Ueber eine zyklische Fläche vierter Ordnung

Arthur Fischer.

Ueber eine zyklische Fläche vierter Ordnung.

Eine Kugel von veränderlichem Radius bewege sich so, dass ihr Zentrum auf einer festen Ellipse fortschreitet und ihre Fläche durch den Mittelpunkt der Ellipse geht. Die Umhüllende dieser einfach unendlichen Schar von Kugeln [1]), die als solche zu den zyklischen Flächen gehört, ist Gegenstand vorliegender Arbeit.

I. Teil.

Untersuchung der Fläche in rechtwinkligen und Polarkoordinaten.

§ 1. Aufstellung der Flächengleichung in rechtwinkligen Koordinaten.

Die Ellipse, auf welcher sämtliche Kugelmittelpunkte liegen, bezeichnen wir als Leitellipse. Wir legen sie in die xy-Ebene eines räumlichen cartesischen Koordinatensystems derart, dass ihre Gleichung

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \tag{1}$$

wird, wo a und b die Halbachsen der Ellipse bedeuten.

Sind ξ, η, ζ die Koordinaten irgend eines Punktes einer bestimmten Kugel der Schar, deren Radius l und deren Mittelpunkt (x, y) auf der Leitellipse liegt, so gilt für ihn die Kugelgleichung

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + \zeta^2 = l^2,$$

---

[1]) Lecornu bezeichnet die Enveloppenflächen von Kugeln als „Perisphären". Die vorliegende Fläche gehört nach seiner Klassifikation zu den Perisphären 2. Gattung.

die sich, weil die Kugel durch den Mittelpunkt 0 geht, auf

$$f = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2(\xi x + \eta y) = 0 \tag{2}$$

reduziert.

Lässt man den Kugelmittelpunkt die ganze Ellipse durchlaufen, x und y also alle nach Gleichung (1) möglichen Werte annehmen, so stellt die Gleichung (2) die einfach unendliche Schar von Kugeln dar. Indem man x und y als Parameter auffasst und zwar x als unabhängigen und y als abhängigen, ergibt sich die Gleichung der Enveloppe aller Kugeln durch Elimination der Parameter x und y aus den Gleichungen

$$f = 0, \quad \frac{df}{dx} = 0$$

und aus Gl. (1). Die zweite Bedingung lautet in unserm Falle

$$\xi + \eta \frac{dy}{dx} = 0$$

oder, wenn man den aus (1) sich ergebenden Wert

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

einsetzt:

$$\frac{df}{dx} = a^2 y \xi - b^2 x \eta = 0. \tag{3}$$

Durch Elimination der parametrischen Koordinaten x, y des Kugelmittelpunktes aus den Gleichungen (1), (2) und (3) ergibt sich:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2\sqrt{a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2} = 0$$

oder, wenn wir ξ, η, ζ durch x, y, z ersetzen:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4(a^2 x^2 + b^2 y^2). \tag{I.}$$

Dies ist die gesuchte Gleichung der E n v e l o p p e n f l ä c h e.

Ist die Leitkurve speziell ein Kreis, also $b = a$, so reduziert sie sich auf:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2). \tag{Ia.}$$

Die Fläche wird, weil der Radius der erzeugenden Kugel konstant ist, zu einer Kanalfläche oder Röhrenfläche, die aus dem Torus hervorgeht, wenn dessen innerer Radius verschwindet.

Diskussion der Flächengleichung. Die Enveloppenfläche ist von der vierten Ordnung. Sie ist, wie man leicht sieht, in Bezug auf alle drei Koordinatenebenen symmetrisch.

Die homogen gemachte Flächengleichung heisst:

$$F = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 4\,w^2\,(a^2\,x^2 + b^2\,y^2) = 0. \qquad \text{Ib.}$$

Der Schnitt mit der unendlich fernen Ebene $w = 0$ ergibt sich zu

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0, \qquad (4)$$

d. h. der Richtungskegel ist ein imaginärer Kreiskegel. Die Fläche ist somit geschlossen und liegt ganz im Endlichen. Die Gleichung (4) stellt aber auch den unendlich fernen Kugelkreis dar, d. h. die Enveloppenfläche geht durch den unendlich fernen imaginären Kugelkreis. Diese Tatsache kann man sich dadurch erklären, dass jede Kugel durch den unendlich fernen imaginären Kugelkreis geht, also auch die Enveloppe aller Kugeln.

Der „Mittelpunkt“ der Fläche, d. h. der Ursprung $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, erfüllt die Flächengleichung und ist ein Doppelpunkt. Die Gleichung seines Knotenkegels ist

$$a^2x^2 + b^2y^2 = 0.$$

Dieser zerfällt in die beiden zur xz-Ebene symmetrischen imaginären Ebenen

$$y = \pm \frac{a}{b}\,ix,$$

welche Tangentialebenen im Nullpunkt sind. Beide Ebenengleichungen sind für $x = 0$, $y = 0$ erfüllt; die beiden imaginären Tangentialebenen schneiden sich also in der z-Achse, welche Knotenkante der Fläche im Mittelpunkt ist. Sie schneidet die Fläche in 4 zusammenfallenden Punkten. Der Nullpunkt ist deshalb ein biplanarer Doppelpunkt mit zwei konjugiert imaginären Tangentialebenen und reeller Knotenkante.

Es fragt sich, ob ausser dem Mittelpunkt noch andere Punkte Doppelpunkte seien. Damit ein Punkt Doppelpunkt sei, muss er die Bedingungsgleichungen

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial x} = (x^2 + y^2 + z^2)x - 2a^2w^2x = 0$$
$$F_2 = \frac{\partial F}{\partial y} = (x^2 + y^2 + z^2)y - 2b^2w^2y = 0$$
$$F_3 = \frac{\partial F}{\partial z} = (x^2 + y^2 + z^2)z \qquad = 0$$
$$F_4 = \frac{\partial F}{\partial w} = (x^2 + y^2 + z^2)^2 w \qquad = 0$$

erfüllen, und das tun nur der Nullpunkt $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $w = 1$ und die Punkte des unendlich fernen imaginären Kugelkreises: der Mittelpunkt und die Punkte des imaginären Kugelkreises sind die einzigen Doppelpunkte der Fläche. Der imaginäre Kugelkreis ist eine Doppelkurve der Fläche.

§ 2. **Schnitte mit Ebenen durch die z-Achse.**

Durch die z-Achse legen wir eine beliebige Ebene, die mit der x-Achse den veränderlichen Winkel φ einschliesse. Um eine einfache Gleichung für die Schnittfigur zu erhalten, machen wir diese Ebene vermittelst der Transformationsgleichungen

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$$
$$y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$$
$$z = z'$$

zur neuen $x'z'$-Ebene. Die transformierte Flächengleichung:

$$(x'^2 + y'^2 + z'^2)^2 = 4a^2(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)^2$$
$$+ 4b^2(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)^2$$

liefert für den Schnitt der Fläche mit der $x'z'$-Ebene $y' = 0$ die Gleichung

$$x'^2 + y'^2 = \pm 2\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} \cdot x',$$

die zwei kongruente Kreise darstellt, deren Peripherien den Nullpunkt enthalten und deren Zentren auf der positiven und negativen x'-Achse im Abstand

$$r = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} \qquad \text{II.}$$

vom Nullpunkt liegen. Jede Ebene durch die z-Achse schneidet die Fläche in zwei kongruenten Kreisen, deren Radien durch (II) gegeben sind; wir nennen sie Meridiankreise. Die Fläche enthält also eine einfach unendliche Schar von Kreisen, d. h. sie ist eine zyklische Fläche.

Führt man vermittelst

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{r}, \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

wieder rechtwinklige Koordinaten ein, so ergibt sich für die durch (II) dargestellte Kurve der Mittelpunkte aller Meridiankreise die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2, \qquad \text{IIa.}$$

die eine der Leitellipse umschriebene Booth'sche elliptische Lemniskate darstellt. Sie ist die Pedale der Ellipse in Bezug auf ihren Mittelpunkt und berührt diese nur in deren Scheiteln; also sind diese Berührungspunkte die einzigen Mittelpunkte von Meridiankreisen, die auf der Ellipse liegen. Die Radien der zu ihnen gehörenden Meridiankreise der xz- und yz-Ebene sind also gleich den Radien der Kugeln, die ihre Mittelpunkte in jenen Scheiteln haben, nämlich $r' = a$ und $r'' = b$. Diese den Werten $\varphi = 0^0$ und $\varphi = 90^0$ entsprechenden Radien bilden zugleich das Maximum und Minimum für r. Bezeichnen wir jene durch die xz- und yz-Ebene ausgeschnittenen Kreise als ersten bezw. zweiten Hauptmeridian, so können wir sagen:

Die Radien des ersten und zweiten Hauptmeridians bilden die Extremwerte aller Meridianhalbmesser und haben die Länge der grossen bezw. kleinen Halbachse der Leitellipse.

Für den Fall, dass $b = a$ wird, fällt die Kurve der Mittelpunkte sämtlicher Meridiankreise mit dem Leitkreis zusammen.

§ 3. Schnitt der Fläche mit der xy-Ebene.

Die Schnittkurve der Fläche mit der xy-Ebene, der «Äquator», hat die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 = 4(a^2x^2 + b^2y^2). \qquad \text{III.}$$

Sie ist eine Booth'sche elliptische Lemniskate, die zu einer Ellipse mit den Halbachsen 2a und 2b gehört. Sie ist zu den Koordinatenachsen symmetrisch und besteht aus einem geschlossenen Blatt um den Nullpunkt; dieser ist ein isolierter Doppelpunkt oder konjugierter Punkt der Kurve.

Da jede Kugel auf der xy-Ebene einen Kreis ausschneidet, so ist, wie sich übrigens auch direkt zeigen lässt, die Schnittkurve die Enveloppe aller durch den Nullpunkt gehender Kreise, deren Mittelpunkte auf der Ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

liegen. Diese Eigenschaft lässt sich besonders gut verwenden zur Konstruktion der Kurve.

Andererseits ist die Äquatorkurve auch der geometrische Ort der Fusspunkte der Perpendikel vom Nullpunkt auf alle Tangenten an die Ellipse von den doppelten Halbachsen:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = 4a^2b^2, \qquad \text{IV.}$$

wie leicht nachzuweisen ist, d. h. sie ist die Fusspunktskurve oder Pedale dieser letztern Ellipse in Bezug auf ihren Mittelpunkt als Pol.

Führt man in Gl. (III) mit Hilfe von

$$x = \varrho\cos\varphi \qquad y = \varrho\sin\varphi$$

Polarkoordinaten ein, so wird die Polargleichung des Aequators

$$\varrho^2 = 4(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi) = 4r^2. \qquad \text{IIIa.}$$

Hieraus ergibt sich die folgende Konstruktion für die Kurve.[1]) Man konstruiere (Fig. 1) um den Mittelpunkt C zwei Kreise mit den Radien 2a und 2b und ziehe einen beliebigen Strahl unter dem Winkel φ gegen die Hauptachse, der die beiden Kreise in den Punkten A und B schneidet. Zieht man durch A

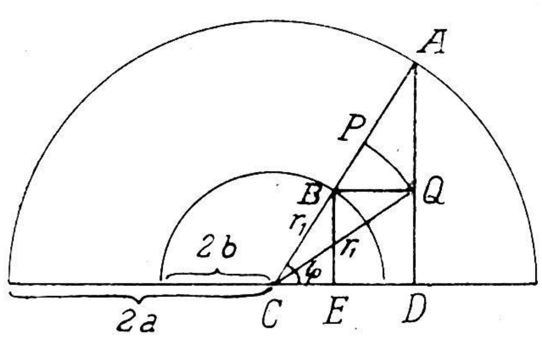

Fig. 1.

[1]) Schlömilch: Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis, I, S. 106.

eine Senkrechte und durch B eine Parallele zur Hauptachse, deren Schnittpunkt Q sei, so ist $CQ = \varrho$ der gesuchte Radiusvektor, der nur noch auf CA abzutragen ist. — Der Beweis ergibt sich aus $\triangle$ BQD, in welchem

$$BD = BE = 2b\sin\varphi \qquad CD = 2a\cos\varphi$$

ist, somit

$$\overline{CP}^2 = \overline{CQ}^2 = \varrho^2 = 4(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi) = 4r^2.$$

Für die höchsten und tiefsten Punkte der Kurve ergeben sich die Koordinaten

$$x = \pm\frac{a}{c}\sqrt{a^2 - 2b^2} \qquad y = \pm\frac{a^2}{c},$$

wenn c die lineare Exzentrizität der Leitellipse bedeutet. Sie fallen für $a = b\sqrt{2}$ mit den Scheiteln der kleinen Achse der Ellipse (IV) zusammen.

Für die Koordinaten der vier Wendepunkte findet man

$$x = \frac{\pm ab^2}{c(a^2 + b^2)}\sqrt{3(a^2 - 2b^2)}, \quad y = \pm\frac{a^2 b}{c(a^2 + b^2)}\sqrt{3(2a^2 - b^2)} \quad V.$$

Sie sind nur reell, wenn $a > b\sqrt{2}$. Für $a = b\sqrt{2}$ fallen sie in die Scheitel der kleinen Achse der Ellipse (IV).

Die Fusspunkt-Eigenschaft des Aequators lässt sich sofort für die Fläche verallgemeinern. Ein beliebiger Meridiankreis (Fig. 2) vom Mittelpunkt C treffe den Aequator im Punkte Q. Ist dann P irgend ein Punkt dieses Meridiankreises, so ist $\sphericalangle QPO = 90^0$. Die in Q zu OQ senkrechte Gerade t ist eine Tangente an die Ellipse (IV). Legt man durch sie alle möglichen Ebenen und fällt von O aus auf jede ein Lot, so liegen alle Fusspunkte dieser Lote auf dem Meridiankreis OPQ. Hieraus ergibt sich:

Legt man durch alle Tangenten der Ellipse von den Halbachsen 2a und 2b alle möglichen Ebenen und fällt Perpendikel vom Mittelpunkt der Ellipse auf jede derselben, so ist der Ort der Fusspunkte die betrachtete zyklische Fläche vierter Ordnung.

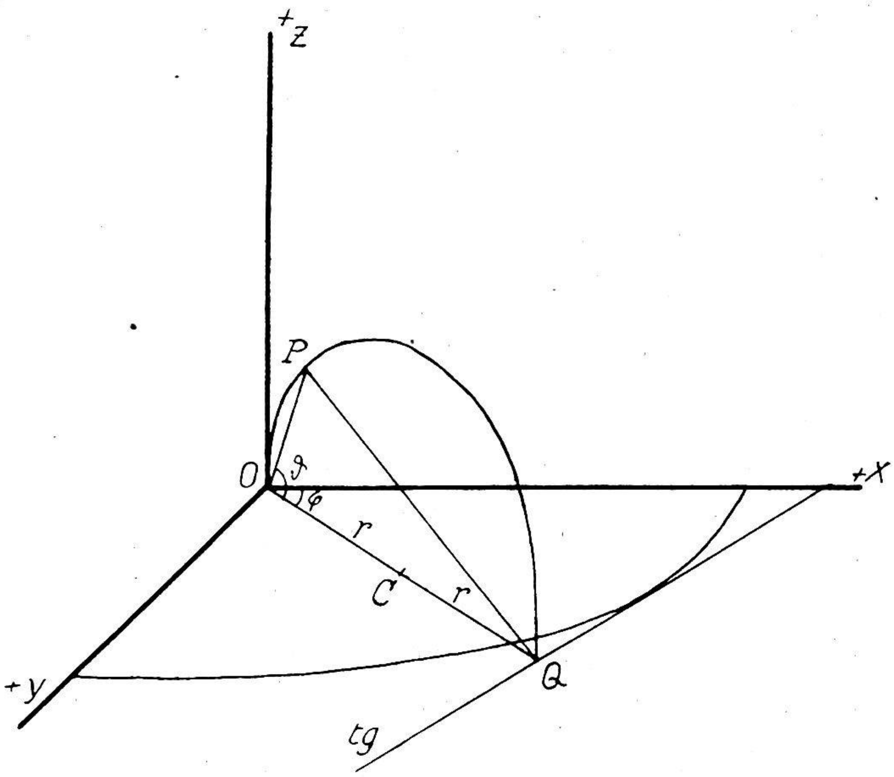

Fig. 2.

