Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1912)

Artikel: Das Dreieck und die Kiepert'sche Parabel
Autor: Schenker, O.
Kapitel: V: Folgerungen aus dem vorigen Kapitel
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319226

Führt man diese Werte in (8) ein und dividiert man sodann beide Seiten der so erhaltenen Gleichung durch — sin A · sin B · sin C, so bleibt:

$$\underline{\underline{x_1 \cdot \sin A \cdot \cos A \cdot \sin (B - C) + x_2 \cdot \sin B \cdot \cos B \cdot \sin (C - A) + x_3 \cdot \sin C \cdot \cos C \cdot \sin (A - B) = 0}} \qquad (8^a)$$

für die Gleichung der Direktrix. Dieselbe geht aber durch den Höhenpunkt des Dreiecks ABC (mit den Koordinaten cos B · cos C, cos C · cos A, cos A · cos B) hindurch, weil (8^a) durch dieselben identisch erfüllt wird, wie es auch sein soll, denn die Leitlinien aller dem Dreieck ABC eingeschriebenen Parabeln gehen durch dessen Höhenpunkt, siehe Geiser (1867) pag. 122.

V. Folgerungen aus dem vorigen Kapitel.

Die Gleichungen der Kreise aus $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ lassen sich leicht in homogener Form darstellen.

Wegen der Relation:

$$x_1 \cdot \sin A + x_2 \cdot \sin B + x_3 \cdot \sin C = \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$$

kann man die Gleichung des Kreises aus $\mathfrak{A}$ in der Form schreiben:

$$\sin 2A (\sin B \cdot \sin C)^2 \left(\frac{x_1 \cdot \sin A + x_2 \cdot \sin B + x_3 \cdot \sin C}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}\right)^2$$

$$= \sin 2A \cdot x_1^2 + \sin 2B \cdot x_2^2 + \sin 2C \cdot x_3^2$$

$$- 2 \cdot \sin 2B \frac{p \cdot \sin (C - A) - \sin^2 B}{\sin (C - B)}$$

$$\cdot \sin C \cdot x_2 \frac{x_1 \sin A + x_2 \cdot \sin B + x_3 \cdot \sin C}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}$$

$$- 2 \cdot \sin 2C \frac{\sin^2 C - p \cdot \sin (C - A)}{\sin (C - B)}$$

$$\cdot \sin B \cdot x_3 \frac{x_1 \cdot \sin A + x_2 \cdot \sin B + x_3 \cdot \sin C}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}$$

oder

$$2 \cdot \cos A \cdot \sin (C - B) [x_1 \cdot \sin A + x_2 \cdot \sin B + x_3 \cdot \sin C]^2 =$$
$$[\sin 2A \cdot x_1^2 + \sin 2B \cdot x_2^2 + \sin 2C \cdot x_3^2] \cdot \sin A \cdot (C - B)$$

$$+ [2 \cdot \sin 2B \cdot \sin B \cdot x_2 - 2 \sin 2C \cdot \sin C \cdot x_3]$$
$$[x_1 \cdot \sin A + x_2 \cdot \sin B + x_3 \sin C]$$

$$- [4 \cdot \cos B \cdot p \cdot \sin(C - A)\, x_2 - 4 \cos C \cdot p \cdot \sin(C - A) \cdot x_3]$$
$$[x_1 \cdot \sin A + x_2 \cdot \sin B + x_3 \cdot \sin C]$$

oder wenn $p \cdot \sin(C - A) = P$ gesetzt wird:

$$x_1^2 [2 \cdot \cos A \cdot \sin(C - B) \cdot \sin^2 A - 2 \cdot \cos A \cdot \sin(C - B) \cdot \sin^2 A]$$

$$+ x_2^2 [2 \cdot \cos A \cdot \sin(C - B) \cdot \sin^2 B - \sin 2B \cdot \sin A \cdot \sin(C - B)$$
$$- 2 \sin 2B \cdot \sin^2 B + 4 \cdot \cos B \cdot \sin B \cdot P]$$

