III. Abschnitt

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1914)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

III. Abschnitt.

§ 1. Die Methode von Niels Nielsen.

Wohl die allgemeinste Methode zur Entwicklung analytischer Funktionen nach Neumann'schen Reihen zweiter Art hat *Niels Nielsen*[17] in seiner Abhandlung „Sur le produit de deux fonctions cylindriques“ gegeben. Sie wird nicht nur vorzüglich geeignet sein, die im I. und II. Abschnitt aufgestellten Reihen zu verifizieren, sondern sie wird gleichzeitig die Möglichkeit bieten, auch ungerade Funktionen nach Quadraten von Bessel'schen Funktionen zu entwickeln. Von *E. Lommel*[18] ist erstmals von einer solchen Möglichkeit gesprochen worden. In der genannten Abhandlung hat er einige vereinzelte, diesbezügliche Resultate veröffentlicht. In der nun zu betrachtenden Methode gibt aber N. Nielsen zuerst einen allgemein gültigen Modus zur Herleitung solcher Reihen. Wir führen die Methode soweit notwendig an und verweisen bezüglich Einzelheiten auf die genannte Abhandlung.

Nielsen beweist daselbst den Satz:

„Une série de puissances $\sum b_\nu x^{2\nu}$, qui est une fonction paire de x, peut être développée en série de la forme:

$$\underline{\sum_{0}^{\infty}{}_{\varsigma}\, b_\varsigma x^{2\varsigma} = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu-\nu} \cdot \sum_{0}^{\infty}{}_{\varsigma}\, a_\varsigma \cdot \overset{\mu+\varsigma}{J}(x) \cdot \overset{\nu+\varsigma}{J}(x)} \qquad (52.)$$

où μ et ν désignent deux constantes quelconques, les négatifs entiers exclus. Ce développement est valable à l'intérieur du cercle de convergence de la série de puissances et les coefficients a_p sont déterminés par la formule:

$$a_p = (\mu + \nu + 2p) \cdot \sum_0^p {}_m \frac{\mu + \nu + 2m + 1}{(p - m)!} \cdot \qquad (53.)$$

$$\cdot B(\mu + m + 1, \nu + m + 1) \cdot \Gamma(\mu + \nu + p + m) \cdot 2^{2m} \cdot b_m \text{``}$$

Den Konstanten μ und ν kann man also jeden beliebigen Wert erteilen.

Setzt man z. B. $\nu = -\mu$, dann wird die Formel (52.) zu:

$$\sum_0^\infty {}_\varsigma\, b_\varsigma\, x^{2\varsigma} = \sum_0^\infty {}_\varsigma\, a_\varsigma \cdot \overset{\varsigma+\mu}{J}(x) \overset{\varsigma-\mu}{J}(x) \qquad (54.)$$

Die Formel (53.) zur Bestimmung der Koeffizienten a_ς wird unter Berücksichtigung der entsprechenden Werte der beiden Euler'schen Integrale B und Γ zu:

$$\left. \begin{aligned} a_p &= \frac{2p \cdot \mu \cdot \pi}{\sin(\mu\pi)} \cdot \left\{ \frac{b_0}{p} + \sum_1^p {}_n \frac{\binom{p+n}{p-n}}{(p+n)} (1^2 - \mu^2)(2^2 - \right. \\ &\qquad \left. - \mu^2)(3^2 - \mu^2) \ldots\ldots (n^2 - \mu^2)\, 2^{2n} \cdot b_n \right\} \\ a_0 &= \frac{\pi \cdot \mu}{\sin(\pi\mu)} \cdot b_0 \end{aligned} \right\} \qquad (55.)$$

In Formel (54.) setze man $\mu = 0$, dann wird:

$$\sum_0^\infty {}_\varsigma\, b_\varsigma\, x^{2\varsigma} = \sum_0^\infty {}_\varsigma\, a_\varsigma \cdot [\overset{\varsigma}{J}(x)]^2 \qquad (56.)$$

Der Bruch $\dfrac{\mu\pi}{\sin(\mu\pi)} \cdot 2p$ wird für $\mu = 0$ zu:

$$\lim_{\mu=0} \frac{\mu\pi}{\sin(\mu\pi)} \cdot 2p = \lim_{\mu=0} 2p\,\mu\pi \frac{1}{\mu\pi - \dfrac{(\mu\pi)^3}{3!} + \dfrac{(\mu\pi)^5}{5!} - + \ldots}$$

$$= \lim_{\mu=0} 2\,p \cdot \frac{1}{1 - \frac{(\mu\pi)^2}{3!} + \frac{(\mu\pi)^4}{5!} - + \dots}$$

$$= 2\,p.$$

Daher wird auch $a_p = 2p \cdot \left\{ \frac{b_0}{p} + \sum_1^p {}^n \frac{(p+n)!}{(p-n)!\,(2\,n)!\,(p+n)} \cdot \right.$

$$\left. \cdot\, 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \dots n^2 \cdot 2^{2n} \cdot b_n \right\}$$

Setzt man darin λ statt p und ν statt n, so wird

$$\begin{aligned} a_\lambda &= 2\,b_0 + 2 \sum_1^\lambda {}^\nu\, 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\,\nu)!} \cdot \frac{\lambda\,(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!\,(\lambda+\nu)} \cdot b_\nu \\ &= \sum_0^\lambda {}^\nu\, 2^{2\nu+1} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\,\nu)!} \cdot \frac{\lambda\,(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot b_\nu \end{aligned} \tag{57.}$$

Wir notieren diese Resultate in folgendem Satz:

„Eine Potenzreihe $\sum_0^\infty {}^\lambda\, b_\lambda\, x^{2\lambda}$, die eine gerade Funktion von x ist, kann in eine Reihe von der Form:

$$\sum_0^\infty {}^\lambda\, a_\lambda \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \tag{58.}$$

entwickelt werden. Diese Entwicklung ist gültig im Innern des Konvergenzkreises der Potenzreihe und die Koeffizienten a_λ bestimmen sich durch die Formel:

$$a_\lambda = \sum_0^\lambda {}^\nu\, 2^{2\nu+1} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\,\nu)!} \cdot \lambda \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot b_\nu \tag{59.}$$

$$a_0 = b_0$$

Dabei sind die b_ν die Koeffizienten von x^{2n} in der Potenzreihenentwicklung."