§ 4. Schnitte parallel der xy-Ebene.

Durch eine zur xy-Ebene parallele Ebene von der Gleichung $z = s = \text{const.}$ wird die Fläche in der in Bezug auf den jeweiligen Nullpunkt zentrisch symmetrischen Kurve

$$(x^2 + y^2 + s^2)^2 = 4(a^2x^2 + b^2y^2) \qquad (1)$$

geschnitten, die, wie aus der etwas umgeformten Gleichung

$$(x^2 + y^2 + s^2 - 2b^2)^2 = 4(c^2x^2 - b^2s^2 + b^4) \qquad (2)$$

ersichtlich ist, zu den spirischen Linien des Perseus gehört. Sie ist eine bizirkulare C_4 und besitzt als solche zwei ausserordentliche Brennpunkte, deren Orthogonalprojektionen auf die xy-Ebene sich mit den Brennpunkten der Leitellipse decken.

Zieht man vom Nullpunkt aus beliebige Strahlen durch die Kurve, so hat das Produkt der auf jedem dieser Strahlen vom Nullpunkt aus gemessenen Radienvektoren den konstanten Wert s^4 (Potenz).

Führt man vermittelst

$$x = \varrho\cos\varphi, \qquad y = \varrho\sin\varphi$$

Polarkoordinaten ein, so wird die Gleichung (1):

$$(\varrho^2 + s^2)^2 = 4\,\varrho^2(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi),$$

woraus sich ergibt

$$\varrho = \pm\sqrt{2r^2 - s^2 \pm 2r\sqrt{r^2 - s^2}},$$

wo $a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi = r^2$ gesetzt ist.

1. Fall: Ist $s < b$, so wird ϱ immer reell, also werden auch alle vier Schnittpunkte eines Strahles durch den Nullpunkt mit der Kurve reell, d. h.

Alle Ebenen $z < b$ schneiden die Fläche in zwei getrennten, reellen Kurven, die den Nullpunkt umschliessen (Fig. 3[1]), Kurve a).

2. Fall: Ist $s = b$, so reduziert sich Gl. (2) auf

$$(x \pm c)^2 + y^2 = a^2,$$

welche zwei Kreise vom Radius a darstellt, deren Mittelpunkte in den beiden Brennpunkten liegen:

Die Ebenen $z = \pm b$ schneiden aus der Fläche je zwei Kreise aus, die sich in der yz-Ebene kreuzen (Fig. 3, Kurve b).

3. Fall. Ist $a > s > b$, so werden nicht alle Radienvektoren reell. Die beiden Kurven haben kein Flächenstück gemeinsam und schneiden die y-Achse nicht.

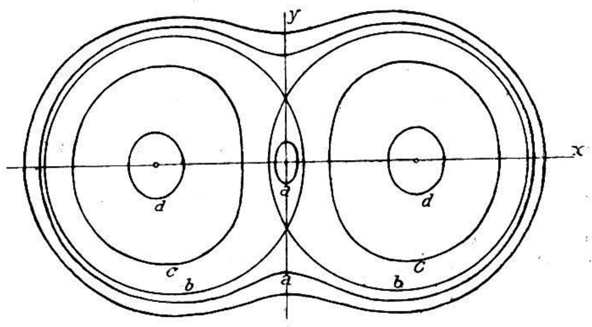

Fig. 3.

Für die vom Nullpunkt an die Kurve gelegte Tangente müssen die Radienvektoren gleich gross sein. Hieraus ergibt sich der Richtungskoeffizient dieser Tangente nach Gl. (2)

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\sqrt{\frac{a^2 - s^2}{s^2 - b^2}}.$$

---

[1]) Ueber die Konstruktion der spirischen Linien vergl. Teixeira. Arch. d. Math. (3), 11 (1907), S. 64.

Uebersteigt der Richtungskoeffizient des Strahls diese Grösse, so werden die Schnittpunkte imaginär, d. h.

Für alle Ebenen $a > z > b$ besteht der Schnitt mit der Fläche aus zwei getrennten, reellen Kurven, die den Nullpunkt nicht umgeben und von denen jede zur x-Achse symmetrisch ist (Fig. 3, Kurven c und d).

§ 5. Tangentialebene und Normale.

Schreibt man die Flächengleichung in der Form

$$F = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 4(a^2 x^2 + b^2 y^2) = 0$$

und setzt zur Abkürzung

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \text{VI.}$$

so werden die partiellen Ableitungen von F:

$$F_x = 4(R^2 - 2a^2)x \qquad F_y = 4(R^2 - 2b^2)y \qquad F_z = 4R^2 z,$$

und die Gleichung der Tangentialebene

$$(X - x)F_x + (Y - y)F_y + (Z - z)F_z = 0,$$

wo X, Y, Z die laufenden Koordinaten, x, y, z die Koordinaten des Berührungspunktes bedeuten, nimmt die Form an:

$$2a^2 x(X + x) + 2b^2 y(Y + y)$$
$$= (x^2 + y^2 + z^2)(Xx + Yy + Zz). \qquad \text{VII.}$$

In allen Punkten des Schnittes der Fläche mit den Koordinatenebenen steht die Tangentialebene auf der betr. Koordinatenebene senkrecht, wie sich aus Symmetriegründen oder auch durch die folgende Rechnung ergibt: Für die xz-Ebene z. B. ist $y = 0$. Die Gleichung der Tangentialebene in den Punkten der Schnittkurve auf der xz-Ebene ist also:

$$2a^2 x(X + x) = (x^2 + z^2)(Xx + Zz).$$

Diese Ebene steht auf der xz-Ebene senkrecht.

Die Tangentialebenen in den höchsten bezw. tiefsten Punkten der Fläche, für die $x = \pm a$, $y = 0$, $z = a$ bezw. $x = \pm a$, $y = 0$, $z = -a$ ist, haben die Gleichungen

$$Z = \pm a.$$

Sie sind Doppeltangentialebenen.

Ebenso sind die zu den Berührungspunkten $x=0, y=\pm b$, $z=b$ bezw. $x=0, y=\pm b, z=-b$ gehörenden Tangentialebenen von der Gleichung

$$z=\pm b$$

Doppeltangentialebenen. Ihr Schnitt mit der Fläche ist bereits in § 4 diskutiert worden.

Die Richtungskosinuse der Flächennormalen:

$$\cos\alpha=\frac{F_x}{k},\qquad \cos\beta=\frac{F_y}{k},\qquad \cos\gamma=\frac{F_z}{k},$$

wo $$k=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}=8\sqrt{a^4x^2+b^4y^2}$$

ist, werden:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{R^2-2a^2}{2\sqrt{a^4x^2+b^4y^2}}\,x\\ \cos\beta&=\frac{R^2-2b^2}{2\sqrt{a^4x^2+b^4y^2}}\,y\\ \cos\gamma&=\frac{R^2}{2\sqrt{a^4x^2+b^4y^2}}\,z,\end{aligned}\right\}\qquad \text{VIII.}$$

sodass die Doppelgleichung der Normalen im Punkte (x, y, z) der Fläche die Form

$$\frac{X-x}{(R^2-2a^2)x}=\frac{Y-y}{(R^2-2b^2)y}=\frac{Z-z}{R^2z}\qquad \text{IX.}$$

annimmt.

Für den Schnittpunkt der Normalen mit der xy-Ebene findet man hieraus mit Benützung der Flächengleichung:

$$X=\frac{a^2x}{2(a^2x^2+b^2y^2)},\quad Y=\frac{b^2y}{2(a^2x^2+b^2y^2)}.\qquad (1)$$

Bildet man den Ausdruck $b^2X^2+a^2Y^2$, so ergibt sich, dass die Koordinaten der Schnittpunkte der Flächennormalen im Punkte (x, y, z) mit der xy-Ebene durch die Gleichung

$$b^2X^2+a^2Y^2=a^2b^2$$

verbunden sind. Sie ist vom Punkte (x, y, z) unabhängig und gilt also, wenn X und Y als veränderlich aufgefasst werden, für jede beliebige Normale. Wir ersehen hieraus, dass der Ort der Schnittpunkte aller Flächennormalen mit der Aequatorebene die Leitellipse ist.

Fassen wir insbesondere die Normalen der Fläche längs der Meridiankreise ins Auge, so ist für diese $y = mx$ zu setzen. In diesem Falle werden die Koordinaten der Spurpunkte nach (1):

$$X = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}} = \text{const}, \quad Y = \frac{b^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}} = \text{const}, \tag{2}$$

d. h. die Flächennormalen längs eines Meridiankreises schneiden sich alle in einem Punkte der Leitellipse, sie bilden einen Kreiskegel.

Es bleibt noch zu zeigen, dass dieser Kegel ein gerader Kreiskegel ist. Für die Koordinaten des zum Meridiankreis $y = mx$ gehörenden Mittelpunktes ergibt sich

$$X_1 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}}{1 + m^2}, \quad Y_1 = \frac{m\sqrt{a^2 + b^2 m^2}}{1 + m^2}. \tag{3}$$

Die Verbindungsgerade dieses Kreismittelpunktes mit dem Spurpunkte (2) ergibt den Richtungskoeffizienten

$$m_1 = -\frac{1}{m}.$$

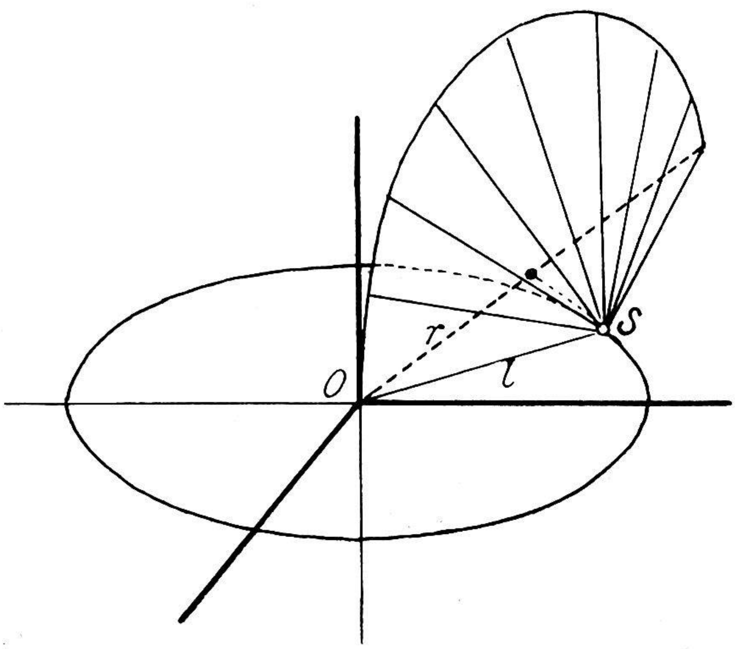

Fig. 4.

Die Achse des Kreiskegels steht also senkrecht zur Basis, dem Meridiankreis.

Die Länge der Erzeugenden dieses Kreiskegels ist gleich dem Radius l der erzeugenden Kugel, deren Mittelpunkt im Spurpunkt S liegt (Fig. 4) und es ist

$$l^2 = \overline{OS}^2 = X^2 + Y^2 = \frac{a^4}{a^2 + b^2 m^2} + \frac{b^4 m^2}{a^2 + b^2 m^2}$$

oder, wenn $m = \operatorname{tg}\varphi$ gesetzt wird:

$$l = \frac{\sqrt{a^4\cos^2\varphi + b^4\sin^2\varphi}}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$t = \sqrt{a^4\cos^2\varphi + b^4\sin^2\varphi} \qquad \text{X.}$$

und berücksichtigen Gl. II, so wird

$$t = l \cdot r. \qquad \text{XI.}$$

§ 6. **Kubatur und Komplanation.**

Um das Volumen des von der Fläche begrenzten Körpers und dessen Oberfläche zu ermitteln, führen wir räumliche Polarkoordinaten $\varrho = OP$, $\varphi = \measuredangle xOQ$, $\vartheta = \measuredangle QOP$ (Fig. 2) ein (wobei ϱ eine von IIIa verschiedene Bedeutung hat). Von diesen sind aber nur zwei, z. B. φ und ϑ als unabhängig zu betrachten. Für ϱ ergibt sich aus der Figur 2:

$$\varrho = 2r\cos\vartheta, \qquad (1)$$

wo $r = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}$.

Das Volumen des Körpers ist gleich dem achtfachen Volumen des in einem Oktanten liegenden Teils des Körpers, also[1])

$$V = 8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\varrho} \varrho^2\cos\vartheta\, d\varrho\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Führt man die Integration nach ϱ und ϑ aus und berücksichtigt die Gl. (1), so wird

$$V = 4\pi\int_0^{\pi/2}\sqrt{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^3}\,d\varphi,$$

was sich auch schreiben lässt:

$$V = 4a^3\pi\int_0^{\pi/2}\sqrt{(1 - e^2\sin^2\varphi)^3}\,d\varphi$$

$\left(\text{wo } e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)$ oder in der bekannten Schreibweise:

[1]) Serret: Differential- und Integralrechnung Nr. 604.

$$V = 4a^3\pi \int_0^{\pi/2} \Delta^3\varphi\, d\varphi.$$

Unsere Aufgabe ist zunächst, das unbestimmte Integral

$$J = \int \Delta^3 \varphi\, d\varphi$$

auf elliptische Normalintegrale zu reduzieren. Wir schreiben zu diesem Zwecke:

$$J = \int \frac{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^2}{\Delta\varphi} = \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - 2e^2 \int \frac{\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\, d\varphi + e^4 \int \frac{\sin^4\varphi}{\Delta\varphi}\, d\varphi.$$

Nun ist bekanntlich

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = F(e, \varphi)$$

das elliptische Normalintegral I. Art und

$$\int \frac{\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{e^2} \{ F(e,\varphi) - E(e,\varphi) \},$$

wo $E(e,\varphi)$ das elliptische Normalintegral II. Art bedeutet. Aus der Rekursionsformel:

$$J_m = \int \frac{\sin^m\varphi}{\Delta\varphi}\, d\varphi = \frac{(m-2)(1+e^2)}{(m-1)e^2} J_{m-2} - \frac{m-3}{(m-1)e^2} J_{m-4} + \frac{\sin^{m-3}\varphi \cos\varphi\, \Delta\varphi}{(m-1)e^2}$$

ergibt sich weiter

$$\int \frac{\sin^4\varphi}{\Delta\varphi}\, d\varphi = \frac{2(1+e^2)}{3e^4} \{ F(e,\varphi) - E(e,\varphi) \} - \frac{1}{3e^2} F(e,\varphi) + \frac{\sin\varphi \cos\varphi\, \Delta\varphi}{3e^2},$$

sodass jetzt

$$J = F(e,\varphi) - 2 \{ F(e,\varphi) - E(e,\varphi) \} + 2 \cdot \frac{1+e^2}{3} \{ F(e,\varphi) - E(e,\varphi) \} - \frac{e^2}{3} F(e,\varphi) + \frac{e^2}{3} \sin\varphi \cos\varphi\, \Delta\varphi$$

wird, oder nach vorgenommener Reduktion:

$$J = \int \Delta^3 \varphi d\varphi = -\frac{1}{3}\frac{b^2}{a^2} F(e,\varphi) + \frac{2}{3}\frac{a^2+b^2}{a^2} E(e,\varphi)$$

$$+ \frac{a^2-b^2}{3a^2} \sin\varphi \cos\varphi \Delta\varphi.$$

Das bestimmte Integral zwischen den Grenzen o und $\pi/_2$ wird

$$J = \int_0^{\pi/2} \Delta^3 \varphi d\varphi = \frac{1}{3a^2} \{ -b^2 K + 2(a^2+b^2) E \},$$

wo K und E die vollständigen elliptischen Normalintegrale I. und II. Art bedeuten. Also ist das Volumen der ganzen zyklischen Fläche

$$V = \frac{4}{3} a\pi \{ 2(a^2+b^2)E - b^2 K \}. \qquad \text{XII.}$$

Die Formel muss natürlich auch gelten, wenn $b = 0$, d. h. wenn die Ellipse sich auf die Strecke $2a$ reduziert. Dadurch bekommen wir ein Mittel an die Hand, die Formel XII. zu prüfen. Ist nämlich $b = 0$, so wird $e = 1$, also $E = 1$ und

$$V = 2 \cdot \frac{4}{3} a^3 \pi,$$

also gleich dem Volumen zweier Kugeln vom Radius a. In der Tat zerfällt unter der Annahme $b = 0$ der Körper in zwei getrennte, sich berührende Kugeln vom Radius a.