$$+ x_3^2 [2 \cdot \cos A \cdot \sin(C - B) \sin^2 C - \sin 2C \cdot \sin A \cdot \sin(C - B)$$
$$+ 2 \cdot \sin 2C \cdot \sin^2 C - 4 \cdot \cos C \cdot \sin C \cdot P]$$

$$+ x_1 \cdot x_2 [4 \cdot \cos A \cdot \sin(C - B) \cdot \sin A \cdot \sin B$$
$$- 2 \cdot \sin 2B \cdot \sin A \cdot \sin B + 4 \cos B \cdot \sin A \cdot P]$$

$$+ x_2 \cdot x_3 [4 \cdot \cos A \cdot \sin(C - B) \cdot \sin B \cdot \sin C$$
$$- 2 \cdot \sin 2B \cdot \sin B \cdot \sin C + 2 \cdot \sin 2C \cdot \sin \cdot B \sin C$$
$$+ 4 \cdot \cos B \cdot \sin C \cdot P - 4 \cdot \cos C \cdot \sin B \cdot P]$$

$$+ x_3 x_1 [4 \cdot \cos A \cdot \sin(C - B) \cdot \sin C \cdot \sin A$$
$$+ 2 \cdot \sin 2C \cdot \sin C \cdot \sin A - 4 \cdot \cos C \cdot \sin A . P] = 0$$

Koeffizient von x_1^2: $\quad 0$

Koeffizient von x_2^2: $\quad (\sin 2B - \sin 2C) \sin^2 B$

$$- \sin 2B \cdot \frac{\cos 2B - \cos 2C}{2} - 2 \cdot \sin 2B \sin^2 B$$
$$+ 4 \cdot \cos B \cdot \sin B\, P$$

$$= \sin 2B \left[\frac{\cos 2C - \cos 2B}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} - (1 - \cos 2B) \right]$$
$$- \sin 2C \cdot \sin^2 B + 4 \cdot \cos B \cdot \sin B\, P$$

$$= \sin 2B \frac{\cos 2C - 1}{2} - \sin 2C \cdot \sin^2 B + 4 \cdot \cos B \cdot \sin B \cdot P$$

$$= - \sin 2B \cdot \sin^2 C - \sin 2C \cdot \sin^2 B + 4 \cdot \cos B \cdot \sin B \cdot P$$

$$= - 2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C + 4 \cdot \cos B \cdot \sin B \cdot P$$

Koeffizient von x_3^2:

$$(\sin 2B - \sin 2C) \sin^2 C - \sin 2C \frac{\cos 2B - \cos 2C}{2}$$
$$+ 2 \cdot \sin 2C \cdot \sin^2 C - 4 \cdot \cos C \cdot \sin C \cdot P$$
$$= \sin 2C \left[\frac{1 - \cos 2C}{2} + \frac{\cos 2C - \cos 2B}{2}\right] + \sin 2B \sin^2 C$$
$$- 4 \cdot \cos C \cdot \sin C \cdot P$$
$$= \sin 2C \cdot \sin^2 B + \sin 2B \cdot \sin^2 C - 4 \cdot \cos C \cdot \sin C \cdot P$$
$$\underline{= 2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C - 4 \cdot \cos C \cdot \sin C \cdot P}$$

Koeffizient von $x_1 x_2$:

$$2 \cdot \sin A \sin B (\sin 2B - \sin 2C - \sin 2B) + 4 \cdot \cos B \cdot \sin A \cdot P$$
$$\underline{= - 4 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \cdot \cos C + 4 \cdot \cos B \cdot \sin A \cdot P}$$

Koeffizient von $x_2 x_3$:

$$2 \cdot \sin B \cdot \sin C (\sin 2B - \sin 2C - \sin 2B + \sin 2C)$$
$$+ 4P \cdot \sin (C - B)$$
$$\underline{= 4 \cdot P \cdot \sin (C - B)}$$

Koeffizient von $x_3 x_1$:

$$2 \sin C \cdot \sin A (\sin 2B - \sin 2C + \sin 2C) - 4 \cos C \cdot \sin A \cdot P$$
$$\underline{= 4 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \cdot \cos B - 4 \cdot \cos C \cdot \sin A \cdot P}$$