Ein Vergleich mit der in Formel (10.) gegebenen Definition für die Funktion $\Omega^{\lambda}(y)$ zeigt eine völlige Uebereinstimmung bis auf den Faktor $2\,b_\nu$. Aber gerade dieser Faktor tritt bei jeder Bestimmung der dortigen Entwicklungskoeffizienten k_λ jeweilen zu der Definitionsformel von $\Omega^{\lambda}(y)$, sodass man Gleichheit der Definitionsformeln der Entwicklungskoeffizienten k_λ dort und a_λ hier hat. Streng genommen ist also diese neuere Methode von Nielsen nicht verschieden von der älteren von C. Neumann gegebenen Methode. Wir glaubten jedoch trotzdem von einer neuen Methode sprechen zu dürfen, weil sie viel allgemeiner ist und infolgedessen auch eine bedeutend vielseitigere Anwendung erwarten lässt. Nach dieser von vorneherein festgestellten Uebereinstimmung können wir uns auf die Bestimmung des allgemeinen Koeffizienten a_λ beschränken.

1. Die geraden Potenzen von x.

Es sei

$$b_0 = 1;\ b_1 = b_2 = \ldots\ldots = b_\lambda = \ldots\ldots = 0.$$

Dann ist

$$\sum_0^\infty{}_\lambda\, b_\lambda\, x^{2\lambda} = 1$$

Daher ist

$$1 = \sum_0^\infty{}_\lambda\, a_\lambda \cdot \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2$$

$$a_\lambda = \sum_0^\lambda{}_\nu\, 2^{2\nu+1} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \cdot \lambda \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}\, b_\nu\,;\quad a_0 = b_0$$

alle b_ν mit Ausnahme von $b_0 = 1$ sind null. In der Formel für a_λ tritt daher immer nur der erste Summand auf, sodass man hat $a_0 = 1$; $a_\lambda = 2$. Dann erhält man

$$1 = \left[\overset{0}{J}(x)\right]^2 + 2 \cdot \sum_1^\infty{}_\lambda \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \qquad (60.)$$

Der Vollständigkeit halber sei hier noch an eine dritte Methode zur Entwicklung von 1 in die nach Quadraten der Bessel'schen Funktionen fortschreitende Reihe erinnert, die von *E. Lommel*[19] gegeben ist und daselbst nachgeschlagen werden kann. Das Resultat ist aber, wie schon oben erwähnt wurde, erstmals von *Hansen*[9] gegeben worden.

Indem wir in der Anwendung der Methode von Nielsen weiterfahren, wollen wir sie nur noch auf die allgemeine gerade Potenz ausdehnen. Es sei zu dem Ende

$$b_0 = b_1 = b_2 = \ldots = b_{n-1} = 0;\; b_n = 1;$$

$$b_{n+1} = b_{n+2} = \ldots = b_\lambda = 0.$$

Dann ist

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda\, x^{2\lambda} = x^{2n}$$

$$x^{2n} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2$$

$$a_\lambda = \sum_{\nu=0}^{\lambda} 2^{2\nu+1} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \cdot \lambda \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot b_\nu$$

In dieser Summe verschwinden jeweilen alle einzelnen Summanden, mit Ausnahme von dem, indem $\nu = n$ ist.
Dieser wird

$$a_\lambda = 2^{2n+1} \frac{n!\,n!}{(2n)!}\,\lambda \cdot \frac{(\lambda+n-1)!}{(\lambda-n)!}$$

Daher wird nun

$$x^{2n} = 2^{2n+1} \frac{n!\,n!}{(2n)!} \cdot \sum_{\lambda=n}^{\infty} \lambda \cdot \frac{(\lambda+n-1)!}{(\lambda-n)!} \cdot \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \qquad (61.)$$

2. Die Reihen für cos (x) und coſ (x).

$$\cos(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \cdot \frac{x^{2\lambda}}{(2\lambda)!} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda \cdot x^{2\lambda}, \quad \text{wo } b_\lambda = (-1)^\lambda \cdot \frac{1}{(2\lambda)!}$$

Daher wird nun:

$$\cos(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda}\, a_\lambda \cdot \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2;$$

$$a_\lambda = \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu}\, 2^{2\nu+1} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \cdot \lambda \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot b_\nu$$

$$= \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu}\, (-1)^\nu \cdot 2^{2\nu+1} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!}\, \lambda \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}$$

$$a_0 = b_0 = 1.$$

Daher wird

$$\cos(x) = \left[\overset{0}{J}(x)\right]^2 + \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\, 2\lambda \cdot \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \cdot$$

$$\underline{\cdot \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu}\, (-1)^\nu \cdot 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!}\, \lambda \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}} \qquad (62)$$

$$\operatorname{cof}(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda} \frac{x^{2\lambda}}{(2\lambda)!} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda}\, b_\lambda \cdot x^{2\lambda}, \text{ wo } b_\lambda = \frac{1}{(2\lambda)!}$$

Die Herleitung ist dieselbe wie oben abgesehen vom Faktor $(-1)^\lambda$; daher wird

$$\operatorname{cof}(x) = \left[\overset{0}{J}(x)\right]^2 + \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\, 2\lambda \cdot \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \cdot$$

$$\underline{\cdot \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu}\, 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}} \qquad (63.)$$

Ein Vergleich mit den entsprechenden im ersten Abschnitt aufgestellten Formeln zeigt die völlige Uebereinstimmung der Entwicklungen.

§ 2. Methode für ungerade Funktionen.