Für den Fall, dass $b = a$ ist, vereinfacht sich die Formel XII auf

$$V = 2a^3\pi^2. \qquad \text{XIIa.}$$

Aus der Komplanationsformel für eine in räumlichen Polarkoordinaten gegebene Fläche:[1])

[1]) Serret, l. c., Nr. 601.

$$0=\int\int\varrho\sqrt{\left(\frac{\partial\varrho}{\partial\varphi}\right)^2+\left[\left(\frac{\partial\varrho}{\partial\vartheta}\right)^2+\varrho^2\right]\cos^2\vartheta}\,d\vartheta\,d\varphi$$

ergibt sich, weil in unserm Falle nach Gl. (1)

$$\frac{\partial\varrho}{\partial\varphi}=-2\cos\vartheta\cdot\frac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{r}$$

$$\frac{\partial\varrho}{\partial\vartheta}=-2r\sin\vartheta \qquad \text{ist:}$$

$$0=4\int\int t\cos^2\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta.$$

Die ganze Oberfläche ist gleich der achtfachen Oberfläche eines in einem Oktanten liegenden Teiles, also

$$0=32\int_0^{\pi/2}t\,d\varphi\int_0^{\pi/2}\cos^2\vartheta\,d\vartheta.$$

$$=8a^2\pi\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

wenn $k^2=\frac{a^4-b^4}{a^4}$

gesetzt wird. Die Oberfläche der ganzen zyklischen Fläche wird also:

$$0=8a^2\pi E, \qquad \text{XIII.}$$

wo E das vollständige elliptische Normalintegral II. Art vom Modul $\frac{1}{a^2}\sqrt{a^4-b^4}$ vorstellt.

Für $b=0$ reduziert sich die Formel, wie erforderlich, auf

$$0=2\cdot 4a^2\pi,$$

d. h. auf die Oberfläche zweier Kugeln vom Radius a.

Ist $b=a$, so wird die Formel:

$$0=4a^2\pi^2. \qquad \text{XIII a.}$$

§ 7. Die Krümmungslinien.

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien:

$$\begin{vmatrix} dx & dF_x & F_x \\ dy & dF_y & F_y \\ dz & dF_z & F_z \end{vmatrix} = 0$$

wird für die vorliegende zyklische Fläche:

$$\begin{vmatrix} dx & xd(R^2) + (R^2 - 2a^2)dx & x(R^2 - 2a^2) \\ dy & yd(R^2) + (R^2 - 2b^2)dy & y(R^2 - 2b^2) \\ dz & zd(R^2) + R^2 dz & zR^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Sie lässt sich mit Benutzung der Flächengleichung auf die Form

$$(xdy - ydx)\left\{2xzdx + 2yzdy + (z^2 - x^2 - y^2)dz\right\} = 0$$

bringen.

Die Differentialgleichungen der beiden Scharen von Krümmungslinien sind also:

$$xdy - ydx = 0 \tag{1}$$

$$2xzdx + 2yzdy + (z^2 - x^2 - y^2)dz = 0. \tag{2}$$

Die Integration von Gl. (1) ergibt

$$y = kx. \qquad \text{XIV.}$$

Dies ist die Gleichung eines Ebenenbüschels durch die z-Achse, das die Fläche nach § 2 in den erzeugenden Meridiankreisen schneidet. Wir finden also: Die erste Schar der Krümmungslinien ist eben und wird durch die Meridiankreise dargestellt.[1])

Die Gl. (2) ist eine totale Differentialgleichung von der allgemeinen Form

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Eine solche kann leicht integriert werden,[2]) wenn die Bedingung

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$$

[1]) Dieser Satz kann für jede Einhüllende einer einfach unendlichen Kugelschar verallgemeinert werden. Enz. d. Math. III. D. 5. 4 p. 278.

[2]) J. H. Graf: Differentialgleichungen, p. 104.

erfüllt ist. Dies ist, wie sich leicht nachrechnen lässt, für die vorliegende Differentialgleichung (2) der Fall. Um die Integration auszuführen, nehme man z als konstant an, also:

$$x\,dx + y\,dy = 0,$$

integriere und ersetze die auftretende Integrationskonstante durch eine willkürliche Funktion von z:

$$x^2 + y^2 = \varphi(z). \tag{3}$$

Durch totale Differentation folgt hieraus:

$$2x\,dx + 2y\,dy - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,dz = 0.$$

Vergleicht man diese mit (2), so ergibt sich

$$-z\frac{\partial \varphi}{\partial z} = z^2 - (x^2 + y^2) = z^2 - \varphi(z)$$

und durch Integration dieser Differentialgleichung:

$$\varphi(z) = -z^2 + 2Cz,$$

wo C eine arbiträre Konstante ist. Setzt man diesen Wert in (3) ein, so heisst die integrierte Gleichung (2):

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2Cz = 0. \tag{XV.}$$

Dies ist die Gleichung einer Kugel, die durch den Nullpunkt geht und deren Mittelpunkt auf der z-Achse im Abstand C von 0 liegt. Da C willkürlich ist, so folgt: *Die zweite Schar von Krümmungslinien wird durch Kugeln ausgeschnitten, deren Mittelpunkte in der z-Achse liegen und die durch den Nullpunkt gehen.*

Um die Projektion der zweiten Schar von Krümmungslinien auf die y z-Ebene zu finden, eliminieren wir aus (XV) und aus der Flächengleichung (I) x und erhalten die Schar von Kegelschnitten:

$$y^2 = 2\frac{a^2 C}{c^2} z - \frac{a^2 + C^2}{c^2} z^2.$$

Es ist dies die Gleichung einer Schar von *Ellipsen*, deren Halbachsen

$$a' = \frac{a^2 C}{a^2 + C^2} \qquad b' = \frac{a^2 C}{c\sqrt{a^2 + C^2}}$$

sind und deren Scheitel im Nullpunkte liegen, mit der y-Achse als Scheiteltangente.

In analoger Weise ergibt sich für die Projektion auf die x z-Ebene die Gleichung

$$x^2 = -\frac{2 b^2 C}{c^2} z + \frac{b^2 + C^2}{c^2} z^2,$$

welche bei veränderlichem C eine Schar von Hyperbeln darstellt, deren Scheitel im Ursprung liegen.

Es ist klar, dass weder im einen, noch im andern Falle die ganze Kurve in Betracht fällt. Wir können deshalb sagen: Die Projektionen der zweiten Schar von Krümmungslinien auf die yz-Ebene sind Ellipsenbogen, auf die xz-Ebene Hyperbelbogen.

Für die Projektion auf die x y-Ebene findet man

$$C^4 (x^2 + y^2)^2 + 2 C^2 (x^2 + y^2 - 2 C^2)(a^2 x^2 + b^2 y^2) + (a^2 x^2 + b^2 y^2)^2 = 0.$$

Die Projektion der zweiten Schar der Krümmungslinien auf die xy-Ebene ist eine Schar von Kurven vierten Grades.

Es ist weiter von Interesse, den Winkel, unter dem sich die Kugeln und die Fläche schneiden, zu untersuchen. Zunächst gilt der Satz von Joachimsthal: Liegt eine Krümmungslinie einer Fläche auf einer Kugel, dann schneidet sich die Kugel mit der Fläche längs der ganzen Krümmungslinie unter konstantem Winkel. Wir brauchen also für jede Krümmungslinie der zweiten Schar den Winkel nur in einem Punkte derselben zu bestimmen, dann ist er längs der ganzen Krümmungslinie gleich gross. Diese Bestimmung nehmen wir für die Punkte des in der x z-Ebene liegenden Meridians vor. Da dieser Kreis die y-Achse im Nullpunkt berührt, der Schnittkreis der Kugel mit der x z-Ebene aber die x-Achse im Nullpunkt tangiert, so schneiden sich beide Kreise im Nullpunkt und somit auch im zweiten Schnittpunkt, dem Flächenpunkt, rechtwinklig, wie auch analytisch leicht nachzuweisen ist. Und weil die Tangentialebenen längs dieses Meridians auf der x z-Ebene senkrecht stehen, so schliessen auch sie einen rechten Winkel ein. Dieser Winkel ist von der Grösse C unabhängig und bleibt also für alle Krümmungslinien der zweiten Schar derselbe. Mit Berücksichtigung des Satzes von

Joachimsthal folgt hieraus: Die Kugeln, auf denen die zweite Schar von Krümmungslinien liegt, durchschneiden die Fläche überall rechtwinklig[1]).

Da die Tangentialebenen der Fläche in den sämtlichen Punkten einer Krümmungslinie der zweiten Schar auf den Tangentialebenen in denselben Punkten an die zugehörige Kugel senkrecht stehen, so gehen sie alle durch den Mittelpunkt dieser Kugel. Umgekehrt ergibt sich also: Die Gesamtheit aller von einem festen Punkte der z-Achse aus an die Fläche gelegter Tangentialebenen berührt die Fläche längs einer Krümmungslinie der zweiten Schar. Der Beweis lässt sich übrigens auch analytisch sofort führen. Für den Punkt $X = 0$, $Y = 0$, $Z = C$ der z-Achse werden die Gleichungen der Tangentialebenen nach (VII):

$$2(a^2 x^2 + b^2 y^2) = (x^2 + y^2 + z^2) \cdot Cz$$

oder mit Benützung der Flächengleichung:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Cz.$$

Die Berührungspunkte unterliegen also dieser Bedingung, die genau mit der Gl. XV der zweiten Schar von Krümmungslinien übereinstimmt.

Aus der Tatsache, dass der Kugelradius die Fläche berührt, nicht aber schneidet, ergibt sich eine einfache Konstruktion der Krümmungslinien der zweiten Schar: Man befestige einen Faden in irgend einem Punkte der z-Achse, wähle seine Länge gleich seiner Entfernung vom Nullpunkt und verbinde sein Ende mit der Spitze eines Bleistifts. Bewegt man die Bleistiftspitze bei gespanntem Faden auf der Fläche, so beschreibt sie eine Krümmungslinie.

---

[1]) Dieser Satz lässt sich auch aus den allgemeinen Untersuchungen von Bonnet [Journal de l'école polyt. 20 (1853) p. 117] folgern: Ist für eine Fläche das System der einen Krümmungslinien eben und gehen ihre Ebenen durch ein und dieselbe Gerade, so liegen die Krümmungslinien der andern Schar auf Kugeln, welche die Fläche senkrecht schneiden, und deren Mittelpunkte in jener Geraden liegen.

II. Teil.

Untersuchung der Fläche in der Parameter-Darstellung.

I. Kapitel.

Parameterdarstellung der Fläche. Die Kurve der parabolischen Punkte.

§ 8. Die Parameterdarstellung.

Am einfachsten werden die Ausdrücke für die Parameterdarstellung der Fläche, wenn man die Krümmungslinien als Parameterkurven einführt und sich auf die in § 7 gefundenen Eigenschaften derselben stützt.

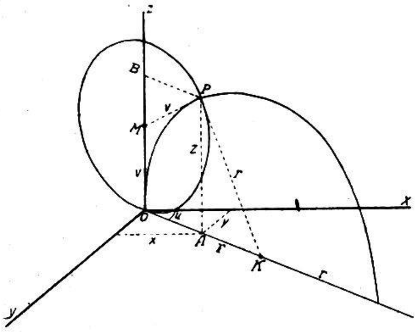

Fig. 5.

Eine durch die z-Achse gelegte Ebene, die mit der xz-Ebene den Winkel u bildet, schneidet die Fläche in einem Meridiankreis vom Radius r und vom Mittelpunkt K (Fig. 5), der auf der Kurve

$$r^2 = a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u$$

(nach Gl. II) liegt, und die Kugel vom Mittelpunkt M auf der z-Achse und vom Radius v (die auf der Fläche eine Krümmungslinie der zweiten Schar ausschneidet) in einem Kreis. Beide Kreise schneiden sich nach § 7 orthogonal in einem Punkte P der Fläche. Es ist somit

$$\triangle BPM \sim \triangle APK$$

Hieraus ergibt sich

$$AK : r = BM : v$$

$$\sqrt{r^2 - z^2} : r = v - z : v$$

$$z = \frac{2 r^2 v}{r^2 + v^2}$$

Liegt A zwischen O und K, so folgt:

$$AO = OK - KA = r - \sqrt{r^2 - \frac{4 r^4 v^2}{(r^2 + v^2)^2}}$$

$$= \frac{2 r v^2}{r^2 + v^2}.$$

Aber auch wenn A ausserhalb OK liegt, gilt dasselbe. Es wird also

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2rv^2}{r^2+v^2}\cos u \\ y &= \frac{2rv^2}{r^2+v^2}\sin u \\ z &= \frac{2r^2v}{r^2+v^2} \end{aligned}\right\} \qquad \text{XVI.}$$

wobei $$r = \sqrt{a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u}.$$

Dies sind die Koordinaten eines Flächenpunktes in der Parameterdarstellung. Die Parameterlinien $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ sind die erste und zweite Schar von Krümmungslinien; u ist der Winkel der Meridianebene gegen die xz-Ebene, v der Radius der veränderlichen Kugel, die zu der zweiten Schar von Krümmungslinien gehört.