Setzt man $P : 2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = P'$, so lautet die Gleichung des Kreises aus $\mathfrak{A}$:

$$\underline{- x_2^2 (1 - \sin 2B \cdot P') + x_3^2 (1 - \sin 2C \cdot P')}$$
$$\underline{+ 2 x_1 x_2 (- \cos C + \cos B \cdot \sin A \cdot P') + 2 x_2 x_3 \cdot \sin (C - B) P'}$$
$$\underline{+ 2 x_3 x_1 \cdot (\cos B - \cos C \cdot \sin A \cdot P') = 0}$$

Für den Fall von $P' = 0$, reduziert sich die Gleichung auf:

$$- x_2^2 + x_3^2 - 2 x_1 \cdot x_2 \cdot \cos C + 2 \cdot x_3 \cdot x_1 \cdot \cos B = 0, \quad \text{oder}$$
$$- x_2 (x_2 + 2 x_1 \cos C) + x_3 (x_3 + 2 x_1 \cdot \cos B) = 0$$

Spiegelt man den Punkt A an der Seite BC und heisst das Bild A′, so ist $x_2 + 2x_1 \cdot \cos C = 0$ die Gleichung von CA′, analog ist $x_3 + 2x_1 \cdot \cos B = 0$ die Gleichung von BA′. Der Kreis geht also durch den Schnittpunkt von CA′ mit AB, ferner durch den Schnittpunkt von AC mit AB, durch den Schnittpunkt von AC mit BA′ und durch den Schnittpunkt von CA′ und BA′ hindurch.

Die Gleichung

$$-x_2(x_2 + 2x_1 \cdot \cos C) + x_3(x_3 + 2x_1 \cdot \cos B) = 0$$

muss in der Form geschrieben werden können:

$$x_2 \cdot x_3 \cdot \sin A + x_3 \cdot x_1 \cdot \sin B + x_1 \cdot x_2 \cdot \sin C$$
$$+ (a_2 x_2 - a_3 x_3)(x_1 \cdot \sin A + x_2 \cdot \sin B + x_3 \cdot \sin C) = 0,$$

denn die repräsentierende Kurve geht durch A, und ist ein Kreis, da sie durch die beiden imaginären Kreispunkte hindurch geht. Gibt man den beiden letzten Gleichungen die Form:

$$2x_3 \cdot x_1 \cdot \cos B - 2x_1 \cdot x_2 \cdot \cos C - x_2^2 + x_3^2 = 0$$
$$x_2 \cdot x_3(\sin A + a_2 \sin C + a_3 \cdot \sin B) + x_3 \cdot x_1(\sin B + a_3 \cdot \sin A)$$
$$+ x_1 \cdot x_2(\sin C + a_2 \cdot \sin A) + x_2^2 \cdot a_2 \cdot \sin B + x_3^2 \cdot a_3 \cdot \sin C = 0$$

so bestimmen sich a_2 und a_3 aus den beiden Gleichungen:

$$\frac{-1}{a_2 \cdot \sin B} = \frac{1}{a_3 \cdot \sin C} \quad \text{und} \quad \frac{2\cos B}{\sin B + a_3 \cdot \sin A} = \frac{-2 \cdot \cos C}{\sin C + a_2 \cdot \sin A}$$

woraus folgt:

$$a_2 = -\frac{a_3 \cdot \sin C}{\sin B}\,; \; 2 \cdot \sin A + 2a_2 \cdot \sin A \cdot \cos B + 2a_3 \cdot \sin A \cdot \cos C = 0$$

oder

$$\begin{array}{c|c|c} a_2 \cdot \sin B + a_3 \cdot \sin C = 0 & 2\cos B & -\cos C \\ a_2 \cdot \cos B + a_3 \cdot \cos C + 1 = 0 & -\sin B & \sin C \end{array}$$

$$a_3 = \sin B : \sin(C - B)$$
$$a_2 = -\sin C : \sin(C - B)$$

Diese Werte müssen die Gleichung: $\sin A + a_2 \cdot \sin C + a_3 \cdot \sin B = 0$ erfüllen, da der Koeffizient von $x_2 \cdot x_3$ Null ist; in der Tat ist $\sin A \cdot \sin(C - B) - \sin^2 C + \sin^2 B = 0$.

