Untersuchung der Fläche in rechtwinkligen und Polarkoordinaten

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1913)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Arthur Fischer.

Ueber eine zyklische Fläche vierter Ordnung.

Eine Kugel von veränderlichem Radius bewege sich so, dass ihr Zentrum auf einer festen Ellipse fortschreitet und ihre Fläche durch den Mittelpunkt der Ellipse geht. Die Umhüllende dieser einfach unendlichen Schar von Kugeln [1]), die als solche zu den zyklischen Flächen gehört, ist Gegenstand vorliegender Arbeit.

I. Teil.

Untersuchung der Fläche in rechtwinkligen und Polarkoordinaten.

§ 1. Aufstellung der Flächengleichung in rechtwinkligen Koordinaten.

Die Ellipse, auf welcher sämtliche Kugelmittelpunkte liegen, bezeichnen wir als Leitellipse. Wir legen sie in die xy-Ebene eines räumlichen cartesischen Koordinatensystems derart, dass ihre Gleichung

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \tag{1}$$

wird, wo a und b die Halbachsen der Ellipse bedeuten.

Sind ξ, η, ζ die Koordinaten irgend eines Punktes einer bestimmten Kugel der Schar, deren Radius l und deren Mittelpunkt (x, y) auf der Leitellipse liegt, so gilt für ihn die Kugelgleichung

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + \zeta^2 = l^2,$$

[1]) Lecornu bezeichnet die Enveloppenflächen von Kugeln als „Perisphären". Die vorliegende Fläche gehört nach seiner Klassifikation zu den Perisphären 2. Gattung.

die sich, weil die Kugel durch den Mittelpunkt 0 geht, auf

$$f = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2(\xi x + \eta y) = 0 \tag{2}$$

reduziert.

Lässt man den Kugelmittelpunkt die ganze Ellipse durchlaufen, x und y also alle nach Gleichung (1) möglichen Werte annehmen, so stellt die Gleichung (2) die einfach unendliche Schar von Kugeln dar. Indem man x und y als Parameter auffasst und zwar x als unabhängigen und y als abhängigen, ergibt sich die Gleichung der Enveloppe aller Kugeln durch Elimination der Parameter x und y aus den Gleichungen

$$f = 0, \quad \frac{df}{dx} = 0$$

und aus Gl. (1). Die zweite Bedingung lautet in unserm Falle

$$\xi + \eta \frac{dy}{dx} = 0$$

oder, wenn man den aus (1) sich ergebenden Wert

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

einsetzt:

$$\frac{df}{dx} = a^2 y \xi - b^2 x \eta = 0. \tag{3}$$

Durch Elimination der parametrischen Koordinaten x, y des Kugelmittelpunktes aus den Gleichungen (1), (2) und (3) ergibt sich:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2\sqrt{a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2} = 0$$

oder, wenn wir ξ, η, ζ durch x, y, z ersetzen:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4(a^2 x^2 + b^2 y^2). \tag{I.}$$

Dies ist die gesuchte Gleichung der Enveloppenfläche.

Ist die Leitkurve speziell ein Kreis, also b = a, so reduziert sie sich auf:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4 a^2 (x^2 + y^2). \tag{Ia.}$$

Die Fläche wird, weil der Radius der erzeugenden Kugel konstant ist, zu einer Kanalfläche oder Röhrenfläche, die aus dem Torus hervorgeht, wenn dessen innerer Radius verschwindet.

Diskussion der Flächengleichung. Die Enveloppenfläche ist von der vierten Ordnung. Sie ist, wie man leicht sieht, in Bezug auf alle drei Koordinatenebenen symmetrisch.

Die homogen gemachte Flächengleichung heisst:

$$F = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 4\,w^2\,(a^2\,x^2 + b^2\,y^2) = 0. \qquad \text{Ib.}$$

Der Schnitt mit der unendlich fernen Ebene $w = 0$ ergibt sich zu

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0, \tag{4}$$

d. h. der Richtungskegel ist ein imaginärer Kreiskegel. Die Fläche ist somit geschlossen und liegt ganz im Endlichen. Die Gleichung (4) stellt aber auch den unendlich fernen Kugelkreis dar, d. h. die Enveloppenfläche geht durch den unendlich fernen imaginären Kugelkreis. Diese Tatsache kann man sich dadurch erklären, dass jede Kugel durch den unendlich fernen imaginären Kugelkreis geht, also auch die Enveloppe aller Kugeln.

Der „Mittelpunkt" der Fläche, d. h. der Ursprung $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, erfüllt die Flächengleichung und ist ein Doppelpunkt. Die Gleichung seines Knotenkegels ist

$$a^2x^2 + b^2y^2 = 0.$$

Dieser zerfällt in die beiden zur xz-Ebene symmetrischen imaginären Ebenen

$$y = \pm \frac{a}{b}\,ix,$$

welche Tangentialebenen im Nullpunkt sind. Beide Ebenengleichungen sind für $x = 0$, $y = 0$ erfüllt; die beiden imaginären Tangentialebenen schneiden sich also in der z-Achse, welche Knotenkante der Fläche im Mittelpunkt ist. Sie schneidet die Fläche in 4 zusammenfallenden Punkten. Der Nullpunkt ist deshalb ein biplanarer Doppelpunkt mit zwei konjugiert imaginären Tangentialebenen und reeller Knotenkante.