Um die Fundamentalgrössen aufzustellen, ist es vorteilhaft, diese Gleichungen auf die Form

$$x = \frac{vz}{r}\cos u \qquad y = \frac{vz}{r}\sin u \qquad z = \frac{2r^2v}{r^2+v^2} \qquad \text{XVIa.}$$

zu bringen. Wir berechnen zunächst:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= -\frac{4c^2v^3}{(r^2+v^2)^2}\sin u\cos u \\ \frac{\partial r}{\partial u} &= -\frac{c^2}{r}\sin u\cos u \end{aligned} \qquad (1)$$

wobei $c^2 = a^2 - b^2$. Ferner:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{v}{r^2}\left\{r\left(-z\sin u + \cos u\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\right) - z\cos u\cdot\frac{\partial r}{\partial u}\right\}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{v}{r^2}\left\{r\left(z\cos u + \sin u\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\right) - z\sin u\cdot\frac{\partial r}{\partial u}\right\},$$

sodass

$$E = S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = \frac{v^2}{r^4}\left\{r^2z^2 + r^2\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + z^2\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2 - 2rz\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2.\right.$$

Setzt man die Werte (1) ein und vereinfacht, so ergibt sich

$$E = \frac{4 v^4 t^2}{r^2 (r^2 + v^2)^2}, \tag{2}$$

wo t die Bedeutung (X) hat:

$$t = \sqrt{a^4 \cos^2 u + b^4 \sin^2 u}.$$

Weiter ist:

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2 r^2 (r^2 - v^2)}{(r^2 + v^2)^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{4 r^3 v}{(r^2 + v^2)^2} \cos u$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{4 r^3 v}{(r^2 + v^2)^2} \sin u$$

und hieraus findet man:

$$F = S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right) = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{2 r^2}{r^2 + v^2} - \frac{8 r^3 v^3}{(r^2 + v^2)^3} \cdot \frac{\partial r}{\partial u}$$

oder ausgerechnet

$$F = 0. \tag{3}$$

Schliesslich wird

$$G = S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = \frac{4 r^4}{(r^2 + v^2)^2} \tag{4}$$

und

$$\triangle = + \sqrt{E G - F^2} = \frac{4 r v^2}{(r^2 + v^2)^2} \cdot t.$$

Die Richtungscosinuse der Flächennormalen ergeben sich am einfachsten aus den Formeln VIII, in denen

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4 r^2 v^2}{r^2 + v^2}$$

$$\sqrt{a^4 x^2 + b^4 y^2} = 2 \frac{r v^2}{r^2 + v^2} \cdot t$$

zu setzen ist. Dann wird

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\cos u}{t} \cdot \frac{2 r^2 v^2 - a^2 (r^2 + v^2)}{r^2 + v^2} \\ \cos\beta &= \frac{\sin u}{t} \cdot \frac{2 r^2 v^2 - b^2 (r^2 + v^2)}{r^2 + v^2} \\ \cos\gamma &= \frac{2 r^3 v}{t (r^2 + v^2)}, \end{aligned}\right\} \quad \text{VIII a.}$$

sodass die Gleichung der Tangentialebene die Form annimmt:

$$X\{2r^2v^2 - a^2(r^2+v^2)\}\cos u + Y\{2r^2v^2 - b^2(r^2+v^2)\}\sin u$$
$$+ Z\cdot 2r^3v = 2r^3v^2. \tag{5}$$

Da wir die Krümmungslinien als Parameterkurven eingeführt haben, so muss die Fundamentalgrösse 2. Ordnung:

$$D' = S\left(\cos\alpha\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right) = 0 \tag{6}$$

sein und es gelten dann die Formeln von Rodrigues, von denen wir nur die beiden

$$\frac{\partial\cos\gamma}{\partial u} = -\frac{D}{E}\frac{\partial z}{\partial u} \qquad \frac{\partial\cos\gamma}{d v} = -\frac{D''}{G}\frac{\partial z}{\partial v}$$

herausgreifen, weil sie sich zur Berechnung der beiden Fundamentalgrössen 2. Ordnung:

$$D = S\left(\cos\alpha\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right) \qquad D'' = S\left(\cos\alpha\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)$$

am besten eignen. Aus (VIII a) folgt nämlich durch Differentiation:

$$\frac{\partial\cos\gamma}{\partial u} = -\frac{2c^2rv}{t^3(r^2+v^2)^2}\sin u\cos u\,\{a^2b^2(r^2+v^2) - 2t^2v^2\}$$

$$\frac{\partial\cos\gamma}{\partial v} = \frac{2r^3}{t}\cdot\frac{r^2-v^2}{(r^2+v^2)^2}$$

Führt man diese Werte in den Formeln von Rodrigues ein, so wird

$$\left.\begin{aligned} D &= -\frac{2v^2}{tr(r^2+v^2)^2}\{2t^2v^2 - a^2b^2(r^2+v^2)\} \\ D'' &= -\frac{4r^5}{t(r^2+v^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Wir stellen hier die gefundenen fundamentalen Grössen zusammen:

$$\left.\begin{aligned}
&x=\frac{2\,r\,v^2}{r^2+v^2}\cos u \qquad y=\frac{2\,r\,v^2}{r^2+v^2}\sin u \qquad z=\frac{2\,r^2\,v}{r^2+v^2}\\
&E=\frac{4\,v^4\,t^2}{r^2(r^2+v^2)^2} \qquad D=-\frac{2\,v^2}{r\,t(r^2+v^2)^2}\left\{2t^2v^2-a^2b^2(r^2+v^2)\right\}\\
&F=0 \qquad D'=0\\
&G=\frac{4\,r^4}{(r^2+v^2)^2} \qquad D''=-\frac{4\,r^5}{t\,(r^2+v^2)^2}\\
&\triangle=\frac{4\,r\,v^2\,t}{(r^2+v^2)^2}\\
&\triangle'=\sqrt{D\,D''-D'^2}=\frac{2\,r^2\,v}{t\,(r^2+v^2)^2}\sqrt{2\{2\,t^2v^2-a^2\,b^2\,(r^2+v^2)\}}\\
&d\,s^2=E\,d\,u^2+2\,F\,d\,u\,d\,v+G\,d\,v^2=\\
&=\frac{4}{(r^2+v^2)^2}\left(\frac{v^4\,t^2}{r^2}\,d\,u^2+r^4\,d\,v^2\right)\\
&r^2=a^2\cos^2 u+b^2\sin^2 u\\
&t^2=a^4\cos^2 u+b^4\sin^2 u
\end{aligned}\right\}\text{XVII.}$$

Für die Hauptkrümmungsradien bestehen, weil $F=0$ und $D'=0$, die Formeln

$$\varrho_1=\frac{E}{D} \qquad \varrho_2=\frac{G}{D''}.$$

Setzt man für E, D, G, D'' ihre Werte nach (XVII), so wird

$$\left.\begin{aligned}
&\varrho_1=-\frac{2\,t^3\,v^2}{r\left\{2\,t^2\,v^2-a^2\,b^2\,(r^2+v^2)\right\}}\\
&\varrho_2=-\frac{t}{r}=-1,
\end{aligned}\right\}\text{XVIII.}$$

wie aus (XI) folgt, d. h. der eine Hauptkrümmungsradius (ϱ_2) ist immer gleich dem Radius der erzeugenden Kugel.[1])

Für die höchsten und tiefsten Punkte der Fläche ($x=\pm a$, $y=0$, $z=\pm a$) ist $u=0$ und $v=\pm a$, somit

[1]) Das Resultat gilt allgemein für Enveloppenflächen von Kugeln. Vergl. A. Enneper: Bemerkungen über die Enveloppe einer Kugelfläche. Nachr. d. kgl. Ges. d. Wissenschaften und d. G. A. Univ. Göttingen 1873, p. 219.

$$\varrho_1 = -\frac{a^3}{c^2} \qquad \varrho_2 = -a.$$

Für die Sattelpunkte ($x = 0$, $y = \pm b$, $z = \pm b$) wird $u = 90^0$, $v = \pm b$, und

$$\varrho_1 = \frac{b^3}{c^2} \qquad \varrho_2 = -b.$$

Das negative Vorzeichen gibt an, dass die Normale nach der Seite der Fläche hin gerichtet ist, auf der der Mittelpunkt liegt.

Das Krümmungsmass

$$K = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{D D'' - D'^2}{E G - F^2} \qquad \text{wird}$$

$$K = \frac{r^2}{2\, t^4\, v^2} \left\{2\, t^2\, v^2 - a^2\, b^2\, (r^2 + v^2)\right\} \qquad \text{XIX.}$$

und die mittlere Krümmung

$$H = \frac{E D'' + G D - 2 F D'}{\triangle^2} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$$

berechnet sich zu

$$H = -\frac{r}{2\, t^3 v^2} \left\{4\, t^2\, v^2 - a^2\, b^2\, (r^2 + v^2)\right\}. \qquad \text{XX.}$$

§ 9. Die Kurve der parabolischen Punkte.

Die zyklische Fläche ist in irgend einem Punkte elliptisch oder hyperbolisch gekrümmt, je nachdem $K \gtrless 0$, d. h. (nach XIX) je nachdem

$$2 t^2 v^2 \gtrless a^2 b^2 (r^2 + v^2)$$

$$v \gtrless \frac{a b r}{\sqrt{2 t^2 - a^2 b^2}}. \qquad (1)$$

Sie ist in den Punkten parabolisch gekrümmt, in denen $k = 0$, also

$$v = \frac{a b r}{\sqrt{2 t^2 - a^2 b^2}}. \qquad (2)$$

Setzt man diesen Wert in der Parameterdarstellung (XVI) der Fläche ein, so erhält man die Kurve der parabolischen Punkte in der Parameterdarstellung:

$$x = \frac{a^2 b_2 r}{t^2} \cos u$$

$$y = \frac{a^2 b^2 r}{t^2} \sin u \qquad \text{XXI.}$$

$$z = \frac{abr}{t} \sqrt{2t^2 - a^2 b^2}.$$

Diese Kurve trennt die elliptischen von den hyperbolischen Punkten der Fläche. Da v für den Nullpunkt gleich null ist und für die Punkte eines Meridians bis zum Äquator beständig zunimmt, so folgt aus (1): Die Kurve der parabolischen Punkte teilt die Fläche derart, dass das den Nullpunkt enthaltende Flächenstück die hyperbolischen, das ihn ausschliessende Stück die elliptischen Punkte enthält.

Für den Schnittpunkt mit der xy-Ebene ($z = 0$) ergibt sich aus XXI:

$$t^2 = \frac{a^2 b^2}{2}$$

und hieraus:

$$\sin u = \pm \frac{a}{c} \sqrt{\frac{2a^2 - b^2}{2(a^2 + b^2)}} \qquad \cos u = \pm \frac{b}{c} \sqrt{\frac{a^2 - 2b^2}{2(a^2 + b^2)}}$$

$$r = \frac{ab\sqrt{3}}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}.$$

Die Koordinaten der 4 Spurpunkte der Kurve der parabolischen Punkte sind also:

$$x = \pm \frac{ab^2}{c(a^2 + b^2)} \sqrt{3(a^2 - 2b^2)}$$

$$y = \pm \frac{a^2 b}{c(a^2 + b^2)} \sqrt{3(2a^2 - b^2)}. \qquad (3)$$

Sie sind nur reell, wenn $a > b\sqrt{2}$. Diese Durchstosspunkte haben für den Äquator die Bedeutung von Wendepunkten, und ihre Koordinaten stimmen mit den in (V) gefundenen überein. Ist $a = b\sqrt{2}$, so wird $x = 0$, $y = \pm 2b$, d. h. die Kurve kreuzt die y-Achse.

Die Projektion der Kurve der parabolischen Punkte auf die xy-Ebene ergibt sich durch Elimination von u aus den beiden ersten Gleichungen XXI, die auch geschrieben werden können:

$$x = a^2 b^2 \frac{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 u}}{a^4 + b^4 \operatorname{tg}^2 u}$$

$$y = a^2 b^2 \frac{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 u}}{a^4 + b^4 \operatorname{tg}^2 u} \cdot \operatorname{tg} u.$$

In entsprechender Weise ergeben sich die Projektionen auf die beiden andern Koordinatenebenen. Man erhält so:

Projektion auf die xy-Ebene:

$$(a^4 x^2 + b^4 y^2)^2 = a^4 b^4 (a^2 x^2 + b^2 y^2). \qquad \text{XXII.}$$

Projektion auf die xz-Ebene:

$$\{(a^4 - b^4) x^2 - b^4 z^2\}^2 = a^4 b^4 (3 c^2 x^2 - b^2 z^2). \qquad \text{XXIII.}$$

Projektion auf die yz-Ebene:

$$y^2 \{b^2 y^2 (a^2 - 2 b^2) + a^2 b^2 z^2\} \{(a^4 - b^4) y^2 + a^4 z^2\}^4$$
$$= a^6 b^4 (a^2 z^2 + 3 c^2 y^2)^2 (2 a^2 - b^2). \qquad \text{XXIV.}$$

Ist insbesondere $a = b\sqrt{2}$, so werden diese Gleichungen:

Projektion auf die xy-Ebene:

$$(4 x^2 + y^2)^2 = 4 b^2 (2 x^2 + y^2). \qquad \text{XXIIa.}$$

Projektion auf die xz-Ebene:

$$(3 x^2 - z^2)(3 x^2 - z^2 - 4 b^2) = 0. \qquad \text{XXIIIa.}$$

Projektion auf die yz-Ebene:

$$b^2 yz (3 y^2 + 4 z^2)^2 = 2\sqrt{3} (2 z^2 + 3 y^2). \qquad \text{XXIVa.}$$

Durch Nachprüfung der Ableitung zeigt sich, dass der zweite Faktor der Gl. XXIIIa unmöglich 0 sein kann, so dass die Projektion der Kurve der parabolischen Punkte auf die xz-Ebene die Gleichung

$$z = x\sqrt{3} \qquad \text{XXIIIb.}$$

besitzt. Die Kurve der parabolischen Punkte wird also für diese Fläche durch eine gegen die xy-Ebene unter 60° geneigte, durch die y-Achse gehende Ebene ausgeschnitten.

Die Kurve der parabolischen Punkte kann auch als Schnitt der Hessiana mit der zyklischen Fläche aufgefasst werden. Die Gleichung der Hessiana oder Kernfläche:

$$H = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

wo F das homogen gemachte Gleichungspolynom der zyklischen Fläche bedeutet, wird

$$\begin{vmatrix} R^2 - 2a^2 + 2x^2 & 2xy & 2xz & 2a^2x \\ 2xy & R^2 - 2b^2 + 2y^2 & 2yz & 2b^2y \\ 2xz & 2yz & R^2 + 2z^2 & 0 \\ 4a^2x & 4b^2y & 0 & -(a^2x^2 + b^2y^2) \end{vmatrix} = 0$$

oder ausgerechnet und nach Potenzen geordnet:

$$R^6(a^2x^2 + b^2y^2) + 2R^2[c^2R^2(a^2x^2 - b^2y^2) + 2c^4x^2y^2 +$$
$$+ 2z^2(a^4x^2 + b^4y^2)] - 4a^2b^2(R^2 + 2z^2)(a^2x^2 + b^2y^2) = 0, \quad \text{XXV.}$$

wo $$R^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Diese Gleichung der Hessiana ist, wie die Theorie verlangt, vom 8. Grade. Die Kernfläche liegt ganz im Endlichen. Der Nullpunkt ist ein isolierter vierfacher Punkt der Fläche. Die Gleichungen der Schnittkurven der Kernfläche mit den Koordinatenebenen sind:

xy-Ebene: $$(x^2 + y^2)^2(a^2x^2 + b^2y^2) + 2c^2(a^2x^4 - b^2y^4 + 3c^2x^2y^2)$$
$$- 4a^2b^2(a^2x^2 + b^2y^2) = 0.$$

xz-Ebene: $$(x^2 + z^2)^3 + 2(x^2 + z^2)\{c^2(x^2 + z^2) + 2a^2z^2\}$$
$$- 4a^2b^2(x^2 + 3z^2) = 0.$$

yz-Ebene: $$(y^2 + z^2)^3 - 2(y^2 + z^2)\{c^2(y^2 + z^2) - 2b^2z^2\}$$
$$- 4a^2b^2(y^2 + 3z^2) = 0.$$

Sie stellen einfache, geschlossene Kurven dar. Zu der Fläche gehört, wie sich durch Nullsetzen der von diesen Gleichungen abgespaltenen Faktoren ergibt, auch die z-Achse.