Die Gleichungen der Apollonischen Kreise sind deshalb:

$$\sin(B - C) \Sigma x_2 \cdot x_3 \cdot \sin A + (x_2 \sin C - x_3 \sin \cdot B) \Sigma x_1 \cdot \sin A = 0$$
$$\sin(C - A) \Sigma x_2 \cdot x_3 \cdot \sin A + (x_3 \sin A - x_1 \cdot \sin C) \Sigma x_1 \cdot \sin A = 0$$
$$\sin(A - B) \Sigma x_2 \cdot x_3 \cdot \sin A + (x_1 \cdot \sin B - x_2 \cdot \sin A) \Sigma x_1 \cdot \sin A + 0$$

Die Durchschnittssehnen dieser Kreise mit dem Umkreis haben deshalb die Gleichungen:

$$x_2 \cdot \sin C - x_3 \cdot \sin B = 0, \quad x_3 \cdot \sin A - x_1 \cdot \sin C = 0,$$
$$x_1 \cdot \sin B - x_2 \cdot \sin A = 0$$

und schneiden sich darum im Winkelgegenpunkt des Schwerpunktes (Punkt v. Lemoine).

Für ein beliebiges P′ lauten die entprechenden Gleichungen:

$$U \cdot \sin(B - C) + [x_2 (1 - \sin 2 B \cdot P') \cdot \sin C$$
$$- x_3 (1 - \sin 2 C \cdot P') \sin B] L = 0$$
$$U \cdot \sin(C - A) + [x_3 (1 - \sin 2 C \cdot P') \sin A$$
$$- x_1 (1 - \sin 2 A \cdot P') \sin C] \cdot L = 0$$
$$U \cdot \sin(A - B) + [x_1 (1 - \sin 2 A \cdot P') \sin B$$
$$- x_2 (1 - \sin 2 B \cdot P') \cdot \sin A] \cdot L = 0$$

wo zur Abkürzung:

$$x_2 x_3 \cdot \sin A \cdot + x_3 \cdot x_1 \cdot \sin B + x_1 \cdot x_2 \cdot \sin C = U \quad \text{und}$$
$$x_1 \cdot \sin A + x_2 \cdot \sin B + x_3 \cdot \sin C = L$$

gesetzt worden ist.

Die Durchschittssehnen dieser Kreise mit dem Umkreis haben zu Gleichungen:

$$x_2 (1 - \sin 2 B \cdot P') \cdot \sin C - x_3 (1 - \sin 2 C \cdot P') \cdot \sin B = 0$$
$$x_3 (1 - \sin 2 C \cdot P') \cdot \sin A - x_1 (1 - \sin 2 A \cdot P') \cdot \sin C = 0$$
$$x_1 (1 - \sin 2 A \cdot P') \cdot \sin B - x_2 (1 - \sin 2 B \cdot P') \cdot \sin A = 0$$

und schneiden sich also in demselben Punkt $\mathfrak{P}$, dessen Ort man durch Elimination von P′ aus zwei der Gleichungen erhält:

$$x_2 \cdot \sin C - x_3 \cdot \sin B = 2 P' \sin B \cdot \sin C (x_2 \cdot \cos B - x_3 \cdot \cos C)$$
$$x_3 \cdot \sin A - x_1 \cdot \sin C = 2 \cdot P' \cdot \sin C \cdot \sin A (x_3 \cdot \cos C - x_1 \cdot \cos A)$$

$$(x_2 \cdot \sin C - x_3 \cdot \sin B)(x_3 \cdot \cos C - x_1 \cdot \cos A) \cdot \sin A$$
$$= (x_3 \cdot \sin A - x_1 \cdot \sin C)(x_2 \cdot \cos B - x_3 \cdot \cos C) \sin B$$

oder:
$$x_2 \cdot x_3 (\sin 2C \cdot \sin A - \sin 2B \cdot \sin A)$$
$$+ x_3 \cdot x_1 (\sin 2A \cdot \sin B - \sin 2C \cdot \sin B)$$
$$+ x_1 \cdot x_2 (\sin 2B \cdot \sin C - \sin 2A \cdot \sin C) = 0 \qquad \text{oder}$$
$$\underline{x_2 \cdot x_3 \cdot \sin 2A \cdot \sin (B - C) + x_3 \cdot x_1 \cdot \sin 2B \cdot \sin (C - A)}$$
$$\underline{+ x_1 \cdot x_2 \cdot \sin 2C \cdot \sin (A - B) = 0}$$