Man setzt in der Formel (54.):

$$\sum_{0}^{\infty}\varsigma\; b_\varsigma\, x^{2\varsigma} = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu-\nu} \cdot \sum_{0}^{\infty}\varsigma\; a_\varsigma \cdot \overset{\mu+\varsigma}{J}(x)\, \overset{\nu+\varsigma}{J}(x)$$

$1-\mu$ statt ν. Dann wird

$$\sum_{0}^{\infty}\varsigma\; b_\varsigma\, x^{2\varsigma+1} = \sum_{0}^{\infty}\varsigma\; a_\varsigma \cdot \overset{\varsigma+\mu}{J}(x)\, \overset{\varsigma+1-\mu}{J}(x)$$

$$a_0 = \frac{\pi\,\mu\,(1-\mu)}{\sin(\mu\,\pi)}\, b_0$$

$$a_\lambda = (2\lambda+1)\cdot\frac{\pi\,\mu}{\sin(\mu\,\pi)}\left\{\frac{1-\mu}{1}\, 2\, b_0 + \sum_{1}^{\lambda} n\; (1^2-\mu^2)(2^2-\mu^2)(3^2-\mu^2)\ldots\ldots(n^2-\mu^2)\cdot\frac{\binom{\lambda+n}{\lambda-n}}{(2n+1)}\cdot(n+1-\mu)\cdot 2^{2n+1}\cdot b_n\right\}$$

Setzt man hier $\mu = 0$, dann wird $\lim\limits_{\mu=0}\dfrac{\pi\,\mu}{\sin\pi\,\mu} = 1$, daher

$a_0 = b_0$

$$a_\lambda = (2\lambda+1)\left\{2\, b_0 + \sum_{1}^{\lambda} n\; 2^{2n+1}\,\frac{n!\,n!}{(2n)!}\,\frac{n+1}{2n+1}\cdot\frac{(\lambda+n)!}{(\lambda-n)!}\right\}$$

Setzt man die Laufzahl ν statt n, dann wird

$$a_\lambda = \sum_{0}^{\lambda}\nu\;\; 2^{2\nu+1}\,\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!}\cdot\frac{(\nu+1)}{(2\nu+1)}\cdot(2\lambda+1)\,\frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!}\cdot b_\nu;\;\; a_0 = b_0$$

Wir notieren diese Resultate in folgendem Satz:

„Eine Potenzreihe, $\sum_{0}^{\infty}\lambda\; b_\lambda\, x^{2\lambda+1}$, welche eine ungerade Funktion von x ist, kann in eine Reihe von der Form

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda}\; a_\lambda \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x) \tag{64.}$$

entwickelt werden, welche gültig ist im Innern des Konvergenzkreises der Potenzreihe. Die Koeffizienten a_λ bestimmen sich durch die Formel

$$a_\lambda = \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu}\; 2^{2\nu+1} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \frac{\nu+1}{2\nu+1} (2\lambda - 1) \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot b_\nu;\quad a_0 = b_0 \tag{65.}$$

Die b_ν sind darin die Entwicklungskoeffizienten der Potenzreihe.“

Um nun aber Uebereinstimmung mit den im II. Abschnitt hergeleiteten Entwicklungen für die ungeraden Funktionen zu erhalten, beachte man, dass in der allgemeinen Summenformel $\overset{\lambda-1}{J}(x)\,\overset{\lambda}{J}(x)$ das Produkt der Bessel'schen Funktionen ist und nicht wie hier $\overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x)$. Das ist offenbar gleichbedeutend damit, dass der Entwicklungkoeffizient a_λ dort identisch ist mit dem Koeffizienten $a_{\lambda-1}$ hier. Man ersetze nun in (64.) und (65.) λ durch $\lambda - 1$ und nenne den neuen Entwicklungskoeffizienten a_λ. Ferner hat man früher überall die ungeraden Funktionen in der allgemeinen Darstellung durch die Potenz $(2\nu - 1)$ charakterisiert und nicht wie oben durch die Potenz $(2\nu + 1)$. Man ersetze daher $(\nu + 1)$ durch $(\nu - 1)$. Dann formuliert man den Satz (64.) wie folgt:

„Eine Potenzreihe, $\sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\; b_{\lambda-1}\, x^{2\lambda-1}$, welche eine ungerade Funktion von x ist, kann in eine Reihe entwickelt werden von der Form

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\; a_\lambda \overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \tag{66.}$$

Diese ist gültig im Innern des Konvergenzkreises der Potenzreihe und die Koeffizienten a_λ bestimmen sich durch die Formel:

$$a_\lambda = \sum_{\nu=1}^{\lambda} 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!}(2\lambda - 1) \cdot \frac{(\lambda + \nu - 2)!}{(\lambda - \nu)!} \cdot b_{\nu-1};\; a_0 = b_0 \qquad (67.)$$

Die $b_{\nu-1}$ sind darin die Entwicklungskoeffizienten der Potenzreihe.

Im II. Abschnitt hat man von Fall zu Fall den Entwicklungskoeffizienten a_λ bestimmt nach der Formel $a_\lambda = (k_\lambda - k_{\lambda-1})$. Vergleicht man eine der daselbst gefundenen Formeln für a_λ mit (67.), so erkennt man die völlige Uebereinstimmung derselben bis auf den Faktor $2\,b_{\nu-1}$, der dort schon dabei ist, d. h. in der der betreffenden Funktion charakteristischen Form und hier erst noch durch eben diese Form ersetzt werden muss.

Es seien auch hier einige der schon oben hergeleiteten Entwicklungen nach diesem abgekürzten Verfahren bestimmt.