Es fragt sich, ob ausser dem Mittelpunkt noch andere Punkte Doppelpunkte seien. Damit ein Punkt Doppelpunkt sei, muss er die Bedingungsgleichungen

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial x} = (x^2 + y^2 + z^2)x - 2a^2w^2x = 0$$
$$F_2 = \frac{\partial F}{\partial y} = (x^2 + y^2 + z^2)y - 2b^2w^2y = 0$$
$$F_3 = \frac{\partial F}{\partial z} = (x^2 + y^2 + z^2)z \qquad = 0$$
$$F_4 = \frac{\partial F}{\partial w} = (x^2 + y^2 + z^2)^2 w \qquad = 0$$

erfüllen, und das tun nur der Nullpunkt $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $w = 1$ und die Punkte des unendlich fernen imaginären Kugelkreises: der Mittelpunkt und die Punkte des imaginären Kugelkreises sind die einzigen Doppelpunkte der Fläche. Der imaginäre Kugelkreis ist eine Doppelkurve der Fläche.

§ 2. Schnitte mit Ebenen durch die z-Achse.

Durch die z-Achse legen wir eine beliebige Ebene, die mit der x-Achse den veränderlichen Winkel φ einschliesse. Um eine einfache Gleichung für die Schnittfigur zu erhalten, machen wir diese Ebene vermittelst der Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \\ z &= z' \end{aligned}$$

zur neuen $x'z'$-Ebene. Die transformierte Flächengleichung:

$$(x'^2 + y'^2 + z'^2)^2 = 4a^2(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)^2 + 4b^2(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)^2$$

liefert für den Schnitt der Fläche mit der $x'z'$-Ebene $y' = 0$ die Gleichung

$$x'^2 + y'^2 = \pm 2\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} \cdot x',$$

die zwei kongruente Kreise darstellt, deren Peripherien den Nullpunkt enthalten und deren Zentren auf der positiven und negativen x'-Achse im Abstand

$$r = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} \qquad \text{II.}$$

vom Nullpunkt liegen. Jede Ebene durch die z-Achse schneidet die Fläche in zwei kongruenten Kreisen, deren Radien durch (II) gegeben sind; wir nennen sie Meridiankreise. Die Fläche enthält also eine einfach unendliche Schar von Kreisen, d. h. sie ist eine zyklische Fläche.

Führt man vermittelst

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{r}, \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

wieder rechtwinklige Koordinaten ein, so ergibt sich für die durch (II) dargestellte Kurve der Mittelpunkte aller Meridiankreise die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2, \qquad \text{II a.}$$

die eine der Leitellipse umschriebene Booth'sche elliptische Lemniskate darstellt. Sie ist die Pedale der Ellipse in Bezug auf ihren Mittelpunkt und berührt diese nur in deren Scheiteln; also sind diese Berührungspunkte die einzigen Mittelpunkte von Meridiankreisen, die auf der Ellipse liegen. Die Radien der zu ihnen gehörenden Meridiankreise der xz- und yz-Ebene sind also gleich den Radien der Kugeln, die ihre Mittelpunkte in jenen Scheiteln haben, nämlich $r' = a$ und $r'' = b$. Diese den Werten $\varphi = 0^0$ und $\varphi = 90^0$ entsprechenden Radien bilden zugleich das Maximum und Minimum für r. Bezeichnen wir jene durch die xz- und yz-Ebene ausgeschnittenen Kreise als ersten bezw. zweiten Hauptmeridian, so können wir sagen:

Die Radien des ersten und zweiten Hauptmeridians bilden die Extremwerte aller Meridianhalbmesser und haben die Länge der grossen bezw. kleinen Halbachse der Leitellipse.

Für den Fall, dass $b = a$ wird, fällt die Kurve der Mittelpunkte sämtlicher Meridiankreise mit dem Leitkreis zusammen.

§ 3. Schnitt der Fläche mit der xy-Ebene.

Die Schnittkurve der Fläche mit der xy-Ebene, der «Äquator», hat die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 = 4(a^2x^2 + b^2y^2). \qquad \text{III.}$$

Sie ist eine Booth'sche elliptische Lemniskate, die zu einer Ellipse mit den Halbachsen 2a und 2b gehört. Sie ist zu den Koordinatenachsen symmetrisch und besteht aus einem geschlossenen Blatt um den Nullpunkt; dieser ist ein isolierter Doppelpunkt oder konjugierter Punkt der Kurve.

Da jede Kugel auf der xy-Ebene einen Kreis ausschneidet, so ist, wie sich übrigens auch direkt zeigen lässt, die Schnittkurve die Enveloppe aller durch den Nullpunkt gehender Kreise, deren Mittelpunkte auf der Ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

liegen. Diese Eigenschaft lässt sich besonders gut verwenden zur Konstruktion der Kurve.

Andererseits ist die Äquatorkurve auch der geometrische Ort der Fusspunkte der Perpendikel vom Nullpunkt auf alle Tangenten an die Ellipse von den doppelten Halbachsen:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = 4a^2b^2, \qquad \text{IV.}$$

wie leicht nachzuweisen ist, d. h. sie ist die Fusspunktskurve oder Pedale dieser letztern Ellipse in Bezug auf ihren Mittelpunkt als Pol.