Der Schnitt dieser Hessiana mit der zyklischen Fläche, die Kurve der parabolischen Punkte, ist von der Ordnung 32. Ihre Projektion auf die xy-Ebene wird durch Elimination von z aus (I) und (XXV) erhalten. Das Resultat der Elimination ist die bereits gefundene Gleichung XXII:

$$(a^4x^2 + b^4y^2)^2 = a^4b^4(a^2x^2 + b^2y^2).$$

Der Nullpunkt ist ein isolierter Doppelpunkt der Kurve. Für die Schnittpunkte mit dem Strahl $y = mx$ findet man die Koordinaten:

$$x = \pm \frac{a^2 b^2 \sqrt{a^2 + b^2 m^2}}{a^4 + b^4 m^2} \qquad y = \pm \frac{a^2 b^2 m \sqrt{a^2 + b^2 m^2}}{a^4 + b^4 m^2},$$

wenn man vom Nullpunkt selber absieht. Man sieht hieraus, dass jeder durch den Nullpunkt gehende Halbstrahl die Kurve ausser dem Nullpunkt nur noch in einem Punkt schneidet, dessen Koordinaten stets reell und endlich sind; die Kurve besteht daher aus einem geschlossenen Blatt um 0.

Die Abschnitte der Kurve auf der x-Achse (α) und der y-Achse (β) berechnen sich aus den letzten Formeln für $m = o$, $m = \infty$. Bestimmt man ferner aus der Flächengleichung I das dazu gehörige z, so bekommt man:

$$\text{x-Achse: } x = \alpha = \frac{b^2}{a} \qquad y = 0 \qquad z = \pm \frac{b}{a} \sqrt{2a^2 - b^2}$$

$$\text{y-Achse: } x = 0 \qquad y = \beta = \frac{a^2}{b} \qquad z = \pm \frac{a}{b} \sqrt{2b^2 - a^2}.$$

Die Ausdrücke α und β lassen sich sehr leicht konstruieren. Wir untersuchen die Projektion der Kurve für folgende Spezialfälle:

1) $a < b\sqrt{2}$. Die Abschnitte α und β auf den Koordinaten-Achsen werden

$$a > \alpha > \frac{a}{2} \qquad \beta < 2b.$$

Für den Grenzfall $a = b$ wird $\alpha = a$, $\beta = a$ und die Projektion der Kurve der parabolischen Punkte wird ein Kreis vom Radius a (Leitkreis).

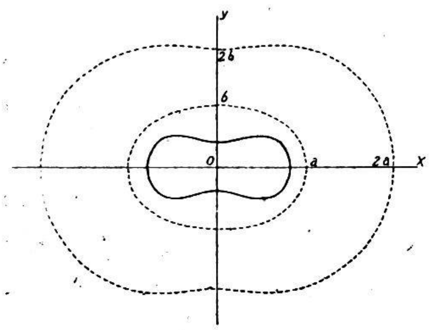

Fig. 6.

Sehen wir von diesem Grenzfall ab, so erhalten wir eine ovale Kurve mit zwei Einbuchtungen in der y-Achse. Die ganze Kurve liegt innerhalb der Schnittkurve der Fläche mit der xy-Ebene (Aequator) und ist symmetrisch zu den Koordinatenachsen (Fig. 6).

2) $a = b\sqrt{2}$. Die Achsenabschnitte werden

$$\alpha = \pm \frac{a}{2} \qquad \beta = \pm 2b.$$

Die Kurve der parabolischen Punkte geht also, wie bereits S. 27 konstatiert wurde, durch die Punkte der y-Achse, in welchen die zyklische Fläche die y-Achse schneidet (Fig. 7).

3) $a > b\sqrt{2}$. In diesem Falle ist

$$\alpha < \frac{a}{2} \qquad \beta > 2b.$$

Alle Schnittpunkte mit der y-Achse liegen ausserhalb der Fläche und können daher nicht realisiert werden. Die Kurve durchschneidet den Äquator in 4 reellen Punkten (Fig. 8).

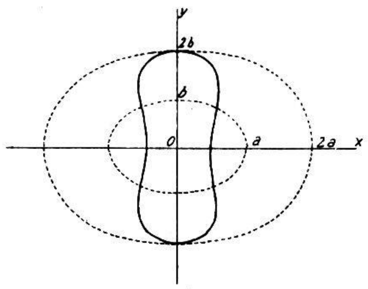

Fig. 7.

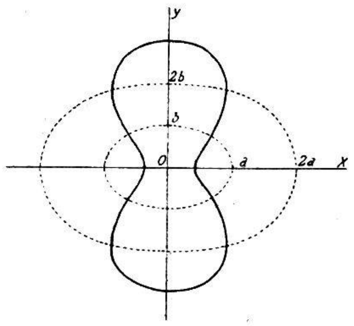

Fig. 8.

Hieraus und aus der Diskussion der Spurpunkte (S. 27) ergibt sich in den drei Fällen für die Kurve der parabolischen Punkte selber folgender Verlauf:

1.) $a < b\sqrt{2}$. Die Raumkurve besteht aus zwei getrennten, geschlossenen Zügen, die zur xy-Ebene symmetrisch liegen.

2) $a = b\sqrt{2}$. Die Raumkurve zerfällt in zwei ebene Kurven, die sich in der y-Achse kreuzen, und deren Ebenen gegen die Aequatorebene unter 60^0 geneigt sind.

3) $a > b\sqrt{2}$. Die beiden Züge der Raumkurve werden durch die yz-Ebene getrennt und liegen zu dieser symmetrisch. Sie durchschneiden den Aequator je in zwei Punkten.

Anschliessend an diese Untersuchungen sollen noch die K r e i s p u n k t e betrachtet werden. Soll ein Punkt der Fläche ein Kreispunkt oder Nabelpunkt sein, so muss die Bedingung

$$E : F : G = D : D' : D''$$

oder weil $F = 0$, $D' = 0$

$$E : G = D : D''$$

erfüllt sein. Durch Einsetzen der Werte kommt man dadurch auf die Bedingung

$$r^2 + v^2 = 0,$$

die, weil r nie 0 wird, für reelle Flächenpunkte nie erfüllt wird; d. h. die zyklische Fläche hat keine reellen Kreispunkte. Lässt man auch imaginäre Werte zu, so entsprechen der eben aufgestellten Bedingung (nach XVI) Punkte der Fläche, deren Koordinaten unendlich gross sind. Diese Punkte bilden in ihrer Gesamtheit nach S. 31 den unendlich fernen Kugelkreis, welcher somit eine Kurve sphärischer Krümmung (Nabellinie) der zyklischen Fläche ist.

II. Kapitel.

Die Zentrafläche.

§ 10. Die Gleichungen der Zentrafläche in Parameterform und in rechtwinkligen Koordinaten.

Aus dem früher gefundenen Resultat (XVIII), dass der eine Hauptkrümmungsradius in jedem Flächenpunkt der Grösse und Richtung nach mit dem Radius der durch ihn gehenden erzeugenden Kugel übereinstimmt, folgt, dass der Ort der Endpunkte dieser ersten Hauptkrümmungsradien mit dem Ort der Mittelpunkte der umhüllten Kugeln zusammenfällt, d. h. der den Meridiankreisen entsprechende erste Mantel der Zentrafläche wird durch die Leitellipse dargestellt.[1])

Sind α, β, γ die Richtungswinkel der Flächennormalen, so wird der zweite Mantel der Zentrafläche durch die Gleichungen dargestellt:

$$x = x_1 + \varrho_1 \cos \alpha, \quad y = y_1 + \varrho_1 \cos \beta, \quad z = z_1 + \varrho_1 \cos \gamma,$$

wo x_1, y_1, z_1 die Koordinaten eines Punktes der zyklischen Fläche und x, y, z die laufenden Koordinaten der Zentrafläche sind

[1]) Die Verallgemeinerung dieses Satzes heisst: Von den beiden Mänteln der Zentrafläche einer Enveloppenfläche, die eine einfach unendliche Schar von Kugeln umhüllt, reduziert sich der den Kreisen entsprechende auf die Kurve der Mittelpunkte der umhüllten Kugeln. — Monge: Applications. 5e éd. 1850 p. 376.

und ϱ_1 den einen Hauptkrümmungsradius darstellt. Setzt man hierin die Werte aus den Formeln XVI, VIII a und XVIII ein, so ergibt sich

$$x = \frac{2\,a^2\,v^2 \cos u\,(t^2 - b^2\,r^2)}{r\,[2\,t^2\,v^2 - a^2\,b^2\,(r^2 + v^2)]}.$$

Dabei ist $\qquad t^2 - b^2\,r^2 = a^2\,c^2 \cos^2 u.$

In gleicher Weise ergeben sich die Werte für y und z. Wir erhalten also folgende Parameterdarstellung für den zweiten Mantel der Zentrafläche:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2\,a^4\,c^2\,v^2 \cos^3 u}{r\,[2\,t^2\,v^2 - a^2\,b^2\,(r^2 + v^2)]} \\ y &= -\frac{2\,b^4\,c^2\,v^2 \sin^3 u}{r\,[2\,t^2\,v^2 - a^2\,b^2\,(r^2 + v^2)]} \\ z &= -\frac{2\,a^2\,b^2\,r^2\,v}{2\,t^2\,v^2 - a^2\,b^2\,(r^2 + v^2)}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{XXVI.}$$

Um aus ihnen die Gleichungen für rechtwinklige Koordinaten zu erhalten, sind u und v zu eliminieren. Durch Division der ersten und zweiten Formel ergibt sich zunächst:

$$\operatorname{tg} u = -\sqrt[3]{\frac{a^4\,y}{b^4\,x}}. \qquad (1)$$

Ist $u = \text{const}$, so ist auch $\frac{y}{x} = \text{const}$; den Parameterlinien $u = \text{const}$, d. h. den Meridiankreisen, entsprechen somit die Schnittkurven, die Ebenen durch die z-Achse aus dem Kegel der Normalen längs des Kreises ausschneiden. Wir stossen damit schon auf das erste wichtige Resultat: Alle durch die z-Achse gelegten Ebenen schneiden den zweiten Mantel der Zentrafläche in Kegelschnitten, die durch den Nullpunkt gehen, und:

Die Endpunkte der zweiten Hauptkrümmungsradien längs der Meridiankreise der zyklischen Fläche liegen auf einem Kegelschnitt, dessen Ebene durch die z-Achse geht. Ueber die Art der Kegelschnitte können wir aber vorläufig noch nichts aussagen.

Aus der ersten und dritten Gleichung XXVI folgt durch Division:

$$\frac{x}{z} = -\frac{a^2 c^2}{b^2} \cdot \frac{\cos^3 u}{r^3} \cdot v$$

$$\frac{b^4}{a^4 c^4} \cdot \frac{x^2}{z^2} = \frac{1}{(a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 u)^3} \cdot v^2.$$

Setzen wir für tg u den Wert aus (1) ein, so ergibt sich nach einiger Umrechnung folgende erste Beziehung für v:

$$\sqrt[3]{b^2 x^2} + \sqrt[3]{a^2 y^2} = \sqrt[3]{\frac{c^4 z^2}{a^2 b^2}\, v^2}. \tag{2}$$

Eine weitere Gleichung für v können wir aus der zweiten Gleichung XXVI finden, wenn wir in dieser den Wert (1) für tg u substituieren. Durch Auflösung nach v^2 folgt zunächst

$$v^2 = \frac{a^2 b^2 r^3 y}{(2 t^2 - a^2 b^2) r y + 2 b^4 c^2 \sin^3 u}$$

und hieraus mit Benützung von (1):

$$v^2 = a^2 b^2 y \frac{\sqrt{\left(1 + \sqrt[3]{\frac{a^2 y^2}{b^2 x^2}}\right)^3}}{\left[2a^2 - b^2 + (2b^2 - a^2)\sqrt[3]{\frac{a^2 y^2}{b^2 x^2}}\right] y \sqrt{1 + \sqrt[3]{\frac{a^2 y^2}{b^2 x^2}}} - 2ac^2 \frac{y}{x}} \tag{3}$$

Diese zweite Gleichung für v kombinieren wir nun mit (2). Es wird, wenn zugleich Zähler und Nenner der rechten Seite mit $\sqrt[3]{bx}$ erweitert und die ganze Gleichung mit

$$\sqrt{\sqrt[3]{b^2 x^2} + \sqrt[3]{a^2 y^2}}$$

dividiert wird:

$$\sqrt{\sqrt[3]{b^2 x^2} + \sqrt[3]{a^2 y^2}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{c^4 z^2}{\left[(2a^2 - b^2)\sqrt[3]{b^2 x^2} + (2b^2 - a^2)\sqrt[3]{a^2 y^2}\right]\sqrt{\sqrt[3]{b^2 x^2} + \sqrt[3]{a^2 y^2}} - 2abc^2}}$$

Durch längere Umformung erhält man hieraus die gesuchte Gleichung des zweiten Mantels der Zentrafläche:

$$\left[c^4(x^2+y^2+z^2)-\left(\sqrt[3]{a^4x^2}+\sqrt[3]{b^4y^2}\right)^3\right]^2$$
$$-4a^2b^2c^4\left(\sqrt[3]{b^2x^2}+\sqrt[3]{a^2y^2}\right)^3=0. \qquad \text{XXVII.}$$

Sie ist für den Nullpunkt erfüllt. Dieser ist also ein Punkt der Fläche.

§ 11. **Schnitte der Zentrafläche mit Ebenen durch die z-Achse.**

Der Schnitt der xz-Ebene mit der Zentrafläche hat die Gleichung

$$(a^2+c^2)b^2x^2-c^4z^2\pm 2ab^2c^2x=0.$$

Es sind dies die Scheitelgleichungen zweier kongruenter Kegelschnitte, die durch die Transformation

$$x=x'\mp\frac{ac^2}{a^2+c^2}$$

auf die Mittelpunktsgleichung

$$b^2(a^2+c^2)x^2-c^4z^2=\frac{a^2bc^4}{a^2+c^2}$$

gebracht werden. Der Schnitt mit der xz-Ebene besteht also aus zwei kongruenten, durch den Nullpunkt gehenden Hyperbeln, deren imaginäre Achsen der z-Achse parallel sind, deren Mittelpunkte im Abstand

$$\pm\frac{ac^2}{a^2+c^2}$$

vom Nullpunkt liegen und deren Halbachsen

$$A_1=\frac{ac^2}{a^2+c^2}<\frac{a}{2} \qquad B_1=\frac{ab}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

sind. Die lineare Exzentrizität ist

$$C_1=\frac{a^3}{a^2+c^2}$$

und der Abstand der Brennpunkte vom Nullpunkt ist:

$$A_1+C_1=a \qquad A_1-C_1=-\frac{ab^2}{a^2+c^2}.$$

Die eine Hyperbel hat also den rechts liegenden, die andere den links liegenden Scheitel der grossen Achse der Leitellipse zum einen Brennpunkt. Die Richtungskoeffizienten der Asymptoten sind

$$\pm \frac{B_1}{A_1} = \pm \frac{b}{c^2} \sqrt{a^2 + c^2}.$$

Die Hyperbeln degenerieren nur für den Fall, dass die Leitellipse ein Kreis ist ($c = 0$) in die doppelt gelegte z-Achse und für den Fall, dass sich die Ellipse auf ihre grosse Achse reduziert ($b = 0$), in die doppelt gelegte x-Achse.

