Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1912)

Artikel: Das Dreieck und die Kiepert'sche Parabel

Autor: Schenker, O.

Kapitel: VII: Bestimmung der Asymptoten der behandelten zyklischen Kurve (allgemein)

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319226

Man weiss, dass sie durch den Brennpunkt geht, ihre Gleichung wird durch die Koordinaten des erhaltenen Grenzkreises erfüllt, denn durch Substitution derselben bekommt man:

$$\frac{\begin{array}{c}-[\sin(C-A)-\sin(C-B)\cdot\cos C]^2\sin C\cdot(\sin^2 C-\sin^2 A)\\ -\sin(C-B)\cdot\sin^2 C\,(\sin C\cdot\cos C-\sin A\cdot\cos A)]\sin(C-A)\end{array}}{-\sin(C-B)\cos C]}$$

$$\frac{\begin{array}{c}-\sin^2(C-B)\cdot\sin^3 C\,(\sin^2 C-\sin^2 A\\ +\sin(C-B)\sin^2 C\,(\sin C\cos C-\sin A\cos A)\,[\sin(C-A)\end{array}}{-\sin(C-B)\cos C]}$$

$$\begin{array}{c}+\sin C\,(\sin^2 C-\sin^2 A)\left\{[\sin(C-A)-\sin(C-B)\cdot\cos C]^2\right.\\ \left.+\sin^2(C-B)\cdot\sin^2 C\right\}\end{array}$$

wo der gemeinsame Nenner weggelassen ist oder:

$$\begin{array}{c}-\sin C\cdot(\sin^2 C-\sin^2 A)\left\{[\sin(C-A)-\sin(C-B)\cos C]^2\right.\\ \left.+\sin^2 C\cdot\sin^2(C-B)\right\}+\sin C\,(\sin^2 C-\sin^2 A)\left\{[\sin(C-A)\right.\\ \left.-\sin(C-B)\cos C]^2+\sin^2(C-B)\cdot\sin^2 C\right\}=0\end{array}$$

Dieser Grenzkreis liegt, aus Gründen der Symmetrie, auf der Parabelachse und da er noch auf einer davon verschiedenen Geraden durch den Brennpunkt liegt, so muss er mit dem Brennpunkt zusammenfallen w. z. z. w. Wir haben also den Satz: Es gibt einen einzigen Punkt $\mathfrak{O}$, dessen Tangenten durch die imaginären Kreispunkte gehen und zwar ist es der Brennpunkt der Kiepert'schen Parabel, welcher auch der allen zyklischen Kurven gemeinsame Brennpunkt ist.

VII. Bestimmung der Asymptoten der behandelten zyklischen Kurve (allgemein).

Die allgemeine Gleichung derselben lautet: (s. pag. 29)

$$\begin{array}{l}(x^2+y^2+2ax+2by)\,[-2x\cdot\sin(C-A)\\ \quad-2\sin(C-B)\,(\sin C\cdot y-\cos C\,x)]\\ -4\cdot\sin A\cdot\sin C\,(-x\cdot\cos A+y\cdot\sin A)\,x\\ \quad+4\sin^2 C\cdot x\,(\sin C\,y-\cos C\,x)=0\end{array}$$

Die Gleichung der reellen Asymptote hat die Form:

$$\begin{array}{l}2x\,[\cos C\cdot\sin(C-B)-\sin(C-A)]\\ \quad-2y\cdot\sin(C-B)\cdot\sin C+\lambda_3=0\end{array}$$

denn bekanntlich erhält man die Gleichungen der Asymptoten, indem man in der Kurvengleichung die Summe der Glieder höchsten Grades = Null setzt und dann diese Gleichung in die linearen Faktoren zerlegt; dann unterscheiden sich die Gleichungen der Asymptoten von diesen Faktoren nur durch eine Konstante. Für unsern Fall ist die eine Konstante λ_3, welche zu bestimmen ist; zunächst hat man:

$$\begin{gathered} 2x\,[\cos C \cdot \sin(C-B) - \sin(C-A)] \\ -2y \cdot \sin(C-B)\sin C = -\lambda_3 \end{gathered}$$