Führt man in Gl. (III) mit Hilfe von

$$x = \varrho\cos\varphi \qquad y = \varrho\sin\varphi$$

Polarkoordinaten ein, so wird die Polargleichung des Aequators

$$\varrho^2 = 4(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi) = 4r^2. \qquad \text{IIIa.}$$

Hieraus ergibt sich die folgende Konstruktion für die Kurve.[1]) Man konstruiere (Fig. 1) um den Mittelpunkt C zwei Kreise mit den Radien 2a und 2b und ziehe einen beliebigen Strahl unter dem Winkel φ gegen die Hauptachse, der die beiden Kreise in den Punkten A und B schneidet. Zieht man durch A

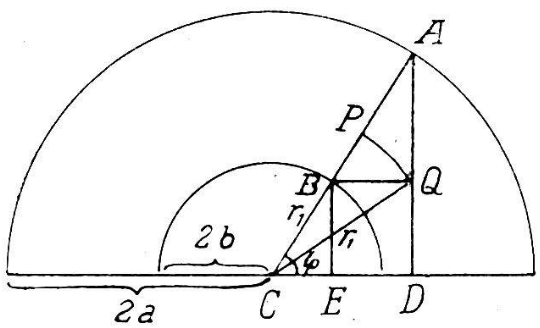

Fig. 1.

[1]) Schlömilch: Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis, I, S. 106.

eine Senkrechte und durch B eine Parallele zur Hauptachse, deren Schnittpunkt Q sei, so ist $CQ = \varrho$ der gesuchte Radiusvektor, der nur noch auf CA abzutragen ist. — Der Beweis ergibt sich aus $\triangle$ BQD, in welchem

$$BD = BE = 2b\sin\varphi \qquad CD = 2a\cos\varphi$$

ist, somit

$$\overline{CP}^2 = \overline{CQ}^2 = \varrho^2 = 4(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi) = 4r^2.$$

Für die höchsten und tiefsten Punkte der Kurve ergeben sich die Koordinaten

$$x = \pm\frac{a}{c}\sqrt{a^2 - 2b^2} \qquad y = \pm\frac{a^2}{c},$$

wenn c die lineare Exzentrizität der Leitellipse bedeutet. Sie fallen für $a = b\sqrt{2}$ mit den Scheiteln der kleinen Achse der Ellipse (IV) zusammen.

Für die Koordinaten der vier Wendepunkte findet man

$$x = \frac{\pm ab^2}{c(a^2 + b^2)}\sqrt{3(a^2 - 2b^2)}, \quad y = \pm\frac{a^2 b}{c(a^2 + b^2)}\sqrt{3(2a^2 - b^2)} \quad \text{V.}$$

Sie sind nur reell, wenn $a > b\sqrt{2}$. Für $a = b\sqrt{2}$ fallen sie in die Scheitel der kleinen Achse der Ellipse (IV).

Die Fusspunkt-Eigenschaft des Aequators lässt sich sofort für die Fläche verallgemeinern. Ein beliebiger Meridiankreis (Fig. 2) vom Mittelpunkt C treffe den Aequator im Punkte Q. Ist dann P irgend ein Punkt dieses Meridiankreises, so ist $\sphericalangle$ QPO $= 90^0$. Die in Q zu OQ senkrechte Gerade t ist eine Tangente an die Ellipse (IV). Legt man durch sie alle möglichen Ebenen und fällt von O aus auf jede ein Lot, so liegen alle Fusspunkte dieser Lote auf dem Meridiankreis OPQ. Hieraus ergibt sich:

Legt man durch alle Tangenten der Ellipse von den Halbachsen 2a und 2b alle möglichen Ebenen und fällt Perpendikel vom Mittelpunkt der Ellipse auf jede derselben, so ist der Ort der Fusspunkte die betrachtete zyklische Fläche vierter Ordnung.

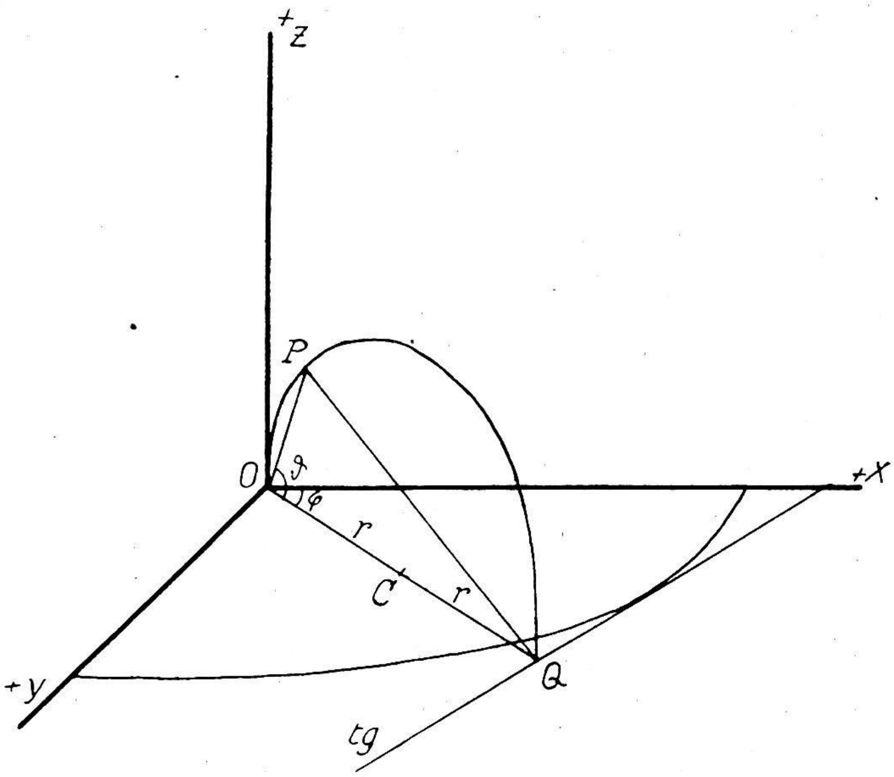

Fig. 2.