Der Ort von $\mathfrak{P}$ ist also ein dem Grunddreieck umschriebener Kegelschnitt, der ausserdem durch seinen Umkreismittelpunkt und seinen Höhenpunkt hindurchgeht.

Die Kreise aus $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ sollen sich in $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}'$ schneiden; so kann man den Ort dieser Punkte bestimmen, indem man aus den zugehörigen Gleichungen P′ eliminiert:

$$P' = \frac{U \cdot \sin (B - C) + L (x_2 \cdot \sin C - x_3 \cdot \sin B)}{-(x_3 \cdot \cos C - x_2 \cdot \cos B) \cdot 2 \cdot \sin B \cdot \sin C \cdot L} \quad \text{für } \mathfrak{A} \text{ und}$$

$$P' = \frac{U \cdot \sin (C - A) + L (x_3 \cdot \sin A - x_1 \cdot \sin C)}{-(x_1 \cos A - x_3 \cdot \cos C) \cdot 2 \sin C \cdot \sin A \cdot L} \quad \text{für } \mathfrak{B}$$

woraus:
$$- U [(x_1 \cos A - x_3 \cdot \cos C) \sin A \cdot \sin (B - C)$$
$$- (x_3 \cdot \cos C - x_2 \cdot \cos B) \cdot \sin B \cdot \sin (C - A)]$$
$$- L [(x_1 \cdot \cos A - x_3 \cdot \cos C) (x_2 \cdot \sin C - x_3 \cdot \sin B) \cdot \sin A$$
$$- (x_3 \cdot \sin A - x_1 \sin C) \cdot (x_3 \cdot \cos C - x_2 \cdot \cos B) \cdot \sin B] = 0$$

nun ist:
$$(x_1 \cdot \cos A - x_3 \cdot \cos C) \sin A \cdot \sin (B - C)$$
$$- (x_3 \cdot \cos C - x_2 \cdot \cos B) \cdot \sin B \cdot \sin (C - A)$$
$$= x_1 \cdot \sin A \cdot \cos A \cdot \sin (B - C) + x_2 \sin B \cdot \cos B \cdot \sin (C - A)$$
$$+ x_3 \cdot \cos C \left(\frac{\cos 2B - \cos 2C}{2} + \frac{\cos 2C - \cos 2A}{2} \right) \qquad \text{oder}$$
$$= x_1 \sin A \cos A \cdot \sin (B - C) + x_2 \cdot \sin B \cdot \cos B \cdot \sin (C - A)$$
$$+ x_3 \cdot \sin C \cdot \cos C \cdot \sin (A - B)$$

Somit lautet die Gleichung des Ortes für $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}'$:

$$- U [\sin 2A \cdot \sin (B - C) \cdot x_1 + \sin 2B \cdot \sin (C - A) x_2$$
$$+ \sin 2C \cdot \sin (A - B) x_3]$$
$$- L [\sin A (\sin 2B - \sin 2C) x_2 x_3 + \sin B (\sin 2C - \sin 2A) x_3 \cdot x_1$$
$$+ \sin C (\sin 2A - \sin 2B) x_1 x_2 = 0 \qquad \text{oder}$$

$$U \Sigma \sin 2A \cdot \sin (B - C) \cdot x_1 - L \Sigma \sin 2A \cdot \sin (B - C) x_2 x_3 = 0$$

also eine Gleichung vom dritten Grad.