1. Die ungeraden Potenzen von x.

Es sei $b_0 = 1,\; b_1 = b_2 = \ldots = b_\lambda = \ldots = 0;$

dann ist

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} b_{\lambda-1}\, x^{2\lambda-1} = x.$$

$$x = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda \overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x);\quad a_\lambda = \sum_{\nu=1}^{\lambda} 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!}(2\lambda - 1)\frac{(\lambda + \nu - 2)!}{(\lambda - \nu)!}$$

$$a_\lambda = 2 \cdot (2\lambda - 1).$$

$$x = 2 \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} (2\lambda - 1) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x)\, \overset{\lambda}{J}(x) \qquad (68.)$$

Es sei für die allgemeine, ungerade Potenz:

$b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = b_{n-1} = 0 \quad b_n = 1,\; b_{n+1} = \ldots b_\lambda = \ldots = 0;$
$\lambda \neq n$; also ist

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} b_\lambda\, x^{2\lambda-1} = x^{2n-1};\qquad x^{2n-1} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x)\, \overset{\lambda}{J}(x);$$

$$a_\lambda = \sum_{1}^{\lambda}\nu \; 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!}(2\lambda-1)\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}\,b_\nu$$

$$a_\lambda = 2^{2n}\frac{n!\,n!}{(2n)!}(2\lambda-1)\frac{(\lambda+n-2)!}{(\lambda-n)!}$$

woraus nunmehr:

$$x^{2n-1} = \frac{n!\,n!}{(2n)!}\,2^{2n}\sum_{n}^{\infty}\lambda\;(2\lambda-1)\cdot\frac{(\lambda+n-2)!}{(\lambda-n)!}\cdot\overset{\lambda-1}{J}(x)\,\overset{\lambda}{J}(x) \qquad (69.)$$

2. Die trigonometrischen Funktionen.

Man hat den sin(x) definiert durch die Potenzreihe

$$\sin(x) = \sum_{1}^{\infty}\lambda\;(-1)^{\lambda-1}\frac{x^{2\lambda-1}}{(2\lambda-1)!} = \sum_{1}^{\infty}\lambda\; b_\lambda\, x^{2\lambda-1}, b_\lambda = \frac{(-1)^{\lambda-1}}{(2\lambda-1)!}$$

Daraus bestimmt sich nun:

$$\sin(x) = \sum_{1}^{\infty}\lambda\; a_\lambda\,\overset{\lambda-1}{J}(x)\,\overset{\lambda}{J}(x);$$

$$a_\lambda = \sum_{1}^{\lambda}\nu\; 2^{2\nu}\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu!)}(2\lambda-1)\cdot\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}\,b_\nu$$

$$a_\lambda = \sum_{1}^{\lambda}\nu\;(-1)^{\nu-1}\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu-1)!\,(2\nu)!}\,2^{2\nu}(2\lambda-1)\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}$$

und daher

$$\sin(x) = \sum_{1}^{\infty}\lambda\;(2\lambda-1)\cdot\overset{\lambda-1}{J}(x)\,\overset{\lambda}{J}(x)\sum_{1}^{\lambda}\nu\;(-1)^{\nu-1}\,2^{2\nu}\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu-1)!\,(2\nu)!}$$

$$\cdot\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!} \qquad (70.)$$

Für tg(x) hat man mit Benützung von Bernoulli'schen Zahlen folgende Potenzreihe:

$$\operatorname{tg}(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\; 2^{2\lambda}(2^{2\lambda} - 1)\, B_\lambda \cdot \frac{x^{2\lambda-1}}{(2\lambda)!} = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\; b_\lambda \cdot x^{2\lambda-1}$$

$$\text{wo} \quad b_\lambda = 2^{2\lambda}(2^{2\lambda} - 1) \cdot \frac{B_\lambda}{(2\lambda)!}$$

Daher

$$\operatorname{tg}(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\; a_\lambda \overset{\lambda-1}{J}(x)\, \overset{\lambda}{J}(x)$$

$$a_\lambda = \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\; 4^{2\nu}(2^{2\nu} - 1) \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot (2\lambda - 1) \cdot \frac{(\lambda + \nu - 2)!}{(\lambda - \nu)!} B_\nu$$

woraus dann

$$\operatorname{tg}(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\; (2\lambda - 1) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x)\, \overset{\lambda}{J}(x) \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\; 4^{2\nu}(2^{2\nu} - 1)$$

$$\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{(\lambda + \nu - 2)!}{(\lambda - \nu)!} \cdot B_\nu \qquad (71.)$$

Für cotg (x) hat man die Potenzreihe:

$$\operatorname{cotg}(x) = \frac{1}{x} - \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\; 2^{2\lambda} B_\lambda \frac{x^{2\lambda-1}}{(2\lambda)!}$$

Es wird dann

$$\operatorname{cotg}(x) = \frac{1}{x} - \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\; a_\lambda \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x)\, \overset{\lambda}{J}(x)$$

$$a_\lambda = \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\; 4^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} (2\lambda - 1) \frac{(\lambda + \nu - 2)!}{(\lambda - \nu)!} \cdot B_\nu$$

und daher

$$\operatorname{cotg}(x) = \frac{1}{x} - \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\; (2\lambda - 1) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x)\, \overset{\lambda}{J}(x) \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\; 4^{2\nu}$$

$$\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{(\lambda + \nu - 2)!}{(\lambda - \nu)!} \cdot B_\nu \qquad (72.)$$

Den arc sin (x) hat man definiert durch:

$$\arc \sin (x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} \frac{(2\lambda - 2)!}{2^{2\lambda-2}(\lambda - 1)!\,(\lambda - 1)!} \cdot \frac{x^{2\lambda-1}}{2\lambda - 1}$$

Dann wird

$$\arc \sin (x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\, a_{\lambda} \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x) \overset{\lambda}{J}(x)$$

$$a_{\lambda} = 2 \cdot \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu} \frac{\nu}{(2\nu - 1)^2} \cdot (2\lambda - 1) \cdot \frac{(\lambda + \nu - 2)!}{(\lambda - \nu)!}$$

und folglich

$$\arc \sin (x) = 2 \cdot \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} (2\lambda - 1) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x) \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu} \frac{\nu}{(2\nu - 1)^2} \cdot \frac{(\lambda + \nu - 2)!}{(\lambda - \nu)!} \qquad (73.)$$

Für arc tg (x) hat man

$$\arc \operatorname{tg} (x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} (-1)^{\lambda-1} \frac{x^{2\lambda-1}}{2\lambda - 1}$$

Dann wird sofort

$$\arc \operatorname{tg} (x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} (2\lambda - 1) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x) \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu} (-1)^{\nu-1} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu - 1) \cdot (2\nu)!} \cdot \frac{(\lambda + \nu - 2)!}{(\lambda - \nu)!} \qquad (74.)$$

§ 3. Methode zur Entwicklung ungerader Funktionen in Reihen, die nach Quadraten Bessel'scher Funktionen fortschreiten, deren Parameter gemischte Zahlen sind.