§ 4. Schnitte parallel der xy-Ebene.

Durch eine zur xy-Ebene parallele Ebene von der Gleichung $z = s = \text{const.}$ wird die Fläche in der in Bezug auf den jeweiligen Nullpunkt zentrisch symmetrischen Kurve

$$(x^2 + y^2 + s^2)^2 = 4(a^2x^2 + b^2y^2) \qquad (1)$$

geschnitten, die, wie aus der etwas umgeformten Gleichung

$$(x^2 + y^2 + s^2 - 2b^2)^2 = 4(c^2x^2 - b^2s^2 + b^4) \qquad (2)$$

ersichtlich ist, zu den spirischen Linien des Perseus gehört. Sie ist eine bizirkulare C_4 und besitzt als solche zwei ausserordentliche Brennpunkte, deren Orthogonalprojektionen auf die xy-Ebene sich mit den Brennpunkten der Leitellipse decken.

Zieht man vom Nullpunkt aus beliebige Strahlen durch die Kurve, so hat das Produkt der auf jedem dieser Strahlen vom Nullpunkt aus gemessenen Radienvektoren den konstanten Wert s^4 (Potenz).

Führt man vermittelst

$$x = \varrho \cos\varphi, \qquad y = \varrho \sin\varphi$$

Polarkoordinaten ein, so wird die Gleichung (1):

$$(\varrho^2 + s^2)^2 = 4\,\varrho^2(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi),$$

woraus sich ergibt

$$\varrho = \pm\sqrt{2r^2 - s^2 \pm 2r\sqrt{r^2 - s^2}},$$

wo $a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi = r^2$ gesetzt ist.

1. Fall: Ist $s < b$, so wird ϱ immer reell, also werden auch alle vier Schnittpunkte eines Strahles durch den Nullpunkt mit der Kurve reell, d. h.

Alle Ebenen $z < b$ schneiden die Fläche in zwei getrennten, reellen Kurven, die den Nullpunkt umschliessen (Fig. 3[1]), Kurve a).

2. Fall: Ist $s = b$, so reduziert sich Gl. (2) auf

$$(x \pm c)^2 + y^2 = a^2,$$

welche zwei Kreise vom Radius a darstellt, deren Mittelpunkte in den beiden Brennpunkten liegen:

Die Ebenen $z = \pm b$ schneiden aus der Fläche je zwei Kreise aus, die sich in der yz-Ebene kreuzen (Fig. 3, Kurve b).

3. Fall. Ist $a > s > b$, so werden nicht alle Radienvektoren reell. Die beiden Kurven haben kein Flächenstück gemeinsam und schneiden die y-Achse nicht.

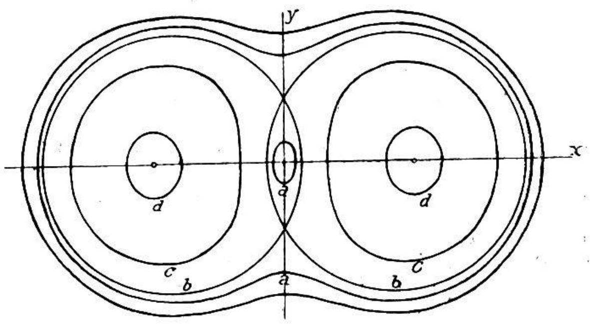

Fig. 3.

Für die vom Nullpunkt an die Kurve gelegte Tangente müssen die Radienvektoren gleich gross sein. Hieraus ergibt sich der Richtungskoeffizient dieser Tangente nach Gl. (2)

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\sqrt{\frac{a^2 - s^2}{s^2 - b^2}}.$$

[1]) Ueber die Konstruktion der spirischen Linien vergl. Teixeira. Arch. d. Math. (3), 11 (1907), S. 64.

Uebersteigt der Richtungskoeffizient des Strahls diese Grösse, so werden die Schnittpunkte imaginär, d. h.

Für alle Ebenen $a > z > b$ besteht der Schnitt mit der Fläche aus zwei getrennten, reellen Kurven, die den Nullpunkt nicht umgeben und von denen jede zur x-Achse symmetrisch ist (Fig. 3, Kurven c und d).

§ 5. Tangentialebene und Normale.

Schreibt man die Flächengleichung in der Form

$$F = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 4(a^2 x^2 + b^2 y^2) = 0$$

und setzt zur Abkürzung

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \text{VI.}$$

so werden die partiellen Ableitungen von F:

$$F_x = 4(R^2 - 2a^2)x \qquad F_y = 4(R^2 - 2b^2)y \qquad F_z = 4R^2 z,$$

und die Gleichung der Tangentialebene

$$(X - x)F_x + (Y - y)F_y + (Z - z)F_z = 0,$$

wo X, Y, Z die laufenden Koordinaten, x, y, z die Koordinaten des Berührungspunktes bedeuten, nimmt die Form an:

$$\begin{aligned} &2a^2 x(X + x) + 2b^2 y(Y + y) \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)(Xx + Yy + Zz). \end{aligned} \qquad \text{VII.}$$

In allen Punkten des Schnittes der Fläche mit den Koordinatenebenen steht die Tangentialebene auf der betr. Koordinatenebene senkrecht, wie sich aus Symmetriegründen oder auch durch die folgende Rechnung ergibt: Für die xz-Ebene z. B. ist $y = 0$. Die Gleichung der Tangentialebene in den Punkten der Schnittkurve auf der xz-Ebene ist also:

$$2a^2 x(X + x) = (x^2 + z^2)(Xx + Zz).$$

Diese Ebene steht auf der xz-Ebene senkrecht.

