - a y = 0$, werden aber von $x = 0$ und $y = 0$ harmonisch geteilt, woraus folgt:

Zwei zueinander senkrechte Gerade teilen die Verbindungslinie der imaginären Kreispunkte harmonisch.

II. Aus der Theorie der Winkelgegenpunkte.

(Fig. 1.)

Zieht man vom Punkte P' nach den Ecken des Dreiecks $A B C$ Strahlen, welche die Gegenseiten in den Punkten A', B', C' treffen mögen, und spiegelt man diese Strahlen an den innern Winkelhalbierenden des Dreiecks $A B C$, so treffen sich diese Spiegelbilder in demselben Punkte P'', dem Winkelgegenpunkt von P'.

Beweis: Die gespiegelten Strahlen sollen die Gegenseiten bezw. in den Punkten A'', B'' und C'' treffen, so hat man bei Verwendung trimetrischer Koordinaten (s. Kp. IV, Al. 3)

$$\frac{x_1'}{x_2'} = \frac{C' B \cdot \sin B}{C' A \cdot \sin A}; \quad \frac{x_2'}{x_3'} = \frac{A' C \cdot \sin C}{A' B \cdot \sin B}; \quad \frac{x_3'}{x_1'} = \frac{B' A}{B' C} \cdot \frac{\sin A}{\sin C}$$

$$\frac{x_1''}{x_2''} = \frac{C'' B \cdot \sin B}{C'' A \cdot \sin A}; \quad \frac{x_2''}{x_3''} = \frac{A'' C \cdot \sin C}{A'' B \cdot \sin B}; \quad \frac{x_3''}{x_1''} = \frac{B'' A}{B'' C} \cdot \frac{\sin A}{\sin C}$$

den $C' B \cdot \sin B$ ist die Länge der Senkrechten aus C' auf $B C$ und $C' A \cdot \sin A$ die Länge der Senkrechten von C' auf $A C$ etc. Aus ähnlichen Dreiecken folgt sofort das übrige. Multipliziert man die ersten drei Relationen miteinander, so erhält man den Satz von Ceva, die drei letzten multipliziert ergeben:

$$1 = \frac{C'' B \cdot A'' C \cdot B'' A}{C'' A \cdot A'' B \cdot B'' C}$$

Nach der Umkehrung des Satzes von Ceva schneiden sich daher $A A''$, $B B''$ und $C C''$ in demselben Punkte P''.