Man setzt in Formel (52.)

$$\sum_0^\infty{}_\varsigma\, b_\varsigma\, x^{2\varsigma} = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu-\nu} \sum_0^\infty{}_\varsigma\, a_\varsigma \cdot \overset{\mu+\varsigma}{J}(x)\, \overset{\nu+\varsigma}{J}(x)$$

für $\nu = 1 - \mu$. Dann wird

$$\sum_0^\infty{}_\varsigma\, b_\varsigma\, x^{2\varsigma+1} = \sum_0^\infty{}_\varsigma\, a_\varsigma \cdot \overset{\varsigma+\mu}{J}(x)\, \overset{\varsigma+1-\mu}{J}(x)$$

$$a_0 = \frac{\pi\,\mu\,(1-\mu)}{\sin(\mu\,\pi)} \cdot b_0$$

$$a_\lambda = (2\lambda+1) \cdot \frac{\pi\,\mu}{\sin(\mu\,\pi)} \left\{ \frac{1-\mu}{1} \cdot 2\, b_0 + \sum_1^\lambda{}_\nu\, (1^2-\mu^2)\,(2^2 - \right.$$

$$\left. -\mu^2) \ldots (\nu^2-\mu^2) \cdot (\nu+1-\mu) \cdot \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!\,(2\nu)!\,(2\nu+1)} \cdot 2^{2\nu+1} \cdot b_\nu \right\}$$

Darin setze man weiter $\mu = \frac{\lambda}{2}$; dann wird:

$$\sum_0^\infty{}_\lambda\, b_\lambda\, x^{2\lambda+1} = \sum_0^\infty{}_\lambda\, a_\lambda \cdot \left[\overset{\lambda+1/2}{J}(x)\right]^2$$

$$a_\lambda = (2\lambda+1)\,\frac{\pi}{2} \cdot \left\{ b_0 + \sum_1^\lambda{}_\nu \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!\,(2\nu)!\,(2\nu+1)} \cdot \left(1^2 - \frac{1}{4}\right) \right.$$

$$\left. \left(2^2 - \frac{1}{4}\right)\left(3^2 - \frac{1}{4}\right) \ldots \left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right) 2^{2\nu+1}\, b_\nu \right\}$$

$$= (2\lambda+1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left\{ b_0 + \sum_1^\lambda{}_\nu \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!\,(2\nu)!\,(2\nu+1)} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{(2\nu)!\,(2\nu)!}{2^{2\nu}\,\nu!\,\nu!}\,(2\nu+1)\, b_\nu \right\}$$

$$= (2\lambda + 1)\frac{\pi}{2} \cdot \left\{ b_0 + \sum_{1}^{\lambda} {}^{\nu} \frac{(2\nu)!\,(\lambda+\nu)!}{2^{2\nu}\,\nu!\,\nu!\,(\lambda-\nu)!} \cdot b_\nu \right\}$$

$$= (2\lambda + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{0}^{\lambda} {}^{\nu} \frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}\,\nu!\,\nu!} \cdot \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot b_\nu$$

Wir fassen diese Resultate in folgenden Satz zusammen:

„Eine Potenzreihe $\sum_{0}^{\infty} {}^{\lambda}\, b_\lambda\, x^{2\lambda+1}$, die eine ungerade Funktion von x ist, kann in eine Reihe von der Form:

$$\sum_{0}^{\infty} {}^{\lambda}\, a_\lambda \left[\overset{\lambda+1/2}{J}(x) \right]^2 \qquad (75.)$$

entwickelt werden, die gültig ist für denselben Bereich, für den die Potenzreihe definiert ist. Die Entwicklungskoeffizienten a_λ bestimmen sich einschliesslich a_0 aus der Formel:

$$a_\lambda = (2\lambda + 1)\frac{\pi}{2} \cdot \sum_{0}^{\lambda} {}^{\nu} \frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}\,\nu!\,\nu!} \cdot \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot b_\nu \qquad (75a.)$$

Die b_ν sind darin die Entwicklungskoeffizienten der Potenzreihe“.

Darin ist $\overset{\lambda+1/2}{J}(x)$ nach der von *J. H. Graf*[20] gegebenen Formel definiert durch

$$\overset{\lambda+1/2}{J}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sum_{0}^{\lambda} {}^{\nu} \frac{(\lambda+\nu)!}{\nu!\,(\lambda-\nu)!} \left(\frac{1}{2x}\right)^{\nu} \cos\left\{ (\lambda + 1 - \nu)\frac{\pi}{2} - x \right\}$$

und darin ist

$$\cos\left\{ (\lambda + 1 - \nu)\frac{\pi}{2} - x \right\} = \pm \sin(x), \text{ für } \lambda + 1 - \nu \equiv 1 \pmod 4$$
$$\text{oder } \lambda + 1 - \nu \equiv 3 \pmod 4$$

$$= \pm \cos(x), \text{ für } \lambda + 1 - \nu \equiv 0 \pmod 4$$
$$\text{oder } \lambda + 1 - \nu \equiv 2 \pmod 4$$

In Anwendung dieses Verfahrens und zur weiteren Erläuterung der Methode seien im folgenden einige ungerade Funktionen entwickelt.