Die Tangentialebenen in den höchsten bezw. tiefsten Punkten der Fläche, für die $x = \pm a$, $y = 0$, $z = a$ bezw. $x = \pm a$, $y = 0$, $z = -a$ ist, haben die Gleichungen

$$Z = \pm a.$$

Sie sind Doppeltangentialebenen.

Ebenso sind die zu den Berührungspunkten $x = 0$, $y = \pm b$, $z = b$ bezw. $x = 0$, $y = \pm b$, $z = - b$ gehörenden Tangentialebenen von der Gleichung

$$z = \pm b$$

Doppeltangentialebenen. Ihr Schnitt mit der Fläche ist bereits in § 4 diskutiert worden.

Die Richtungskosinuse der Flächennormalen:

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{k}, \qquad \cos\beta = \frac{F_y}{k}, \qquad \cos\gamma = \frac{F_z}{k},$$

wo $$k = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = 8\sqrt{a^4x^2 + b^4y^2}$$

ist, werden:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{R^2 - 2a^2}{2\sqrt{a^4x^2 + b^4y^2}}\, x \\ \cos\beta &= \frac{R^2 - 2b^2}{2\sqrt{a^4x^2 + b^4y^2}}\, y \\ \cos\gamma &= \frac{R^2}{2\sqrt{a^4x^2 + b^4y^2}}\, z, \end{aligned}\right\} \qquad \text{VIII.}$$

sodass die Doppelgleichung der Normalen im Punkte (x, y, z) der Fläche die Form

$$\frac{X - x}{(R^2 - 2a^2)x} = \frac{Y - y}{(R^2 - 2b^2)y} = \frac{Z - z}{R^2 z} \qquad \text{IX.}$$

annimmt.

Für den Schnittpunkt der Normalen mit der xy-Ebene findet man hieraus mit Benützung der Flächengleichung:

$$X = \frac{a^2 x}{2(a^2x^2 + b^2y^2)}, \quad Y = \frac{b^2 y}{2(a^2x^2 + b^2y^2)}. \qquad (1)$$

Bildet man den Ausdruck $b^2 X^2 + a^2 Y^2$, so ergibt sich, dass die Koordinaten der Schnittpunkte der Flächennormalen im Punkte (x, y, z) mit der xy-Ebene durch die Gleichung

$$b^2X^2 + a^2Y^2 = a^2b^2$$

verbunden sind. Sie ist vom Punkte (x, y, z) unabhängig und gilt also, wenn X und Y als veränderlich aufgefasst werden, für jede beliebige Normale. Wir ersehen hieraus, dass der Ort der Schnittpunkte aller Flächennormalen mit der Aequatorebene die Leitellipse ist.

Fassen wir insbesondere die Normalen der Fläche längs der Meridiankreise ins Auge, so ist für diese $y = mx$ zu setzen. In diesem Falle werden die Koordinaten der Spurpunkte nach (1):

$$X = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}} = \text{const}, \quad Y = \frac{b^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}} = \text{const}, \tag{2}$$

d. h. die Flächennormalen längs eines Meridiankreises schneiden sich alle in einem Punkte der Leitellipse, sie bilden einen Kreiskegel.

Es bleibt noch zu zeigen, dass dieser Kegel ein gerader Kreiskegel ist. Für die Koordinaten des zum Meridiankreis $y = mx$ gehörenden Mittelpunktes ergibt sich

$$X_1 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}}{1 + m^2}, \quad Y_1 = \frac{m\sqrt{a^2 + b^2 m^2}}{1 + m^2}. \tag{3}$$

Die Verbindungsgerade dieses Kreismittelpunktes mit dem Spurpunkte (2) ergibt den Richtungskoeffizienten

$$m_1 = -\frac{1}{m}.$$

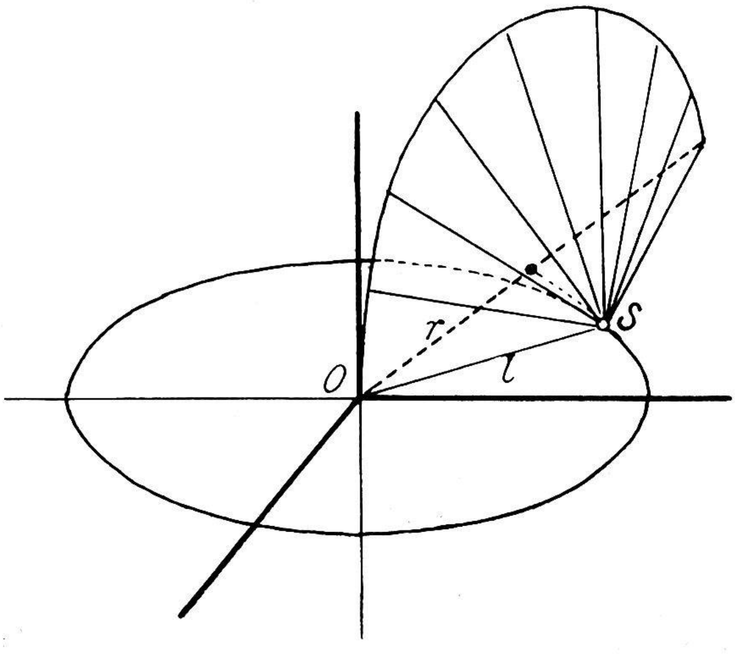

Fig. 4.

Die Achse des Kreiskegels steht also senkrecht zur Basis, dem Meridiankreis.