Darum wird die Kurvengleichung, wenn man noch y durch x und λ_3 ausdrückt und den Nenner $\sin^2(C-B) \cdot \sin^2 C$ wegschafft:

$$\begin{gathered} -\lambda_3 x^2 \{\sin^2(C-B) \cdot \sin^2 C + \sin^2(C-B) \cdot \cos^2 C \\ + \sin^2(C-A) - 2\sin(C-A) \cdot \sin(C-B) \cdot \cos C\} \\ - x^2 \cdot 4 \cdot \sin A \cdot \sin C\,\{-\cos A \cdot \sin^2(C-B) \cdot \sin^2 C \\ + \sin A \cdot \sin(C-B) \cdot \sin C\,[\sin(C-B) \cdot \cos C - \sin(C-A)]\} \\ + 4\sin^4 C \cdot \sin(C-B)\,[\cos C \cdot \sin(C-B) - \sin(C-A)]\,x^2 \\ - 4 \cdot \sin^4 C \cdot x^2 \cos C \cdot \sin^2(C-B) + \text{Glieder mit } x + \text{bekannte} \\ \text{Glieder} = 0. \end{gathered}$$

λ_3 ist nun so zu bestimmen, dass der eine sich hieraus ergebende Wert von x unendlich wird; dies ist der Fall, wenn der Koeffizient von $x^2 = 0$ ist (dies lehrt sofort die Substitution $x = \frac{1}{x'}$); hieraus folgt:

$$\begin{gathered} -\lambda_3 = 4\,[\sin A \cdot \sin^2 C \cdot \sin(C-B)\,\{-\cos A \sin(C-B) \cdot \sin C \\ + \sin A \cdot \sin(C-B) \cdot \cos C - \sin A \cdot \sin(C-A)\} \\ + 4 \cdot \sin^4 C \cdot \sin(C-B) \cdot \sin(C-A)] : N \qquad \text{wo} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} N = \sin^2(C-B) + \sin^2(C-A) \\ - 2\sin(C-B) \cdot \sin(C-A) \cdot \cos C \qquad \text{also:} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} -\lambda_3 = [4\sin A \cdot \sin^2 C \cdot \sin(C-B)\,\{-\sin(C-B) \\ \cdot \sin(C-A) - \sin A \cdot \sin(C-A)\} \\ + 4 \cdot \sin^4 C \cdot \sin(C-B) \cdot \sin(C-A)] : N \qquad \text{oder} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} -\lambda_3 = [4\sin A \cdot \sin^2 C \cdot \sin(C-B)\sin(C-A) \\ \{-\sin(C-B) - \sin A\} \\ + 4 \cdot \sin^4 C \cdot \sin(C-B) \cdot \sin(C-A)] : N \qquad \text{oder} \end{gathered}$$

$$-\lambda_3 = 4 \cdot \sin A \cdot \sin^2 C \cdot \sin(C-B) \cdot \sin(C-A)$$
$$\cdot(-2 \cdot \sin C \cdot \cos B) + 4 \cdot \sin^4 C \cdot \sin(C-B) \cdot \sin(C-A) : N$$

oder
$$= -4 \sin^3 C \sin(C-B)$$
$$\cdot \sin(C-A)\,[2 \sin A \cdot \cos B - \sin C] : N$$
$$= -4 \cdot \sin^3 \cdot C \cdot \sin(C-B)$$
$$\cdot \sin(C-A)\,[2 \sin A \cos B - \sin(A+B)] : N$$
$$= -4 \cdot \sin^3 C \cdot \sin(C-B) \cdot \sin(C-A) \sin(A-B) : N$$
$$-\lambda_3 = 4 \cdot \sin^3 C \cdot \sin(A-B) \cdot \sin(B-C) \cdot \sin(C-A) : N$$

Hiebei ist
$$N = \sin^2(C-A) + \sin^2(C-B)$$
$$-2 \cdot \sin(C-B) \cdot \sin(C-A) \cdot \cos C$$
$$= \sin^2 C (\cos^2 A + \cos^2 B - 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)$$
$$+ \cos^2 C (\sin^2 A + \sin^2 B - 2 \sin A \cdot \sin B \cdot \cos C)$$
$$-2 \sin \cdot C \cdot \cos C (\sin A \cdot \cos A + \sin B \cdot \cos B$$
$$- \sin A \cdot \cos B \cdot \cos C - \sin B \cdot \cos A \cdot \cos C)$$
$$= \sin^2 C (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$$
$$- \cos^2 C - 2 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)$$
$$+ \cos^2 C \cdot \sin^2 C - 2 \cdot \sin C \cdot \cos C (\sin A \cdot \cos A$$
$$+ \sin B \cdot \cos B - \sin C \cdot \cos C)$$