Die repräsentierende Kurve, welche zu dieser Gleichung gehört, geht durch die Ecken des Grunddreiecks, durch die imaginären Kreispunkte, durch den Höhenpunkt und den Umkreismittelpunkt, ausserdem aber durch die Schnittpunkte der Geraden $\Sigma x_1 \cdot \sin 2A \cdot \sin(B-C) = 0$ mit dem Kegelschnitt $\Sigma x_2 \cdot x_3 \cdot \sin 2A \cdot \sin(B-C) = 0$, sowie durch den vierten Schnittpunkt des Umkreises mit eben diesem Kegelschnitt, endlich auch durch die Schnittpunkte der Geraden $\Sigma \sin 2A \cdot \sin(B-C) \cdot x_1 = 0$ mit der unendlich fernen Geraden, d. h. die Gerade, die durch die Gleichung gegeben wird, $\Sigma \sin 2A \cdot \sin(B-C)\, x_1 = 0$, d. h. die Euler'sche Gerade ist Asymptote an unsere Kurve dritter Ordnung.

Herr Prof. Neuberg in Lüttich hat, angeregt durch meine Arbeit, den Ort von $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}'$ zuerst bestimmt; er fand eine Gleichung vierten Grades, aus der sich aber ein linearer Faktor absondern lässt, so dass unsere Resultate übereinstimmen.

Aus den Formeln für die Koordinaten von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ folgt:

Trifft ein Kreis aus M die Geraden, M A, M B und M C bezw. in den Punkten A_1, B_1, C_1, so schneiden seine Tangenten in A_1, B_1 und C_1 die entsprechenden Gegenseiten des Grunddreiecks in Punkten ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$) einer Geraden, welche Tangente an die Parabel von Kiepert ist.

Die Kreise aus $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ durch A, bezw. B, bezw. C teilen MA, resp. MB und MC im gleichen Verhältnis; allgemein gilt der Satz:

Die Kreise aus $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, welche MA, MB und MC im gleichen Verhältnis teilen, bestimmen eine Kreisschar.

Beweis:

Die Punkte A_1, B_1 und C_1 teilen M A, bezw. MB und MC in gleichem Verhältnis, sodass $M A_1 = M B_1 = M C_1 = \frac{k}{2}$; dann sind die Koordinaten von A_1, B_1 und C_1:

	x_1	x_2	x_3
für A_1	$\frac{\cos A + k \cdot \cos(C-B)}{2}$	$\frac{1-k}{2} \cdot \cos B$	$\frac{1-k}{2} \cdot \cos C$
„ B_1	$\frac{1-k}{2} \cdot \cos A$	$\frac{\cos B + k \cdot \cos(A-C)}{2}$	$\frac{1-k}{2} \cdot \cos C$
„ C_1	$\frac{1-k}{2} \cdot \cos A$	$\frac{1-k}{2} \cdot \cos B$	$\frac{\cos C + k \cdot \cos(B-A)}{2}$

Von der Gleichung des Kreises aus $\mathfrak{A}$ durch A_1 brauchen wir bloss die linke Seite zu notieren; die rechte Seite ist uns schon bekannt.

Diese linke Seite lautet:

$$\sin 2A\left[\frac{\cos A + k\cdot\cos(C-B)}{2}\right]^2 + \sin 2B\left[\frac{P-\sin^2 B}{\sin(C-B)}\cdot\sin C - \frac{1-k}{2}\cdot\cos B\right]^2$$
$$+\sin 2C\left[\frac{\sin^2 C - P}{\sin(C-B)}\cdot\sin B - \frac{1-k}{2}\cdot\cos C\right]^2 = \ldots$$

Analog hat man für den Kreis aus $\mathfrak{B}$:

$$\sin 2A\left[\frac{\sin^2 A - P}{\sin(A-C)}\cdot\sin C - \frac{1-k}{2}\cdot\cos A\right]^2$$
$$+\sin 2B\left[\frac{\cos B + k\cdot\cos(A-C)}{2}\right]^2$$
$$+\sin 2C\left[\frac{P-\sin^2 C}{\sin(A-C)}\cdot\sin A - \frac{1-k}{2}\cdot\cos C\right]^2 = \ldots$$