Die Länge der Erzeugenden dieses Kreiskegels ist gleich dem Radius l der erzeugenden Kugel, deren Mittelpunkt im Spurpunkt S liegt (Fig. 4) und es ist

$$l^2 = \overline{OS}^2 = X^2 + Y^2 = \frac{a^4}{a^2 + b^2 m^2} + \frac{b^4 m^2}{a^2 + b^2 m^2}$$

oder, wenn $m = \operatorname{tg}\varphi$ gesetzt wird:

$$l = \frac{\sqrt{a^4\cos^2\varphi + b^4\sin^2\varphi}}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$t = \sqrt{a^4\cos^2\varphi + b^4\sin^2\varphi} \qquad \text{X.}$$

und berücksichtigen Gl. II, so wird

$$t = l \cdot r. \qquad \text{XI.}$$

§ 6. **Kubatur und Komplanation.**

Um das Volumen des von der Fläche begrenzten Körpers und dessen Oberfläche zu ermitteln, führen wir räumliche Polarkoordinaten $\varrho = OP$, $\varphi = \measuredangle xOQ$, $\vartheta = \measuredangle QOP$ (Fig. 2) ein (wobei ϱ eine von IIIa verschiedene Bedeutung hat). Von diesen sind aber nur zwei, z. B. φ und ϑ als unabhängig zu betrachten. Für ϱ ergibt sich aus der Figur 2:

$$\varrho = 2r\cos\vartheta, \qquad (1)$$

wo $r = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}$.

Das Volumen des Körpers ist gleich dem achtfachen Volumen des in einem Oktanten liegenden Teils des Körpers, also[1])

$$V = 8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\varrho} \varrho^2\cos\vartheta\, d\varrho\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Führt man die Integration nach ϱ und ϑ aus und berücksichtigt die Gl. (1), so wird

$$V = 4\pi\int_0^{\pi/2} \sqrt{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^3}\, d\varphi,$$

was sich auch schreiben lässt:

$$V = 4a^3\pi\int_0^{\pi/2} \sqrt{(1 - e^2\sin^2\varphi)^3}\, d\varphi$$

$\left(\text{wo } e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)$ oder in der bekannten Schreibweise:

---

[1]) Serret: Differential- und Integralrechnung Nr. 604.

$$V = 4a^3\pi \int_0^{\pi/2} \Delta^3\varphi\, d\varphi.$$

Unsere Aufgabe ist zunächst, das unbestimmte Integral

$$J = \int \Delta^3 \varphi\, d\varphi$$

auf elliptische Normalintegrale zu reduzieren. Wir schreiben zu diesem Zwecke:

$$J = \int \frac{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^2}{\Delta\varphi} = \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - 2e^2 \int \frac{\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\, d\varphi + e^4 \int \frac{\sin^4\varphi}{\Delta\varphi}\, d\,\varphi.$$

Nun ist bekanntlich

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = F(e, \varphi)$$

das elliptische Normalintegral I. Art und

$$\int \frac{\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{e^2} \{ F(e,\varphi) - E(e,\varphi) \},$$

wo $E(e,\varphi)$ das elliptische Normalintegral II. Art bedeutet. Aus der Rekursionsformel:

$$J_m = \int \frac{\sin^m\varphi}{\Delta\varphi}\, d\varphi = \frac{(m-2)(1+e^2)}{(m-1)e^2} J_{m-2} - \frac{m-3}{(m-1)e^2} J_{m-4} + \frac{\sin^{m-3}\varphi \cos\varphi\, \Delta\varphi}{(m-1)e^2}$$

ergibt sich weiter

$$\int \frac{\sin^4\varphi}{\Delta\varphi}\, d\varphi = \frac{2(1+e^2)}{3e^4} \{ F(e,\varphi) - E(e,\varphi) \} - \frac{1}{3e^2} F(e,\varphi) + \frac{\sin\varphi \cos\varphi\, \Delta\varphi}{3e^2},$$

sodass jetzt

$$J = F(e,\varphi) - 2 \{ F(e,\varphi) - E(e,\varphi) \} + 2 \cdot \frac{1+e^2}{3} \{ F(e,\varphi) - E(e,\varphi) \} - \frac{e^2}{3} F(e,\varphi) + \frac{e^2}{3} \sin\varphi \cos\varphi\, \Delta\varphi$$

wird, oder nach vorgenommener Reduktion:

$$J = \int \Delta^3 \varphi d\varphi = -\frac{1}{3}\frac{b^2}{a^2} F(e,\varphi) + \frac{2}{3}\frac{a^2+b^2}{a^2} E(e,\varphi)$$
$$+ \frac{a^2-b^2}{3a^2} \sin\varphi \cos\varphi \Delta\varphi.$$

Das bestimmte Integral zwischen den Grenzen o und $\pi/2$ wird

$$J = \int_0^{\pi/2} \Delta^3 \varphi d\varphi = \frac{1}{3a^2} \{ -b^2 K + 2(a^2+b^2) E \},$$

wo K und E die vollständigen elliptischen Normalintegrale I. und II. Art bedeuten. Also ist das Volumen der ganzen zyklischen Fläche

$$V = \frac{4}{3} a\pi \{ 2(a^2+b^2)E - b^2 K \}. \qquad \text{XII.}$$

Die Formel muss natürlich auch gelten, wenn $b = 0$, d. h. wenn die Ellipse sich auf die Strecke $2a$ reduziert. Dadurch bekommen wir ein Mittel an die Hand, die Formel XII. zu prüfen. Ist nämlich $b = 0$, so wird $e = 1$, also $E = 1$ und

$$V = 2 \cdot \frac{4}{3} a^3 \pi,$$

also gleich dem Volumen zweier Kugeln vom Radius a. In der Tat zerfällt unter der Annahme $b = 0$ der Körper in zwei getrennte, sich berührende Kugeln vom Radius a.