1. Reihen für die ungeraden Potenzen.

Man setze $b_0 = 1$; $b_\lambda = 0 \quad \lambda \neq 0$

Dann ist
$$\sum_0^\infty{}_\lambda \, b_\lambda \, x^{2\lambda+1} = x$$

$$x = \sum_0^\infty{}_\lambda \, a_\lambda \cdot \left[\overset{\lambda+1/2}{J}(x)\right]^2$$

$$a_\lambda = \pi\,(2\lambda+1) \cdot \sum_0^\lambda{}_\nu \, \frac{(2\nu)!}{2^{2\nu+1}\,\nu!\,\nu!} \cdot \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot b_\nu$$

$$= (2\lambda+1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$a_0 = \frac{\pi}{2}$$

Daher wird:

$$x = \frac{\pi}{2}\left[\overset{1/2}{J}(x)\right]^2 + \frac{\pi}{2} \cdot \sum_0^\infty{}_\lambda \, (2\lambda+1) \cdot \left[\overset{\lambda+1/2}{J}(x)\right]^2 \tag{76.}$$

$$\frac{x}{\pi} = \frac{1}{2}\left[\overset{1/2}{J}(x)\right]^2 + \frac{3}{2}\left[\overset{3/2}{J}(x)\right]^2 + \\ + \frac{5}{2}\left[\overset{5/2}{J}(x)\right]^2 + \frac{7}{2}\left[\overset{7/2}{J}(x)\right]^2 + + \ldots \text{ inf.} \tag{76a.}$$

In dieser letzteren Darstellung stimmt die Formel genau überein mit der von *E. Lommel*[20] auf ganz anderem Weg hergeleiteten Entwicklung.

Um noch die Formel für die allgemeine ungerade Potenz herzuleiten, setzt man $b_n = 1 \quad b_\lambda = 0 \quad \lambda \neq n$. Dann ist

$$\sum_0^\infty{}_\lambda \, b_\lambda \, x^{2\lambda+1} = x^{2n+1}$$

$$x^{2n+1} = \sum_0^\infty {}_\lambda \; a_\lambda \left[\overset{\lambda+1/2}{J}(x)\right]^2$$

$$a_\lambda = \pi\,(2\lambda+1) \cdot \sum_0^\lambda {}_\nu \; \frac{(2\nu)!}{2^{2\nu+1}\,\nu!\;\nu!} \cdot \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot b_\nu$$

$$a_\lambda = \pi \cdot (2\lambda+1) \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n+1}\;\nu!\,\nu!} \cdot \frac{(\lambda+n)!}{(\lambda-n)!}$$

Dann wird

$$x^{2n+1} = \pi \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n+1}\;n!\;n!} \cdot \sum_n^\infty {}_\lambda \; (2\lambda+1) \cdot \frac{(\lambda+n)!}{(\lambda-n)!} \left[\overset{\lambda+1/2}{J}(x)\right]^2$$

$$\frac{x^{2n+1}}{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}\;n!\,n!} \sum_n^\infty {}_\lambda \; (2\lambda+1) \cdot \frac{(\lambda+n)!}{(\lambda-n)!} \left[\overset{\lambda+1/2}{J}(x)^2 \right. \qquad (77.)$$

2. Reihen für die trigonometrischen Funktionen.

Man definiert hier sin (x) durch

$$\sin(x) = \sum_0^\infty {}_\lambda \; (-1)^\lambda \frac{x^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!} = \sum_0^\infty {}_\lambda \; b_\lambda \, x^{2\lambda+1};$$

wo $b_\lambda = \dfrac{(-1)^\lambda}{(2\lambda+1)!}$

Dann wird

$$\sin(x) = \sum_0^\infty {}_\lambda \; a_\lambda \left[\overset{\lambda+1/2}{J}(x)\right]^2$$

$$a_\lambda = \pi\,(2\lambda+1) \sum_0^\lambda {}_\nu \; \frac{(2\nu)!}{2^{2\nu+1}\;\nu!\,\nu!} \cdot \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot b_\nu$$

$$= \pi\,(2\lambda+1) \sum_0^\lambda {}_\nu \; (-1)^\nu \frac{(2\nu)!}{2^{2\nu+1}\,\nu!\,\nu!\,(2\nu+1)!} \; \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!}$$

$$a_0 = \frac{\pi}{2}$$

Damit erhält man:

$$\sin(x) = \pi \cdot \sum_0^\infty{}_\lambda (2\lambda+1) \left[\overset{\lambda+1/2}{J}(x)\right]^2 \cdot \sum_0^\lambda{}_\nu \frac{(-1)^\nu}{2^{2\nu+1} \nu!\, \nu!\, (2\nu+1)!} \cdot \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin(x) &= \frac{\pi}{2}\left[\overset{1/2}{J}(x)\right]^2 + \frac{5\pi}{4}\left[\overset{3/2}{J}(x)\right]^2 + \frac{23}{16}\pi \cdot \left[\overset{5/2}{J}(x)\right]^2 + \\
&\quad + \frac{74}{64} \cdot \pi \left[\overset{7/2}{J}(x)\right]^2 + \frac{193}{256}\left[\overset{9/2}{J}(x)\right]^2 + \ldots \text{inf.} \\
\frac{\sin(x)}{\pi} &= \frac{1}{2}\left[\overset{1/2}{J}(x)\right]^2 + \frac{5}{4}\left[\overset{3/2}{J}(x)\right]^2 + \frac{23}{16}\left[\overset{5/2}{J}(x)\right]^2 + \\
&\quad + \frac{74}{64}\left[\overset{7/2}{J}(x)\right]^2 + \frac{193}{256}\left[\overset{9/2}{J}(x)\right]^2 + + \ldots \text{inf.} \\
&\text{gültig für } -\infty < x < +\infty
\end{aligned}\right\} \tag{78.}$$

Analog leitet man ab mit

$$\operatorname{tg}(x) = \sum_0^\infty{}_\lambda 4^{\lambda+1}(4^{\lambda+1}-1) B_{\lambda+1} \frac{x^{2\lambda+1}}{(2\lambda+2)!} \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{tg}(x)}{\pi} &= \sum_0^\infty{}_\lambda (2\lambda+1) \cdot \left[\overset{\lambda+1/2}{J}(x)\right]^2 \cdot \\
&\cdot \sum_0^\lambda{}_\nu \frac{(4^{\nu+1}-1)}{\nu!\,(\nu+1)!\,(2\nu+1)} \cdot \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot B_{\nu+1}
\end{aligned} \tag{79.}$$

mit $\operatorname{cotg}(x) = \frac{1}{x} - \sum_0^\infty{}_\lambda 4^{\lambda+1} \cdot B_{\lambda+1} \frac{x^{2\lambda+1}}{(2\lambda+2)!} \qquad -\pi < x < +\pi$