Jede dieser beiden Hyperbeln ist der Ort der Endpunkte der zweiten Hauptkrümmungsradien längs eines der beiden in der xz-Ebene liegenden Meridiankreise, und zwar gehört zum rechts liegenden Kreis die rechts liegende Hyperbel. Die Flächen-Normalen längs eines solchen Kreises sind jedoch nicht Tangenten der zugehörigen Hyperbel, weil die aufeinanderfolgenden zweiten Krümmungshalbmesser längs einer Krümmungslinie der ersten Schar sich nicht im zweiten Krümmungsmittelpunkt schneiden. Für die hier auftretende Hyperbel ist das sehr deutlich ersichtlich. Alle Normalen längs des Kreises schneiden sich nämlich nach § 5 im Scheitel der grossen Achse der Leitellipse. Dieser ist also der konstante Krümmungsmittelpunkt aller ersten Hauptkrümmungsradien längs des Kreises. Er ist aber auch Brennpunkt der Hyperbel, und weil alle Flächennormalen durch ihn gehen, so können sie nicht Tangenten der Hyperbel sein. Die Parallelen zu den Asymptoten durch den Brennpunkt der Hyperbel treffen den Kreis in parabolischen Punkten. Solcher Schnittpunkte sind, wenn wir nur einen Kreis der xz-Ebene in Betracht ziehen, vier möglich, aber zwei davon sind ungültig, weil nach § 9 die Abszisse x eines parabolischen Punktes der xz-Ebene die Grösse a nicht überschreiten darf. Allfällige Schnittpunkte der Parallelen zur Asymptote mit dem zweiten Kreis sind deshalb nicht zu zählen, weil die Normalen in ihnen durch den andern Brennpunkt der Hyperbel gehen. — Dadurch kommen wir im Einklang mit den früheren Untersuchungen zum Resultat, dass in jedem Quadranten der xz-Ebene nur ein parabolischer Punkt liegt.

Für den Schnitt der yz-Ebene mit der Zentrafläche lautet die Gleichung:

$$z^2 = \pm \frac{2a^2 b}{c^2} y + \frac{b^2 - c^2}{c^4} a^2 y^2.$$

Sie stellt zwei kongruente Kegelschnitte dar, und zwar sind es

Ellipsen, wenn $a > b\sqrt{2}$

Hyperbeln „ $a < b\sqrt{2}$

Parabeln „ $a = b\sqrt{2}$.

Die y-Achse ist Hauptachse der Kegelschnitte.

Im ersten Falle sind alle Krümmungsradien endlich, die Fläche weist längs der Meridiankreise in der yz-Ebene keine parabolischen Punkte auf. Im zweiten Falle gilt dasselbe wie für den Schnitt mit der xz-Ebene, und im dritten Falle liegt für beide Parabeln der unendlich ferne Punkt in der y-Achse. Seine Verbindungsgerade mit dem Kreismittelpunkt trifft die Fläche in den Punkten $x = 0$, $y = \pm 2b$, $z = 0$, welche die einzigen parabolischen Punkte der yz-Ebene sind. Alle drei Fälle decken sich vollständig mit den Resultaten in § 9.

Eine beliebige Ebene durch die z-Achse von der Gleichung $y = mx$ schneidet die Zentrafläche in einer Kurve, deren Projektion auf die xz-Ebene die Gleichung

$$c^4\left[x^2(1 + m^2) + z^2\right] - x^2\left(\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{b^4 m^2}\right)^3$$
$$= \pm 2abc^2 x\sqrt{\left(\sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{a^2 m^2}\right)^3}$$

hat. Sie ist von der Form

$$M x^2 + N z^2 \pm P x = 0$$

und stellt also zwei kongruente, durch den Nullpunkt gehende Kegelschnitte dar, deren Hauptachsen mit der Spur der Schnittebene auf der xy-Ebene zusammenfallen. Auch diese Eigenschaft haben wir schon früher (S. 33) kennen gelernt.

Die Kegelschnitte können Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln sein, wenn $a > b\sqrt{2}$. Sie sind, ausgenommen der Schnitt mit der yz-Ebene, nur Hyperbeln, wenn $a = b\sqrt{2}$, und überhaupt nur Hyperbeln, wenn $a < b\sqrt{2}$.

§ 12. Die Schnittkurve der Zentrafläche mit der xy-Ebene.

Die Schnittkurve mit der xy-Ebene ergibt sich aus (XXVII) für $z = 0$:

$$\left[c^4(x^2+y^2) - \left(\sqrt[3]{a^4x^2} + \sqrt[3]{b^4y^2}\right)^3\right]^2$$

$$= 4a^2b^2c^4\left(\sqrt[3]{b^2x^2} + \sqrt[3]{a^2y^2}\right)^3. \qquad \text{XXVIII.}$$

Will man die Gleichung in rationaler Form haben, so geht man wie folgt vor: Die linke Seite lässt sich, wie sich leicht nachrechnen lässt und wie aus S. 34 gefolgert wird, identisch schreiben:

$$\left[(a^2+c^2)\sqrt[3]{b^2x^2} + (b^2-c^2)\sqrt[3]{a^2y^2}\right]^2\left[\sqrt[3]{b^2x^2} + \sqrt[3]{a^2y^2}\right]^4,$$

sodass die Gleichung der Kurve in

$$\left[(a^2+c^2)\sqrt[3]{b^2x^2} + (b^2-c^2)\sqrt[3]{a^2y^2}\right]^2\left[\sqrt[3]{b^2x^2} + \sqrt[3]{a^2y^2}\right] = 4a^2b^2c^4 \qquad (1)$$

und

$$\sqrt[3]{b^2x^2} + \sqrt[3]{a^2y^2} = 0$$

oder

$$b^2x^2 + a^2y^2 = 0,$$

zerfällt.

Der der letzten Gleichung entsprechende Kurvenzweig reduziert sich auf den Nullpunkt.

Rechnet man die linke Seite von (1) aus und fasst in passender Weise zusammen, so wird

$$3\sqrt[3]{a^2b^2x^2y^2}\left[b^2(a^2+c^2)\sqrt[3]{b^2x^2} + a^2(b^2-c^2)\sqrt[3]{a^2y^2}\right]$$

$$= 4a^2b^2c^4 - b^2(a^2+c^2)x^2 - a^2(b^2-c^2)y^2.$$

Diese Gleichung erhebt man in die dritte Potenz:

$$27a^2b^2x^2y^2\{b^6(a^2+c^2)^3b^2x^2 + a^6(b^2-c^2)^3a^2y^2$$

$$+ 3a^2b^2(a^2+c^2)(b^2-c^2)\sqrt[3]{a^2b^2x^2y^2}\left[b^2(a^2+c^2)\sqrt[3]{b^2x^2}\right.$$

$$\left.+ a^2(b^2-c^2)\sqrt[3]{a^2y^2}\right]\} = \{4a^2b^2c^4 - b^2(a^2+c^2)x^2 - a^2(b^2-c^2)y^2\}^3$$

und ersetzt den Ausdruck in der eckigen Klammer durch den Wert in der vorangehenden Gleichung. Dann wird die gesuchte rationale Gleichung der Schnittkurve mit der xy-Ebene:

$$27a^2b^2x^2y^2\{b^4(a^2+c^2)^2[b^4(a^2+c^2) - a^2(b^2-c^2)]x^2$$

$$+ a^4(b^2-c^2)^2[a^4(b^2-c^2) - b^2(a^2+c^2)]y^2$$

$$+ 4 a^4 b^4 c^4 (a^2 + c^2)(b^2 - c^2)\}$$

$$= \{4 a^2 b^2 c^4 - b^2 (a^2 + c^2) x^2 - a^2 (b^2 - c^2) y^2\}^3. \quad \text{XXVIIIa.}$$

Die Kurve ist also vom 6. Grade. Ihre Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sind, abgesehen vom Nullpunkt:

x-Achse: $x = \pm \frac{2 a c^2}{a^2 + c^2}$, je dreifach

y-Achse: $y = \pm \frac{2 b c^2}{b^2 - c^2}$, » »

Während die Abschnitte auf der x-Achse immer endlich und kleiner als a sind, werden die Abschnitte auf der y-Achse für den Fall $b = c$ ($a = b\sqrt{2}$) unendlich gross.

Zur weitern Untersuchung dieser Schnittpunkte ist es notwendig, den einen oder andern zum Nullpunkt zu machen, also die Transformation

$$x = x' + \frac{2 a c^2}{a^2 + c^2}$$

vorzunehmen. Dadurch verschwindet das konstante Glied auf der rechten Seite und die Kurvengleichung erhält die Form:

$$\left(x + \frac{2 a c^2}{a^2 + c^2}\right)^2 (A x^2 + B x + C y^2 + D) y^2 = (E x^2 + F x + G y^2)^3$$

Der Schnittpunkt ist also in beiden Fällen ein Doppelpunkt und die Tangenten in ihm werden:

$$\left(\frac{2 a c^2}{a^2 + c^2}\right)^2 D y^2 = 0 \qquad \text{also:}$$

$$y = 0 \text{ doppelt.}$$

Die zwei Schnittpunkte mit der x-Achse sind also Spitzen, mit der x-Achse als gemeinschaftlicher Spitzentangente.

Ganz in gleicher Weise lässt sich zeigen, dass die beiden Schnittpunkte der Kurve mit der y-Achse Spitzen sind mit der y-Achse als gemeinschaftlicher Spitzentangente, und zwar gilt dieses Resultat in allen Fällen, wenn $b \gtreqless c$ bezw. $a \lesseqgtr b\sqrt{2}$ ist.

Um die Richtungen der Asymptoten zu finden, geht man besser von Gl. XXVIII aus, indem man in ihr die Glieder höchsten Grades:

$$c^4 (x^2 + y^2) - \left(\sqrt[3]{a^4 x^2} + \sqrt[3]{b^4 y^2}\right)^3 = 0 \qquad (2)$$

setzt. Führt man zur Abkürzung

$$\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}} = \xi \tag{3}$$

ein, wo $\frac{y}{x} = \mu$ den Richtungskoeffizienten der Asymptoten bedeutet, so verwandelt sich (2) in

$$\xi^3 + \frac{3\,b^2}{a\,(b^2 - c^2)}\sqrt[3]{a\,b^2}\,\xi^2 + \frac{3\,b}{b^2 - c^2}\sqrt[3]{a^2\,b}\,\xi + \frac{b^2\,(a^2 + c^2)}{a^2\,(b^2 - c^2)} = 0.$$

Diese kubische Gleichung bringen wir vermittelst der Substitution

$$\xi = \eta - \frac{b^2}{a(b^2 - c^2)}\sqrt[3]{a\,b^2}$$

auf die reduzierte Form:

$$\eta^3 - \frac{3\,b\,c^4}{a^2(b^2 - c^2)^2}\sqrt[3]{a^2 b}\,\eta + \frac{2\,b^2\,c^6}{a^2(b^2 - c^2)^3} = 0.$$

Die Diskriminante dieser kubischen Gleichung wird null und die Wurzeln sind

$$\eta_1 = -\frac{2\,c^2}{a\,(b^2 - c^2)}\sqrt[3]{a\,b^2}$$

$$\eta_2 = \eta_3 = \frac{c^2}{a(b^2 - c^2)}\sqrt[3]{a\,b^2},$$

sodass

$$\xi_1 = \frac{2\,a^2 - b^2}{a^2 - 2\,b^2}\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}$$

$$\xi_2 = \xi_3 = -\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}.$$

Hieraus ergeben sich die Richtungskoeffizienten der Asymptoten:

$$\mu_1 = \pm\frac{b}{a}\sqrt{\left(\frac{2\,a^2 - b^2}{a^2 - 2\,b^2}\right)^3} \tag{4}$$

$$\mu_2 = \mu_3 = \pm\frac{b}{a}\cdot i.$$

Von den 6 Asymptotenrichtungen sind also 4 imaginär (die paarweise zusammenfallen) und zwei reell. Aber auch diese sind nur so lange reell, als $a \geq b\sqrt{2}$. Für $a = b\sqrt{2}$ wird $\mu_1 = \infty$, die Asymptote ist der y-Achse parallel. Dieser Fall entspricht in der yz-Ebene der Parabel. Ist $a > b\sqrt{2}$, so sind zwei Asymptotenrichtungen reell.

Die Gleichungen der Asymptoten selbst können nicht nach der allgemeinen Theorie bestimmt werden, weil zwei Richtungen zusammenfallen. Wir gelangen aber zu ihnen, wenn wir die Asymptoten der Kurve als Normalen in den Wendepunkten der Äquatorkurve der F_4 auffassen.

Durch Differentiation der Kurvengleichung

$$(x^2 + y^2)^2 = 4(a^2x^2 + b^2y^2)$$

findet man für den Richtungskoeffizienten der Normalen:

$$m = \frac{y}{x} \cdot \frac{x^2 + y^2 - 2b^2}{x^2 + y^2 - 2a^2}.$$

Setzt man hierin die Koordinaten der Wendepunkte nach den Formeln (V) ein, so findet man

$$m = \pm \frac{b}{a} \sqrt{\left(\frac{2a^2 - b^2}{a^2 - 2b^2}\right)^3}$$

wie in (4). Diese Methode führt bedeutend rascher zum Ziele, aber wir erhalten nur die reellen Asymptoten, so lange uns die Koordinaten der imaginären Wendepunkte unbekannt sind.

Die Gleichungen der Normalen in den Wendepunkten oder der Asymptoten werden jetzt

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Setzt man für x_1, y_1 die Koordinaten der Wendepunkte ein, so erhält man 4 reelle Asymptoten, die paarweise parallel sind. Ihre Gleichungen sind:

$$\left.\begin{aligned} a(a^2 - 2b^2)\sqrt{a^2 - 2b^2} \cdot y + b(2a^2 - b^2)\sqrt{2a^2 - b^2} \cdot x \\ = \pm\, abc\sqrt{3(2a^2 - b^2)(a^2 - 2b^2)} \\ a(a^2 - 2b^2)\sqrt{a^2 - 2b^2} \cdot y - b(2a^2 - b^2)\sqrt{2a^2 - b^2} \cdot x \\ = \pm\, abc\sqrt{3(2a^2 - b^2)(a^2 - 2b^2)}. \end{aligned}\right\} \quad \text{XXIX.}$$

Ist speziell $a = b\sqrt{2}$, so wird $x = 0$, d. h. die Asymptoten fallen mit der y-Achse zusammen.