Für den Fall, dass $b = a$ ist, vereinfacht sich die Formel XII auf

$$V = 2a^3\pi^2. \qquad \text{XIIa.}$$

Aus der Komplanationsformel für eine in räumlichen Polarkoordinaten gegebene Fläche:[1])

[1]) Serret, l. c., Nr. 601.

$$0 = \int\int \varrho \sqrt{\left(\frac{\partial \varrho}{\partial \varphi}\right)^2 + \left[\left(\frac{\partial \varrho}{\partial \vartheta}\right)^2 + \varrho^2\right] \cos^2\vartheta}\, d\vartheta\, d\varphi$$

ergibt sich, weil in unserm Falle nach Gl. (1)

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} = -2\cos\vartheta \cdot \frac{c^2 \sin\varphi \cos\varphi}{r}$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \vartheta} = -2 r \sin\vartheta$$

ist:

$$0 = 4\int\int t \cos^2\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta.$$

Die ganze Oberfläche ist gleich der achtfachen Oberfläche eines in einem Oktanten liegenden Teiles, also

$$0 = 32 \int_0^{\pi/2} t\, d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^2\vartheta\, d\vartheta.$$

$$= 8a^2\pi \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi$$

wenn
$$k^2 = \frac{a^4 - b^4}{a^4}$$

gesetzt wird. Die Oberfläche der ganzen zyklischen Fläche wird also:

$$0 = 8a^2\pi E, \qquad \text{XIII.}$$

wo E das vollständige elliptische Normalintegral II. Art vom Modul $\frac{1}{a^2}\sqrt{a^4 - b^4}$ vorstellt.

Für $b = 0$ reduziert sich die Formel, wie erforderlich, auf

$$0 = 2 \cdot 4a^2\pi,$$

d. h. auf die Oberfläche zweier Kugeln vom Radius a.

Ist $b = a$, so wird die Formel:

$$0 = 4a^2\pi^2. \qquad \text{XIII a.}$$

§ 7. Die Krümmungslinien.

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien:

$$\begin{vmatrix} dx & dF_x & F_x \\ dy & dF_y & F_y \\ dz & dF_z & F_z \end{vmatrix} = 0$$

wird für die vorliegende zyklische Fläche:

$$\begin{vmatrix} dx & xd(R^2) + (R^2 - 2a^2)dx & x(R^2 - 2a^2) \\ dy & yd(R^2) + (R^2 - 2b^2)dy & y(R^2 - 2b^2) \\ dz & zd(R^2) + R^2dz & zR^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Sie lässt sich mit Benutzung der Flächengleichung auf die Form

$$(xdy - ydx)\{2xzdx + 2yzdy + (z^2 - x^2 - y^2)dz\} = 0$$

bringen.

Die Differentialgleichungen der beiden Scharen von Krümmungslinien sind also:

$$xdy - ydx = 0 \tag{1}$$

$$2xzdx + 2yzdy + (z^2 - x^2 - y^2)dz = 0. \tag{2}$$

Die Integration von Gl. (1) ergibt

$$y = kx. \qquad \text{XIV.}$$

Dies ist die Gleichung eines Ebenenbüschels durch die z-Achse, das die Fläche nach § 2 in den erzeugenden Meridiankreisen schneidet. Wir finden also: Die erste Schar der Krümmungslinien ist eben und wird durch die Meridiankreise dargestellt.[1])

Die Gl. (2) ist eine totale Differentialgleichung von der allgemeinen Form

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Eine solche kann leicht integriert werden,[2]) wenn die Bedingung

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$$

---

[1]) Dieser Satz kann für jede Einhüllende einer einfach unendlichen Kugelschar verallgemeinert werden. Enz. d. Math. III. D. 5. 4 p. 278.

[2]) J. H. Graf: Differentialgleichungen, p. 104.

erfüllt ist. Dies ist, wie sich leicht nachrechnen lässt, für die vorliegende Differentialgleichung (2) der Fall. Um die Integration auszuführen, nehme man z als konstant an, also:

$$x\,dx + y\,dy = 0,$$

integriere und ersetze die auftretende Integrationskonstante durch eine willkürliche Funktion von z:

$$x^2 + y^2 = \varphi(z). \qquad (3)$$

Durch totale Differentation folgt hieraus:

$$2x\,dx + 2y\,dy - \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0.$$

Vergleicht man diese mit (2), so ergibt sich

$$-z\frac{\partial \varphi}{\partial z} = z^2 - (x^2 + y^2) = z^2 - \varphi(z)$$

und durch Integration dieser Differentialgleichung:

$$\varphi(z) = -z^2 + 2Cz,$$

wo C eine arbiträre Konstante ist. Setzt man diesen Wert in (3) ein, so heisst die integrierte Gleichung (2):

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2Cz = 0. \qquad \text{XV.}$$

Dies ist die Gleichung einer Kugel, die durch den Nullpunkt geht und deren Mittelpunkt auf der z-Achse im Abstand C von 0 liegt. Da C willkürlich ist, so folgt: D i e z w e i t e S c h a r v o n K r ü m m u n g s l i n i e n w i r d d u r c h K u g e l n a u s g e s c h n i t t e n , d e r e n M i t t e l p u n k t e i n d e r z - A c h s e l i e g e n u n d d i e d u r c h d e n N u l l p u n k t g e h e n.