Nun ist:
$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{1}{2}(3 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C)$$
$$= \frac{1}{2}[3 - 2 \cos C \cdot \cos(A-B) + 2 \cos^2 C - 1]$$
$$= \frac{1}{2}[2 - 4 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C] = 1 - 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$$

darum wird:
$$N = \sin^2 C\,[1 - \cos^2 C - 4 \cdot \cos A \cos B \cdot \cos C] + \cos^2 C \cdot \sin^2 C$$
$$-2 \cdot \sin C \cdot \cos C \left(\frac{\sin 2A + \sin 2B}{2} - \sin C \cdot \cos C\right)$$
$$= \sin^2 C\,[1 - \cos^2 C - 4 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C] + \cos^2 C \cdot \sin^2 C$$
$$-2 \cdot \sin C \cdot \cos C \cdot [\sin C \cdot \cos(A-B) + \sin C \cdot \cos(A+B)]$$
$$= \sin^2 C (1 - 4 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C - 4 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)$$
$$= \sin^2 C (1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)$$

Substituiert man diesen Wert N in den Ausdruck für λ_3, so kommt:

$$-\lambda_3 = 4 \cdot \sin C \cdot \sin (A - B) \cdot \sin (B - C) \cdot \sin (C - A)$$
$$: (1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)$$

Nun ist die Gleichung der reellen Asymptote:

$$2x [\cos C \cdot \sin (C - B) - \sin (C - A)]$$
$$- 2y \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C + \lambda_3 = 0$$

Nach den Regeln der ebenen analytischen Geometrie ist daher der Abstand derselben vom 0 Punkt ($\mathfrak{O}$):

$$-\lambda_3 : 2 \sqrt{[\cos C \cdot \sin (C - B) - \sin (C - A)]^2 + \sin^2 (C - B) \sin^2 C}$$

der Radikand ist:

$$[\cos C \cdot \sin (C - B) - \sin (C - A)]^2 + \sin^2 (C - B) \cdot \sin^2 C$$
$$= \sin^2 (C - B) + \sin^2 (C - A) - 2 \cdot \sin (C - B) \cdot \sin (C - A) \cdot \cos C$$
$$= \sin^2 C [1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C]$$

wie schon gefunden.

Unter Berücksichtigung des Wertes von λ_3 erhält man deshalb für den gesuchten Abstand:

$$2 \cdot \sin (A - B) \cdot \sin (B - C) \cdot \sin (C - A)$$
$$: \sqrt{(1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)^3}$$

und dies ist der Halbparameter der Kiepert'schen Parabel, das ist der Abstand ihres Brennpunktes von der Direktrix wie später gezeigt wird. Daraus ergibt sich die Konstruktion der reellen Asymptote: man verschiebe das $\triangle ABC$ parallel sich selbst, bis C nach $\mathfrak{O}$ fällt, in die Lage $A' B' C'$, zeichne den Brennpunkt der zum $\triangle A' B' C'$ gehörigen Kiepert'schen Parabel (D), so schneidet die reelle Asymptote auf der Verlängerung von $\mathfrak{O} D$ über $\mathfrak{O}$ hinaus das Stück $\mathfrak{O} D' = \mathfrak{O} D$ ab, aber da die Asymptote ausserdem zur Geraden von Euler parallel ist, so ist sie völlig bestimmt, denn durch D kann sie nicht gehen, sonst würde für den Fall, dass D Doppelpunkt der zyklischen Kurve ist, die reelle Asymptote mit derselben zwei im endlichen gelegene Punkte gemein haben, was unzulässig ist (s. Fig. 3).

Wie die reelle Asymptote, so bestimmt sich auch jede der imaginären Asymptoten. Die eine derselben habe die Gleichung $y + ix + \lambda_1 = 0$, wo λ_1 eine noch zu bestimmende Konstante ist; ersetzt man in der Kurvengleichung $y + i x$ durch $-\lambda_1$ und im Reste y durch $-i x - \lambda_1$, so kommt:

$$\begin{aligned} -\lambda_1 (-2 i x - \lambda_1)[-2 \cdot x \sin(C - A) + 2 \cdot \sin(C - B) \\ \cdot \sin C \cdot i \cdot x + 2 \cdot \sin(C - B) \cdot \cos C \cdot x] \\ + (2 a x - 2 b i x)[-2 x \cdot \sin(C - A) + 2 \sin(C - B) \\ \cdot \sin C \cdot i x + 2 \sin(C - B \cdot \cos C \cdot x] \\ + 4 \sin A \cdot \sin C \cdot x^2 \cdot \cos A + 4 \cdot \sin A \cdot \sin C \cdot \sin A \cdot i \cdot x^2 \\ - 4 \cdot \sin^3 C \cdot i \cdot x^2 - 4 \cdot \sin^2 C \cdot \cos C \cdot x^2 = 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} -\lambda_1 [i \cdot \sin(C - A) + \sin(C - B) \cdot \sin C - i \cdot \sin(C - B) \cdot \cos C] x^2 \\ = -(a - b i)[-\sin(C - A) + \sin(C - B) \cdot \sin C \\ \cdot i + \sin(C - B) \cdot \cos C] x^2 \\ -(\sin A \cdot \sin C \cdot \cos A + \sin A \cdot \sin C \cdot \sin A \cdot i \\ - \sin^3 C \cdot i - \sin^2 \cdot C \cdot \cos C) x^2 + \text{Glieder mit } x = 0; \end{aligned}$$

λ_1 muss so bestimmt werden, dass in dieser Gleichung die Glieder mit x^2 wegfallen (dies lehrt die Substitution $x = \frac{1}{x'}$ wo man nach der Substitution $x' = 0$ zu setzen hat).

Hieraus ergibt sich zur Bestimmung von λ_1 die Gleichung:

$$\begin{aligned} -\lambda_1 [i \sin(C - A) + \sin(C - B) \cdot \sin C - i \cdot \sin(C - B) \cdot \cos C] = \\ = -(a i + b)[i \cdot \sin(C - A) + \sin(C - B) \\ \cdot \sin C - i \cdot \sin(C - B) \cdot \cos C] \\ - \sin C (\sin A \cdot \cos A - \sin C \cdot \cos C) \\ - i \sin C (\sin^2 A - \sin^2 C) = 0, \end{aligned}$$

oder:

$$\lambda_1 = + b + a i + \frac{\sin C (\sin A \cdot \cos A - \sin C \cdot \cos C) + i \cdot \sin C (\sin^2 A - \sin^2 C)}{i \cdot \sin(C - A) + \sin(C - B) \cdot \sin C - i \sin(C - B) \cdot \cos C}$$

oder indem man Zähler und Nenner des Bruches mit

$$\sin(C - B) \cdot \sin C - i \sin(C - A) + i \sin(C - B) \cdot \cos C$$

multipliziert:

$$\lambda_1 = + b + a i + \frac{\begin{aligned}[\sin C (\sin A \cdot \cos A - \sin C \cdot \cos C) \\ + i \sin C \cdot (\sin^2 A - \sin^2 C)] \cdot \\ \cdot [\sin(C - B) \cdot \sin C - i \sin(C - A) + i \sin(C - B) \cdot \cos C]\end{aligned}}{\sin^2(C - B) + \sin^2(C - A) - 2 \cdot \sin(C - B) \cdot \sin(C - A) . \cos C}$$

Für die zweite imaginäre Asymptote $y - ix + \lambda_2 = 0$ erhält man analog:

$$\lambda_2 = + b - a i + [\sin C (\sin A \cdot \cos A - \sin C \cdot \cos C) - i \sin C (\sin^2 A - \sin^2 C)] \cdot \frac{\cdot [\sin (C - B) \cdot \sin C + i \sin (C - A) - i \sin (C - B) \cdot \cos C]}{\sin^2 (C - B) + \sin^2 (C - A) - 2 \cdot \sin (C - B) \cdot \sin (C - A) \cdot \cos C}$$

hieraus
$$\lambda_1 + \lambda_2 = + 2 b + [2 \sin^2 C \cdot \sin A \cdot \cos A \sin (C - B) - 2 \sin^3 C \cdot \cos C \cdot \sin (C - B) + 2 \sin^2 A \cdot \sin C \cdot \sin (C - A) - 2 \sin^2 A \cdot \sin C \cdot \cos C \cdot \sin (B - C) - 2 \sin^3 C \cdot \sin (C - A) + 2 \sin^3 C \cdot \cos C \cdot \sin (C - B)] : N,$$
wo

$$N = \sin^2 (C - B) + \sin^2 (C - A) - 2 \sin (C - B) \cdot \sin (C - A) \cdot \cos C$$