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{cotg}(x)}{\pi} &= \frac{1}{\pi \cdot x} - \sum_0^\infty{}_\lambda (2\lambda+1) \cdot \left[\overset{\lambda+1/2}{J}(x)\right]^2 \cdot \\
&\cdot \sum_0^\lambda{}_\nu \frac{B_{\nu+1}}{\nu!\,(\nu+1)!\,(2\nu+1)} \cdot \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!}
\end{aligned} \tag{80.}$$

mit $\quad \arcsin(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda} \frac{(2\lambda)!}{4^{\lambda}\,\lambda!\,\lambda!} \cdot \frac{x^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)} \quad -1 \lesseqgtr x \lesseqgtr +1$

$$\frac{\dfrac{\arcsin(x)}{\pi} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda} (2\lambda+1) \cdot \left[\overset{\lambda+1/2}{J}(x)\right]^2 \cdot}{\cdot \dfrac{1}{2} \cdot \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu} \dfrac{1}{2\nu+1} \left[\dfrac{(2\nu)!}{4^{\nu}\,\nu!\,\nu!}\right]^2 \dfrac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!}} \qquad (81.)$$

mit $\quad \operatorname{arctg}(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} (-1)^{\lambda} \frac{x^{2\lambda+1}}{2\lambda+1} \quad -1 \lesseqgtr x \lesseqgtr +1.$

$$\frac{\dfrac{\operatorname{arctg}(x)}{\pi} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda} (2\lambda+1) \left[\overset{\lambda+1/2}{J}(x)\right]^2 \cdot}{\cdot \dfrac{1}{2} \cdot \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu} (-1)^{\nu} \cdot \dfrac{1}{2\nu+1} \cdot \dfrac{(2\nu)!}{4^{\nu}\,\nu!\,\nu!} \cdot \dfrac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!}} \qquad (82.)$$

Als Konvergenzbereich hat man nach dem Nielsen'schen Satz jeweilen den Konvergenzbereich der entsprechenden Potenzreihenentwicklung.

---

§ 4. Entwicklung einer Reihe mit negativen Potenzen.

Man ersetzt nach dem Vorgehen von *N. Nielsen* [21] in der Formel:

$$\frac{\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\mu+\nu}}{\Gamma(\mu+1)\cdot\Gamma(\nu+1)} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda} \frac{(\mu+\nu+2\lambda)}{(\mu+\nu)} \binom{\mu+\nu+\lambda-1}{\lambda} \overset{\mu+\lambda}{J}(x) \overset{\nu+\lambda}{J}(x)$$

μ durch $\mu - n$; ferner ν durch $-\mu - n$, wobei n eine ganze, positive Zahl sein soll. Die Formel wird dann nach entsprechender Reduktion:

$$\frac{1}{x^{2n}} = \frac{\left(\dfrac{\pi}{\sin\mu\pi}\right)^2 2^{-2n}}{\Gamma(n+\mu)\cdot\Gamma(n-\mu)} \cdot \sum_0^{n-1}\lambda\,(-1)^\lambda\,\frac{n-\lambda}{n}\binom{2n}{\lambda}$$
$$\left\{ \overset{n-\lambda+{}^1/_2}{J}(x)\cdot\overset{n-\lambda-{}^1/_2}{J}(x) - \overset{\lambda-n+{}^1/_2}{J}(x)\cdot\overset{\lambda-n-{}^1/_2}{J}(x)\right\} \qquad (84.)$$

Darin darf μ jeden beliebigen Wert annehmen mit Ausnahme der negativen ganzen Zahlen. Setzt man in (87.) $\mu = \frac{1}{2}$ dann erhält man weiter:

$$\frac{1}{x^{2n}} = \frac{\pi^2\cdot 2^{-2n}}{\Gamma(n+{}^1/_2)\cdot\Gamma(n-{}^1/_2)} \cdot \sum_0^{n-1}\lambda\,(-1)^\lambda\cdot\frac{(n-\lambda)}{n}\cdot\frac{(2n)!}{\lambda!\,(2n-\lambda)!}\cdot$$
$$\cdot\left\{ \overset{n-\lambda+{}^1/_2}{J}(x)\cdot\overset{n-\lambda-{}^1/_2}{J}(x) - \overset{\lambda-n+{}^1/_2}{J}(x)\;\overset{\lambda-n-{}^1/_2}{J}(x)\right\} \qquad (85.)$$

Nun ist

$$\Gamma(n+{}^1/_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma({}^1/_2) =$$
$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots(2n-1)\cdot 2n}{n!\,2^{2n}}\cdot\sqrt{\pi}$$
$$= \frac{(2n)!}{n!\,2^{2n}}\cdot\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(n-{}^1/_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma({}^1/_2) =$$
$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots(2n-3)\cdot(2n-2)}{(n-1)!\,2^{2n-2}}\cdot\sqrt{\pi}$$
$$= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,2^{2n-2}}\cdot\sqrt{\pi}$$

Daraus wird

$$\frac{\pi^2\cdot 2^{-2n}}{\Gamma(n+{}^1/_2)\cdot\Gamma(n-{}^1/_2)} = \frac{\pi^2\cdot 2^{-2n}\cdot n!\,2^{2n}\cdot(n-1)!\,2^{2n-2}}{(2n)!\,(2n-2)!\,\pi} =$$
$$= \frac{n!\,(n-1)!}{(2n)!\,(2n-2)!}\cdot 2^{2n-2}\cdot\pi = \frac{2^{2n-1}\,n!\,n!}{(2n)!\,(2n)!}\,(2n-1)\cdot\pi$$

Mit Berücksichtigung dieser Reduktionen wird die Formel (85.)