Die Abschnitte der Asymptoten auf den Koordinatenachsen sind

(x-Achse) $\alpha_1 = \frac{ac}{2a^2 - b^2}\sqrt{3(a^2 - 2b^2)}$ wo $a > b\sqrt{2}$

(y-Achse) $\beta_1 = \frac{bc}{a^2 - 2b^2}\sqrt{3(2a^2 - b^2)}$, während die Koordinaten der Spitzen dem absoluten Werte nach (S. 39)

(x-Achse) $$\alpha_2 = \frac{2ac^2}{2a^2 - b^2}$$

(y-Achse) $$\beta_2 = \frac{2bc^2}{a^2 - 2b^2}$$

sind. Es ist leicht einzusehen, dass stets

$$\alpha_1 < \alpha_2 \qquad \beta_1 > \beta_2.$$

Die Kurve, die zugleich Evolute der Fusspunktskurve der Leitellipse ist, hat in den drei Fällen $a < b\sqrt{2}$, $a = b\sqrt{2}$, $a > b\sqrt{2}$ die in den Figuren 9, 10, 11 gezeichnete Gestalt.

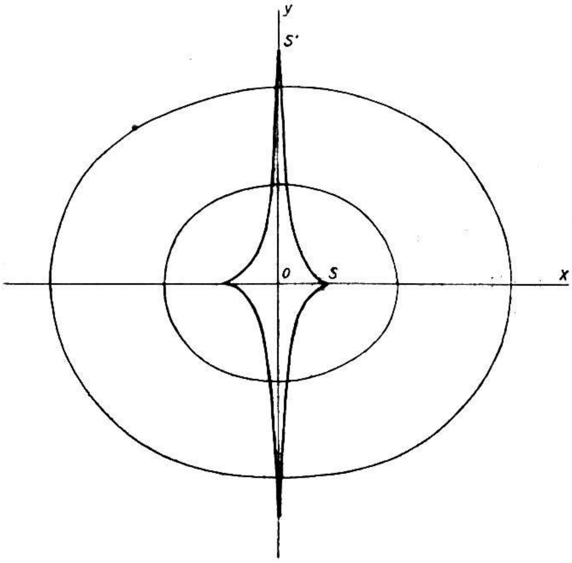

Fig. 9.

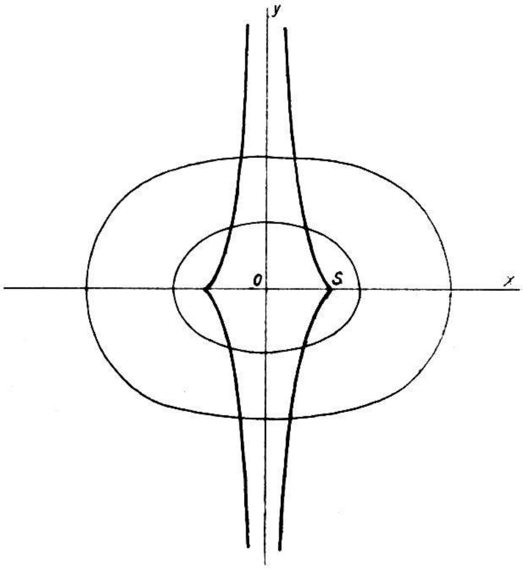

Fig. 10.

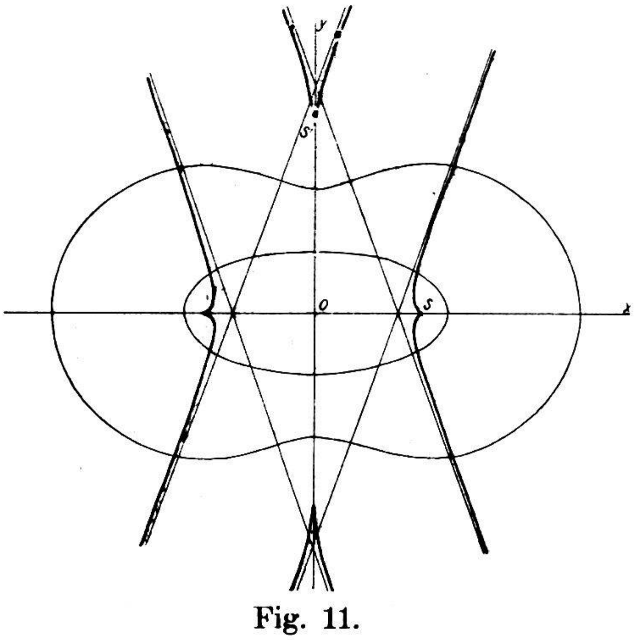

Fig. 11.

§ 13. Diskussion der Zentrafläche.

Gestützt auf die gemachten Untersuchungen ist es möglich, eine Vorstellung von der Zentrafläche zu erhalten. Den ersten Mantel, der in die Leitellipse ausartet, schliessen wir von einer weitern Betrachtung aus und beschränken uns auf den zweiten Mantel. Da dieser seine Gestalt ändert, je nachdem $a \lesseqgtr b\sqrt{2}$ ist, so müssen wir die drei Fälle getrennt behandeln. In allen Fällen sind die Schnitte durch die z-Achse Kegelschnitte.

1. Fall: $a < b\sqrt{2}$. (Fig. 13). Wir fassen zunächst die Schnitte mit den Koordinatenebenen ins Auge. **A, B** (Fig. 12) seien die parabolischen Punkte in der xz-Ebene; **C, D** diejenigen in der yz-Ebene. Denken wir uns einen Punkt auf dem einen, rechts von der z-Achse liegenden Meridian-Kreis der F_4 in der xz-Ebene wandernd von $\mathbf{S_1}$ bis **A**, so beschreibt der Endpunkt des zugehörigen zweiten Hauptkrümmungs-

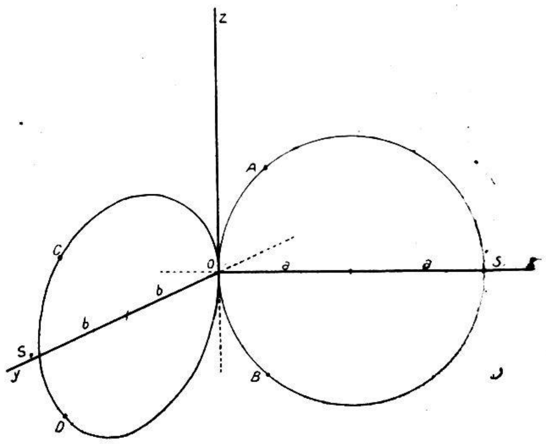

Fig. 12.

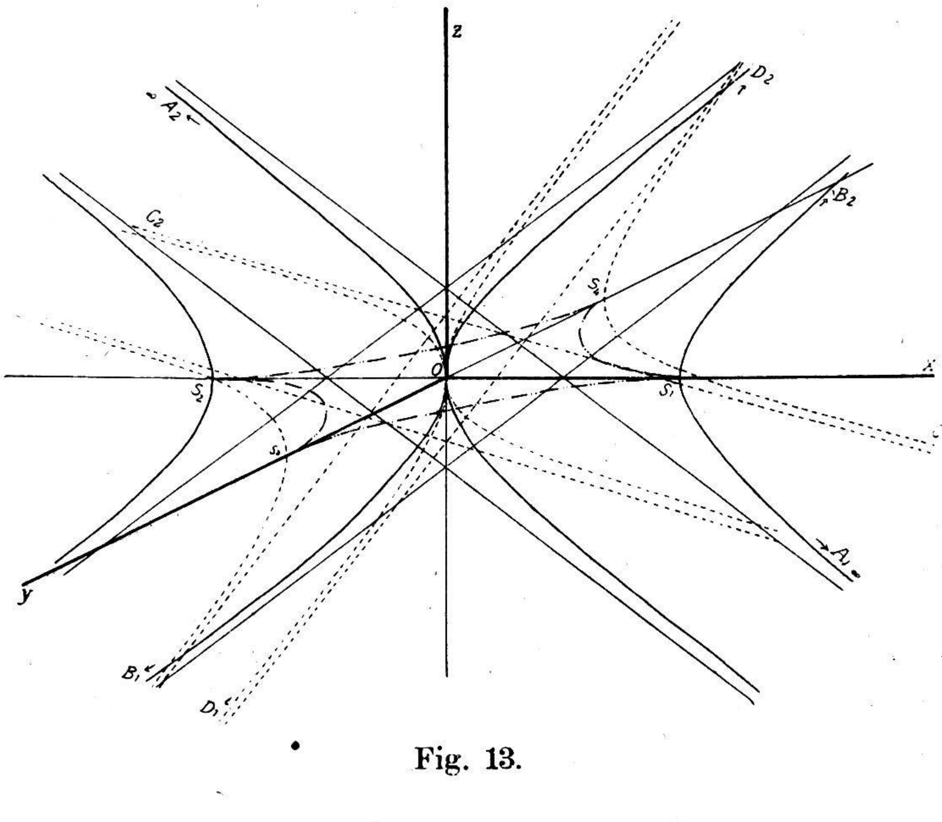

Fig. 13.

radius den unendlichen Hyperbelbogen $S_1 A_1$ (Fig. 13). Wandert der Punkt weiter von **A** nach **O**, so schreitet der Krümmungsmittelpunkt auf der Hyperbel von A_2 (im Unendlichen) nach O. Dem Weg von $\mathbf{O_1}$ bis **B** entspricht der unendliche Bogen OB_1 und dem letzten Stück $\mathbf{BS_1}$ der unendliche Ast $B_2 S_1$. Ganz entsprechendes gilt für den zweiten, zu diesem kongruenten Meridiankreis der xz-Ebene. Ihm ist die zweite Hyperbel der xz-Ebene zugeordnet. Durchwandert ein Punkt beide Kreise, was ohne Sprung möglich ist, so muss auch der zugehörige Krümmungsmittelpunkt die beiden Hyperbeln ohne Sprung durchlaufen können.

Dasselbe lässt sich sagen für die yz-Ebene und überhaupt für jede durch die z-Achse gelegte Ebene. Die Zentrafläche lässt

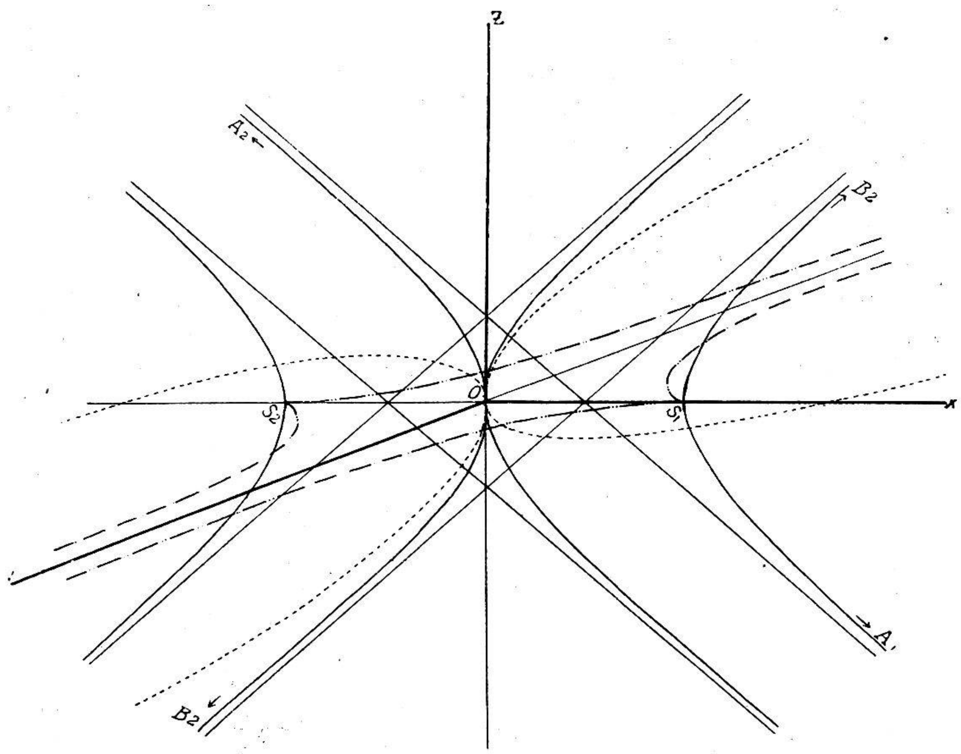

Fig. 14.

sich ihrer Gestalt nach am besten vergleichen mit der Fläche, die von einer durch den Nullpunkt gehenden Hyperbel, deren Scheiteltangente die z-Achse ist, bei der Drehung um die z-Achse beschrieben wird. Nimmt man an dieser Fläche die durch die aufgestellten Eigenschaften erforderlichen Veränderungen vor, so gelangt man zu einem ziemlich klaren Bild der Fläche. Diese scheint demnach aus zwei Mänteln zu bestehen; aber die eben gemachten kinematischen Betrachtungen zeigen, dass diese im Unendlichen in gleicher Weise zusammenhängen, wie die vier Äste zweier kongruenter Schnitthyperbeln.

2. Fall: $a = b\sqrt{2}$. (Fig. 14.) Die Fläche hat im wesentlichen dieselbe Gestalt wie im 1. Fall, nur ist hier der Schnitt mit der yz-Ebene eine Parabel. Die Hälfte dieser Koordinatenebene, die die positive y-Achse enthält, weist daher auch nur einen einzigen parabolischen Punkt auf (in S_4).

3. Fall: $a > b\sqrt{2}$. (Fig. 15.) Um eine Anschauung von der Fläche zu bekommen, denken wir sie uns durch die yz-Ebene

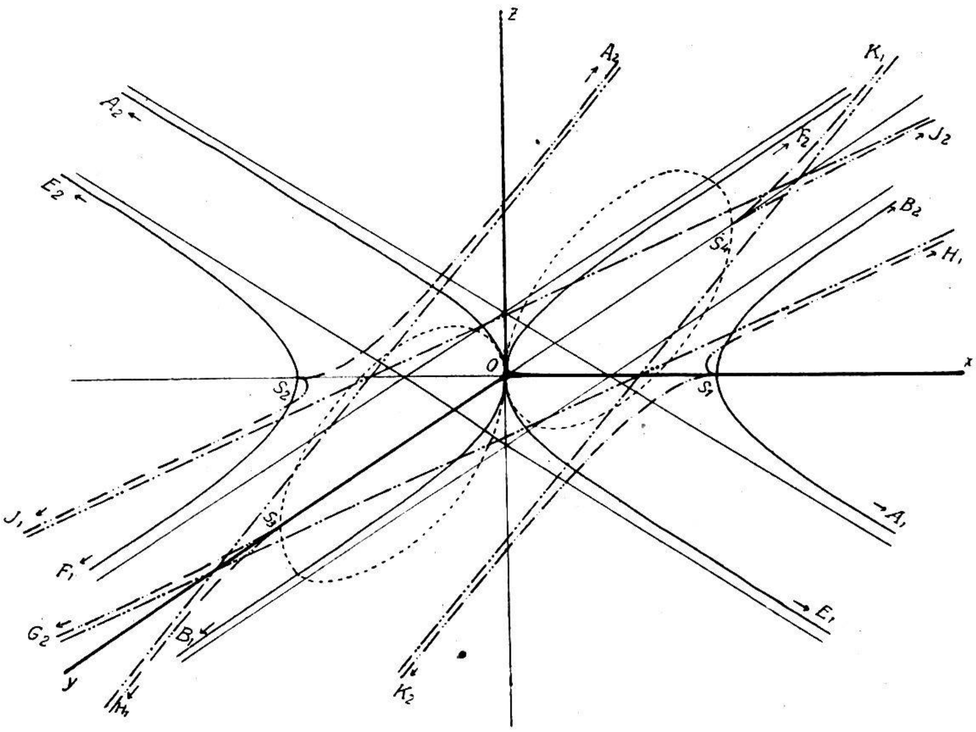

Fig. 15.

entzweigeschnitten. Dann entstehen auf der positiven Seite dieser Ebene zwei Mäntel. Der Mantel I enthält die Kurven $G_1 S_1 K_1$ und $A_1 S_1 B_1$, der Mantel II die Kurven $H_1 S_3$ und $J_2 S_4$, sowie die beiden Ellipsen $S_3 O$ und $S_4 O$ und die Hyperbel $E_1 O F_2$. Beide Mäntel schneiden sich im Endlichen nicht. Auf der negativen Seite der yz-Ebene sei der zu I symmetrische Mantel mit III, der zu II symmetrische mit IV bezeichnet. Längs der yz-Ebene hängen II und IV zusammen und im Unendlichen einerseits I und IV und anderseits II und III. Die Fläche ist also einfach zusammenhängend; denn geht man z. B. von I aus, so kann man ohne Sprung nach IV, von da nach II und von II nach III gelangen.