Subtrahiert man die beiden Gleichungen, so bekommt man links, unter Weglassung der Ausdrücke, die beiderseits vom Gleichheitszeichen vorkommen:

$$\sin 2A\left\{\left[\frac{\cos A + k\cos(C-B)}{2}\right]^2 - \left(\frac{1-k}{2}\right)^2\cdot\cos^2 A + \frac{\sin^2 A - P}{\sin(A-C)}(1-k)\cdot\cos A\cdot\sin C\right\}$$
$$+\sin 2B\left\{\left(\frac{1-k}{2}\right)^2\cdot\cos^2 B - \frac{P-\sin^2 B}{\sin(C-B)}\cdot\sin C\,(1-k)\cdot\cos B - \left[\frac{\cos B + k\cdot\cos(A-C)}{2}\right]^2\right\}$$
$$+\sin 2C\left\{(P-\sin^2 C)(1-k)\cdot\cos C\left(\frac{\sin B}{\sin(C-B)} + \frac{\sin A}{\sin(A-C)}\right)\right\}$$

Die Glieder mit k^2 fallen weg; denn

$$\sin 2A\left[\frac{\cos^2(C-B)-\cos^2 A}{4}\right] + \sin 2B\left[\frac{\cos^2 B - \cos^2(A-C)}{4}\right] = 0$$

und es bleibt:

$$\sin 2A\left\{-k\cdot\cos A\left[\cos(B+C)-\cos(C-B)\right]\right.$$
$$\left.+(1-k)\frac{\sin^2 A-P}{\sin(A-C)}\cdot\cos A\cdot\sin C\right\}$$
$$+\sin 2B\left\{k\cos B\left[\cos(C+A)-\cos(A-C)\right]\right.$$
$$\left.+(1-k)\frac{\sin^2 B-P}{\sin(C-B)}\cdot\cos B\cdot\sin C\right\}$$
$$+\sin 2C\left\{(P-\sin^2 C)(1-k)\right.$$
$$\left.\cdot\cos C\left[\frac{\cos 2C-\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C}{2\cdot\sin(C-B)\cdot\sin(A-C)}\right]\right\}$$
$$=\sin 2A\left\{+k\cdot\cos A\cdot 2\cdot\sin B\cdot\sin C+(1-k)\frac{\sin^2 A-P}{\sin(A-C)}\cdot\cos A\cdot\sin C\right\}$$
$$+\sin 2B\left\{-k\cdot\cos B\cdot 2\cdot\sin A\cdot\sin C+(1-k)\frac{\sin^2 B-P}{\sin(C-B)}\cdot\cos B\cdot\sin C\right\}$$
$$\frac{+\sin 2C(P-\sin^2 C)(1-k)\cdot\cos C\cdot\sin C.\sin(A-B)}{\sin(B-C)\cdot\sin(C-A)}$$
$$=4\cdot k\cdot\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C(\cos^2 A-\cos^2 B)$$
$$+(1-k)\frac{P-\sin^2 A}{\sin(C-A)}\cdot\cos A\cdot\sin C\cdot\sin 2A$$
$$+(1-k)\frac{P-\sin^2 B}{\sin(B-C)}\cdot\cos B\cdot\sin C\cdot\sin 2B$$
$$+(1-k)\frac{(P-\sin^2 C)}{\sin(B-C)\cdot\sin(C-A)}\cdot\cos C\cdot\sin C\cdot\sin 2C\cdot\sin(A-B)$$
$$=-4k\cdot\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\cdot\sin C\cdot\sin(A-B)$$
$$+(1-k)\cdot\sin(A-B)\cdot\sin C\sum\frac{P-\sin^2 A}{\sin(C-A)\cdot\sin(A-B)}$$
$$\cdot\cos A\cdot\sin 2A$$

Nun wissen wir bereits, dass die rechte Seite der zugehörigen Gleichung durch $\sin C\cdot\sin(A-B)$ teilbar ist, und dass der Rest durch Vorrücken der Buchstaben und Indices ungeändert bleibt. Dasselbe gilt aber, wie man sieht, von der linken Seite, womit der Satz bewiesen ist.