oder
$$\lambda_1 + \lambda_2 = + 2 b + [\sin 2 A \cdot \sin C (\cos A \cdot \sin C - \sin A \cdot \cos C) \cdot \sin (C - B) + 2 \sin C \cdot \sin (C - A) (\sin^2 A - \sin^2 C)] : N$$
oder

$$= + 2 b + [2 \sin C \cdot \sin (C - A) \cdot \sin A \cdot \sin (C - B) + 2 \sin C \cdot \sin (C - A) \cdot \sin B \sin (A - C)] : N$$

$$= + 2 b + 2 \sin C \cdot \sin (C - A) \frac{[\sin A \sin (C - B) - \sin B \cdot \sin (C - A)]}{N}$$

$$= + 2 b + \sin C \cdot \sin (C - A) \cdot \frac{(\cos 2 B - \cos 2 C - \cos 2 A + \cos 2 C)}{N}$$

$$= + 2 b + \frac{2 \sin^2 C \cdot \sin (C - A) \cdot \sin (A - B)}{N}$$

Wie schon gefunden, ist

$$N = \sin^2 C (1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)$$

also:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = + 2 b + \frac{2 \sin (C - A) \cdot \sin (A - B)}{1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}$$

und dies ist die negative doppelte Ordinate des Schnittpunktes der imaginären Asymptoten $y + i x + \lambda_1 = 0$ und $y - i x + \lambda_2 = 0$. Seine positive Ordinate wird also:

$$- b + \frac{\sin (C - A) \cdot \sin (B - A)}{1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}$$

und sein Abstand von der Seite B C (s. Fig. 3):

$$\sin(C-A)\cdot\sin(B-A):(1-8\cdot\cos A\cdot\cos\cdot B\cdot\cos C)$$

Aus Gründen der Analogie sind seine Abstände von den Seiten C A und A B:

$$\sin(A-B)\cdot\sin(C-B):(1-8\cdot\cos A\cdot\cos B\cos C) \text{ bezw.}$$

$$\sin(B-C)\cdot\sin(A-C):(1-8\cdot\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C)$$

Dies sind die Abstände des Brennpunktes der Kiepert'schen Parabel von den Seiten des Grunddreiecks A B C, wie nachher gezeigt wird. Unsere zyklischen Kurven 3. Ordnung haben also gemeinsame imaginäre Asymptoten, welche durch die imaginären Kreispunkte und durch den Brennpunkt der Kiepert'schen Parabel gehen. Der Brennpunkt der Kiepert'schen Parabel ist also auch ein gemeinsamer Brennpunkt dieser zyklischen Kurven.

VIII. Die Abstände des Brennpunktes der Kiepert'schen Parabel von den Seiten des Grunddreiecks ABC.

Der Abstand dieses Brennpunktes von der Seite BC ist nach Seite 35:

$$d=\frac{[\sin(C-A)-\sin(C-B)\cdot\cos C]\cdot\sin C(\sin^2 C-\sin^2 A) + \sin(C-B)\cdot\sin^2 C(\sin C\cdot\cos C-\sin A\cdot\cos A)}{[-\sin(C-A)+\sin(C-B)\cdot\cos C]^2+\sin^2(C-B)\cdot\sin^2 C}$$

Der Nenner ist wie bereits gefunden

$$=\sin^2 C(1-8\cdot\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C)$$

Der Zähler kann in die Form gebracht werden

$$[\sin(C-A)-\sin(C-B)\cdot\cos C]\cdot\sin C\cdot\sin B\cdot\sin(C-A)$$
$$-\sin(C-B)\cdot\sin^2 C\cdot\cos B\sin(C-A)$$
$$=-\sin(C-B)\cdot\sin(C-A)\cdot\sin C\cdot\sin A+\sin^2(C-A)\sin C\cdot\sin B$$
$$=\sin(C-A)\cdot\sin C\,[\sin(C-A)\cdot\sin B-(C-B)\cdot\sin A)$$
$$=\sin(C-A)\cdot\sin C\cdot\frac{1}{2}(\cos 2A-\underline{\cos 2}\,C+\underline{\cos 2}\,C-\cos 2B)$$
$$=\sin(C-A)\cdot\sin^2 C\cdot\sin(B-A)$$

Darum ist der Abstand des Brennpunktes von der Seite BC:

$$\underline{\sin(A-C)\cdot\sin(A-B):(1-8\cdot\cos A\cdot\cos B\cdot\cos\cdot C)}$$