Zum Schlusse suchen wir noch die den Parameterkurven entsprechenden Kurven der Krümmungsmittelpunkte, Γ_1 und Γ_2.

Für die Krümmungslinien $u = \text{const}$ (Meridiankreise) wird Γ_1 auf einen Punkt der Leitellipse reduziert. Γ_2 ist ein Kegelschnitt, dessen Ebene durch die z-Achse geht (S. 33).

Für die Krümmungslinien $v = \text{const} = k$ ist Γ_1 die Leitellipse. Γ_2 ist der Schnitt der aus Gl. (2) § 10 sich für $v = k$ ergebenden Fläche

$$\sqrt[3]{b^2x^2} + \sqrt[3]{a^2y^2} = \sqrt[3]{\frac{c^4z^2k^2}{a^2b^2}},$$

die sich rational schreiben lässt:

$$\left(b^2x^2 + a^2y^2 - \frac{c^4k^2z^2}{a^2b^2}\right)^3 = 27\, c^4k^2x^2y^2z^2$$

mit der F_4, also der Schnitt eines Kegels 6. Ordnung, dessen Spitze in O liegt, mit der zyklischen Fläche.

III. Kapitel:

Konforme Abbildung.

§ 14. Einführung isothermer Parameter.

In XVII ergab sich für das Linienelement der Fläche:

$$ds^2 = \frac{4}{(r^2 + v^2)^2}\left(\frac{v^4t^2}{r^2}du^2 + r^4dv^2\right).$$

Dasselbe lässt sich auch schreiben

$$ds^2 = \frac{4}{(r^2 + v^2)^2} . r^4 v^4 \left(\frac{t^2}{r^6}du^2 + \frac{1}{v^4}dv^2\right). \qquad (1)$$

Indem nun in der Klammer der Koeffizient von du^2 eine reine Funktion von u ist und ebenso der Koeffizient von dv^2 eine reine Funktion von v, so ist es möglich, durch die Substitution

$$du_1 = \frac{t}{r^3}du$$

$$dv_1 = \frac{1}{v^2}dv$$

eine Einteilung der Fläche in unendlich kleine Quadrate herzustellen. Setzt man die Werte für u und v, die sich aus

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \int \frac{t}{r^3}\, du \\
v_1 &= \int \frac{1}{v^2}\, dv = -\frac{1}{v}
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

ergeben, im Ausdruck (1) für das Linienelement ein, so wird der Faktor vor der Klammer eine Funktion von u_1 und v_1, also

$$d\,s^2 = \Phi\,(u_1, v_1)\,(du_1^2 + dv_1^2). \qquad (3)$$

Es handelt sich nun darum, das noch nicht berechnete Integral für u_1 in (2) auszumitteln. Dieses wird, wenn man für t und r die Werte aus (XVII) einsetzt:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \int \sqrt{\frac{a^4 \cos^2 u + b^4 \sin^2 u}{(a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u)^3}}\, du \\
&= \int \sqrt{\frac{a^4 + b^4\, tg^2\, u}{(a^2 + b^2\, tg^2\, u)^3}}\, \frac{du}{\cos^2 u}.
\end{aligned}
$$

Vermittelst der Substitution

$$tg\, u = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{1}{tg\, \varphi}$$

lässt sich dasselbe auf die Form bringen:

$$u_1 = -\,a\, b \int \frac{d\,\varphi}{\sqrt{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^3}}$$

oder wenn $\quad \dfrac{a^2 - b^2}{a^2} = \dfrac{c^2}{a^2} = e^2$

gesetzt wird, wo $e < 1$:

$$u_1 = -\frac{b}{a^2} \int \frac{d\,\varphi}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3}}$$

oder in der üblichen Schreibweise:

$$u_1 = -\frac{b}{a^2} \int \frac{d\,\varphi}{\triangle^3\, \varphi}.$$

Nach bekannten Formeln findet man hieraus durch Einführung des elliptischen Normalintegrals II. Art $E\,(e, \varphi)$:

$$u_1 = -\frac{1}{b}\, E\,(e, \varphi) + \frac{e^2}{b}\, \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\triangle\, \varphi}.$$

Die neuen (thermischen) Parameter u_1, v_1 drücken sich also folgendermassen durch die alten aus:

$$u_1 = -\frac{1}{b} E(e, \varphi) + \frac{e^2}{b} \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{\triangle \varphi}$$

$$v_1 = -\frac{1}{v} \qquad \text{XXX.}$$

wo

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} u}\right).$$

§ 15. Konforme Abbildung der Fläche auf einen ebenen Streifen und auf die Fläche eines Kreises.

Eine konforme Abbildung einer Fläche auf eine Ebene wird dadurch erzielt, dass man die thermischen Parameter der Fläche als rechtwinklige Punktkoordinaten in der Ebene deutet.[1]) Sind x, y die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes in der Ebene, der das Bild des Punktes (u_1, v_1) der Fläche ist, so ist also zu setzen:

$$x = u_1 = -\frac{1}{b} E(e, \varphi) + \frac{e^2}{b} \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{\triangle \varphi}$$

$$y = v_1 = -\frac{1}{v}, \qquad \text{XXXI.}$$

wo wiederum φ sich aus

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} u}$$

bestimmt. Durch diese Formeln wird die konforme Abbildung vermittelt. Für verschiedene Werte von u ergeben sich die folgenden Werte, in denen E das vollständige elliptische Normalintegral II. Art:

$$E = E\left(e, \frac{\pi}{2}\right)$$

bedeutet:

[1]) G. Scheffers: Anwendung der Diff. und Int. Rechnung auf Geometrie. II. Bd. p. 71.

u	tg φ	φ	x
0^0	∞	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{1}{b}E$
90^0	0	π	0
180^0	$-\infty$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{1}{b}E$
270^0	0	2π	$\frac{2}{b}E$
360^0	∞	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{3}{b}E$

Für alle folgenden Werte von u nimmt x periodisch zu, und zwar für je 90^0 um $\frac{1}{b}E$.

Für $v = 0$ wird $y = \pm\infty$

„ $v \pm \infty$ wird $y = 0$.

Die Fläche ist also konform abgebildet auf einen zur y-Achse parallelen Streifen von der Breite $\frac{4}{b}E$ (Fig. 16). Der Mittelpunkt der Fläche ($v = 0$) wird in den unendlich fernen Punkt der y-Achse abgebildet, der Aequator ($v = \infty$) in die x-Achse.

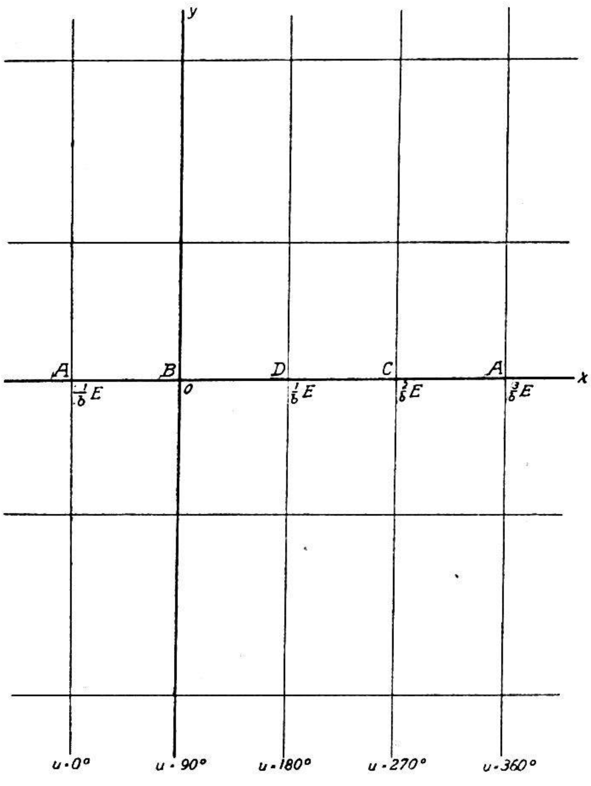

Fig. 16.

Der ersten Schar von Krümmungslinien (Meridiankreise) entsprechen Parallele zur y-Achse, der zweiten Schar Parallele zur x-Achse.

Es bietet nun keine Schwierigkeiten, diesen Streifen — und damit also auch die Fläche — konform auf das Innere des Einheitskreises abzubilden. Legen wir der Ebene des Kreises das Koordinatensystem ξ, η zu Grunde, so vermittelt die Funktion [1])

$$\frac{\xi + i\eta - 1}{\xi + i\eta + 1} = e^{\frac{b\pi}{4E} i(x+iy)} \qquad \text{XXXII.}$$

wo E wieder das vollständige elliptische Normalintegral II. Art bedeutet, die gewünschte Abbildung. Hieraus wird

$$\frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{(\xi+1)^2 + \eta^2} = e^{-\frac{b\pi}{4E} y} \cos \frac{b\pi}{4E} x \qquad (1)$$

$$\frac{2\eta}{(\xi+1)^2 + \eta^2} = e^{-\frac{b\pi}{4E} y} \sin \frac{b\pi}{4E} x. \qquad (2)$$

Durch Elimination von x aus (1) und (2) resultiert die Gleichung

$$\xi^2 - 2\xi \frac{1 + e^{-\frac{b\pi}{2E} y}}{1 - e^{-\frac{b\pi}{2E} y}} + \eta^2 - 1 = 0,$$

die einen Kreis darstellt, dessen Mittelpunkt im Abstand

$$p = \frac{1 + e^{-\frac{b\pi}{2E} y}}{1 - e^{-\frac{b\pi}{2E} y}} \qquad (3)$$

vom Ursprung auf der ξ-Achse liegt und dessen Radius

$$r_1 = \frac{2e^{-\frac{b\pi}{4E} y}}{1 - e^{-\frac{b\pi}{2E} y}}$$

ist. Für $v = \text{const.}$ wird $y = \text{const.}$ und damit p und r_1 const.; d. h. der zweiten Schar von Krümmungslinien auf der Fläche entsprechen Kreise, deren Mittelpunkte auf der ξ-Achse liegen.

Durch Elimination von y aus (1) und (2) folgt die Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 - 2\eta \operatorname{cotg} \frac{b\pi}{4E} x - 1 = 0,$$

die wiederum einen Kreis darstellt, diesmal vom Radius

[1]) A. R. Forsyth: Theory of Functions of a complex Variable, p. 508.

W. F. Osgood: Lehrbuch der Funktionentheorie I, p. 402.

$$r_2 = \frac{1}{\sin \frac{b\pi}{4E} x}.$$

Sein Zentrum liegt im Abstand

$$q = \operatorname{cotg} \frac{b\pi}{4E} x$$

auf der η-Achse.

Hieraus findet man

$$r_2^2 - q^2 = 1.$$

Die Strecken r_2, q und 1 bilden also ein rechtwinkliges Dreieck, r_2 und q sind variabel, aber die Kathete 1 bleibt fest. Alle Kreise, welche der obigen Gleichung entsprechen, gehen also durch den festen Punkt, der im Abstand 1 auf der ξ-Achse liegt — und ebenso durch den symmetrischen Punkt der negativen ξ-Achse.

Für u = const. wird x = const. und somit q und r_2 const., d. h. der ersten Schar von Krümmungslinien (den Meridiankreisen) entspricht im Bilde ein Kreisbüschel durch zwei feste Punkte, dessen Achse mit der η-Achse zusammenfällt.

Das gegenseitige Entsprechen von Kurven ergibt sich aus folgenden zwei Tabellen:

u	x	q	r_2
0^0	$-\frac{1}{b}E$	-1	$\sqrt{2}$
90^0	0	0	1
180^0	$\frac{1}{b}E$	$+1$	$\sqrt{2}$
270^0	$\frac{2}{b}E$	∞	∞
360^0	$\frac{3}{b}E$	-1	$\sqrt{2}$

v	y	p	r_1
0	$\pm\infty$	± 1	0
∞	0	$\pm\infty$	∞

Die Figur 17 (sie ist der Anschaulichkeit wegen um 90° gedreht) stellt die konform abgebildete Fläche dar.

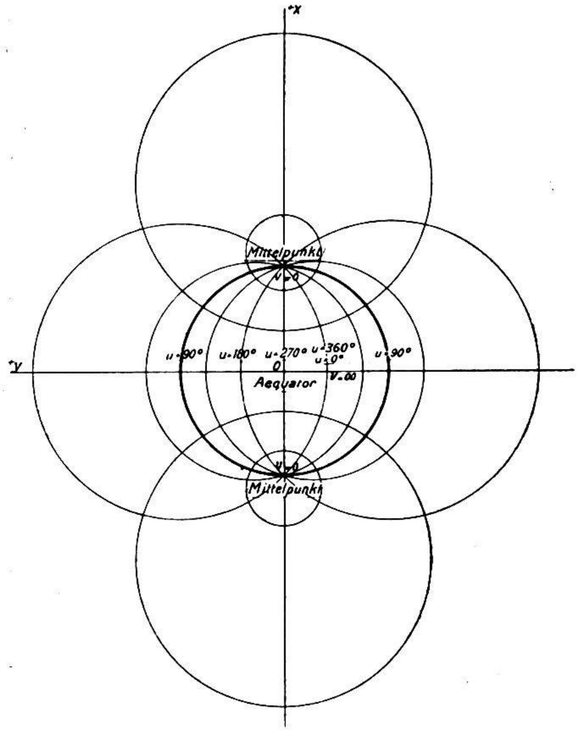

Fig. 17.

Literatur.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften III D 5 (R. v. Lilienthal), 1903.

G. Monge: Application de l'Analyse à la Géométrie 5e éd., revue par M. Liouville. 1850.

Ribaucour: Sur les courbes enveloppes de cercles et sur les surfaces enveloppes de sphères. Bull. soc. phil. Paris. 5 (1868).

A. Enneper: Die zyklischen Flächen. Z. f. Math. u. Ph. 14 (1869).

— Bemerkungen über die Enveloppe einer Kugelfläche. Nachrichten Göttingen 1873.

L. Lecornu: Sur les surfaces enveloppes de sphères. J. de l'école polyt. 53 (1883).