Um die Projektion der zweiten Schar von Krümmungslinien auf die y z-Ebene zu finden, eliminieren wir aus (XV) und aus der Flächengleichung (I) x und erhalten die Schar von Kegelschnitten:

$$y^2 = 2\frac{a^2 C}{c^2} z - \frac{a^2 + C^2}{c^2} z^2.$$

Es ist dies die Gleichung einer Schar von E l l i p s e n, deren Halbachsen

$$a' = \frac{a^2 C}{a^2 + C^2} \qquad b' = \frac{a^2 C}{c\sqrt{a^2 + C^2}}$$

sind und deren Scheitel im Nullpunkte liegen, mit der y-Achse als Scheiteltangente.

In analoger Weise ergibt sich für die Projektion auf die x z-Ebene die Gleichung

$$x^2 = -\frac{2\,b^2\,C}{c^2}\,z + \frac{b^2 + C^2}{c^2}\,z^2,$$

welche bei veränderlichem C eine Schar von Hyperbeln darstellt, deren Scheitel im Ursprung liegen.

Es ist klar, dass weder im einen, noch im andern Falle die ganze Kurve in Betracht fällt. Wir können deshalb sagen: Die Projektionen der zweiten Schar von Krümmungslinien auf die yz-Ebene sind Ellipsenbogen, auf die xz-Ebene Hyperbelbogen.

Für die Projektion auf die x y-Ebene findet man

$$C^4\,(x^2 + y^2)^2 + 2\,C^2\,(x^2 + y^2 - 2\,C^2)\,(a^2\,x^2 + b^2\,y^2)$$
$$+ (a^2\,x^2 + b^2\,y^2)^2 = 0.$$

Die Projektion der zweiten Schar der Krümmungslinien auf die xy-Ebene ist eine Schar von Kurven vierten Grades.

Es ist weiter von Interesse, den Winkel, unter dem sich die Kugeln und die Fläche schneiden, zu untersuchen. Zunächst gilt der Satz von Joachimsthal: Liegt eine Krümmungslinie einer Fläche auf einer Kugel, dann schneidet sich die Kugel mit der Fläche längs der ganzen Krümmungslinie unter konstantem Winkel. Wir brauchen also für jede Krümmungslinie der zweiten Schar den Winkel nur in einem Punkte derselben zu bestimmen, dann ist er längs der ganzen Krümmungslinie gleich gross. Diese Bestimmung nehmen wir für die Punkte des in der x z-Ebene liegenden Meridians vor. Da dieser Kreis die y-Achse im Nullpunkt berührt, der Schnittkreis der Kugel mit der x z-Ebene aber die x-Achse im Nullpunkt tangiert, so schneiden sich beide Kreise im Nullpunkt und somit auch im zweiten Schnittpunkt, dem Flächenpunkt, rechtwinklig, wie auch analytisch leicht nachzuweisen ist. Und weil die Tangentialebenen längs dieses Meridians auf der x z-Ebene senkrecht stehen, so schliessen auch sie einen rechten Winkel ein. Dieser Winkel ist von der Grösse C unabhängig und bleibt also für alle Krümmungslinien der zweiten Schar derselbe. Mit Berücksichtigung des Satzes von

Joachimsthal folgt hieraus: Die Kugeln, auf denen die zweite Schar von Krümmungslinien liegt, durchschneiden die Fläche überall rechtwinklig[1]).

Da die Tangentialebenen der Fläche in den sämtlichen Punkten einer Krümmungslinie der zweiten Schar auf den Tangentialebenen in denselben Punkten an die zugehörige Kugel senkrecht stehen, so gehen sie alle durch den Mittelpunkt dieser Kugel. Umgekehrt ergibt sich also: Die Gesamtheit aller von einem festen Punkte der z-Achse aus an die Fläche gelegter Tangentialebenen berührt die Fläche längs einer Krümmungslinie der zweiten Schar. Der Beweis lässt sich übrigens auch analytisch sofort führen. Für den Punkt $X = 0$, $Y = 0$, $Z = C$ der z-Achse werden die Gleichungen der Tangentialebenen nach (VII):

$$2(a^2 x^2 + b^2 y^2) = (x^2 + y^2 + z^2) \cdot C z$$

oder mit Benützung der Flächengleichung:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2 C z.$$

Die Berührungspunkte unterliegen also dieser Bedingung, die genau mit der Gl. XV der zweiten Schar von Krümmungslinien übereinstimmt.

Aus der Tatsache, dass der Kugelradius die Fläche berührt, nicht aber schneidet, ergibt sich eine einfache Konstruktion der Krümmungslinien der zweiten Schar: Man befestige einen Faden in irgend einem Punkte der z-Achse, wähle seine Länge gleich seiner Entfernung vom Nullpunkt und verbinde sein Ende mit der Spitze eines Bleistifts. Bewegt man die Bleistiftspitze bei gespanntem Faden auf der Fläche, so beschreibt sie eine Krümmungslinie.

---

[1]) Dieser Satz lässt sich auch aus den allgemeinen Untersuchungen von Bonnet [Journal de l'école polyt. 20 (1853) p. 117] folgern: Ist für eine Fläche das System der einen Krümmungslinien eben und gehen ihre Ebenen durch ein und dieselbe Gerade, so liegen die Krümmungslinien der andern Schar auf Kugeln, welche die Fläche senkrecht schneiden, und deren Mittelpunkte in jener Geraden liegen.