$$\frac{1}{x^{2n}} = \frac{2^{2n-1}\, n!\, n!}{(2n)!\,(2n)!}\cdot(2n-1)\cdot\pi\cdot\sum_{0}^{n-1}{}_{\lambda}\,(-1)^{\lambda}\cdot$$

$$\cdot\frac{n-\lambda}{n}\cdot\frac{(2n)!}{\lambda!\,(2n-\lambda)!}\left\{\overset{n-\lambda+1/2}{J}(x)\;\overset{n-\lambda-1/2}{J}(x)-\overset{\lambda-n+1/2}{J}(x)\cdot\overset{\lambda-n-1/2}{J}(x)\right\}$$

$$\underline{\underline{\begin{aligned}&=\frac{(n-1)!\,(n-1)!}{(2n-2)!}\cdot 2^{2n-2}\cdot\pi\cdot\sum_{0}^{n-1}{}_{\lambda}\,(-1)^{\lambda}\cdot\\&\cdot\frac{(n-\lambda)}{\lambda!\,(2n-\lambda)!}\left\{\overset{n-\lambda+1/2}{J}(x)\cdot\overset{n-\lambda-1/2}{J}(x)-\overset{\lambda-n+1/2}{J}(x)\cdot\overset{\lambda-n-1/2}{J}(x)\right\}\end{aligned}}} \tag{86.}$$

Man hat in der Formel (86.) vorerst eine Entwicklung für die negativen geraden Potenzen. Die Reihe ist zum wesentlichen Unterschied gegenüber der Reihe für positive gerade Potenzen erstmals eine endliche Reihe und ferner eine nach Produkten der Bessel'schen Funktion fortschreitende Reihe. Zür Prüfung auf ihre Richtigkeit führt man den folgenden Identitätsnachweis durch:

Die Zahl n kann jede beliebige, ganze, positive Zahl sein, also auch $n = 1$. Dann reduziert sich die Formel (86.) zu:

$$\frac{1}{x^{2}} = \frac{\pi}{2}\left\{\overset{3/2}{J}(x)\,\overset{1/2}{J}(x)-\overset{-1/2}{J}(x)\,\overset{-3/2}{J}(x)\right\}$$

Nun ist nach *J. H. Graf*[20]

$$\overset{m+1/2}{J}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\sum_{0}^{m}{}_{\lambda}\,\frac{(m+\lambda)!}{\lambda!\,(m-\lambda)!}\left(\frac{1}{2x}\right)^{\lambda}\cos\left\{(m+1-\lambda)\frac{\pi}{2}-x\right\}$$

$$\overset{-m-1/2}{J}(x)=(-1)^{m}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\sum_{0}^{m}{}_{\lambda}\,\frac{(m+\lambda)!}{\lambda!\,(m-\lambda)!}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{2x}\right)^{\lambda}\sin\left\{(m+1-\lambda)\frac{\pi}{2}-x\right\}$$

in Sonderheit

$$\overset{1/2}{J}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi\cdot x}}\cdot\sin(x);\quad \overset{-1/2}{J}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\cos(x)$$

Demnach bestimmen sich:

$$\overset{3/2}{J}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\sum_{0}^{1}{}_{\lambda}\,\frac{(\lambda+1)!}{\lambda!\,(1-\lambda)!}\cdot\left(\frac{1}{2x}\right)^{\lambda}\cos\left\{(2+\lambda)\,\frac{\pi}{2}-x\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\left\{-\cos(x)+\frac{1}{x}\sin x\right\}$$

$$\overset{1/2}{J}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\sin x$$

$$\overset{1/2}{J}(x)\cdot\overset{3/2}{J}(x)=\frac{2}{\pi x}\cdot\left\{\frac{\sin^2 x}{x}-\sin x\cdot\cos x\right\}$$

$$\overset{-3/2}{J}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{0}^{1}{}_{\lambda}\,\frac{(\lambda+1)!}{\lambda!\,(1-\lambda)!}\left(\frac{1}{2x}\right)^{\lambda}\sin\left\{(2-\lambda)\,\frac{\pi}{2}-x\right\}$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\left\{\sin x+\frac{1}{x}\cos x\right\}$$

$$\overset{-1/2}{J}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

$$\overset{-1/2}{J}(x)\cdot\overset{-3/2}{J}(x)=-\frac{2}{\pi x}\cdot\left\{\frac{\cos^2 x}{x}+\sin x\cos x\right\}$$

$$\frac{\pi}{2}\left\{\overset{1/2}{J}(x)\,\overset{3/2}{J}(x)-\overset{-1/2}{J}(x)\,\overset{-3/2}{J}(x)\right\}=\frac{1}{x}\cdot\left\{\frac{1}{x}(\sin^2 x+\cos^2 x)\right\}=\frac{1}{x^2}$$

q. e. d.

Für die ungeraden negativen Potenzen erhält man, von derselben Formel ausgehend:

$$\frac{1}{x^{2n+1}}=\frac{\left[\frac{\pi}{\sin\mu\,\pi}\right]^2 2^{-2n-1}}{\Gamma(n+\mu)\cdot\Gamma(n-\mu+1)}.$$

$$\cdot \sum_0^n \lambda\, (-1)^\lambda \frac{(2n-2\lambda+1)}{(2n+1)} \cdot \frac{(2n+1)!}{\lambda!\,(2n+1-\lambda)!} \cdot \left\{ \overset{\mu+n-\lambda}{J}(x)\; \overset{-\mu+n-\lambda+1}{J}(x) + \overset{\mu-n+\lambda-1}{J}(x)\; \overset{-\mu-n+\lambda}{J}(x) \right\}$$

Setzt man hierin wieder $\mu = \frac{1}{2}$, dann wird:

$$\frac{1}{x^{2n+1}} = \frac{\pi^2\, 2^{-2n-1}}{\Gamma(n+{}^1/_2) \cdot \Gamma(n+{}^1/_2)} \cdot$$

$$\cdot \sum_0^n \lambda\, (-1)^\lambda \frac{(2n-2\lambda+1)\,(2n)!}{\lambda!\,(2n-\lambda+1)!} \left\{ \ldots - \ldots . \right\}$$

unter analogen Reduktionen wie oben, erhält man die endgültige Formel:

$$\frac{1}{x^{2n+1}} = \frac{2^{2n-1}\, n!\, n!}{(2n)!} \cdot \pi \cdot$$

$$\cdot \sum_0^n \lambda\, (-1)^\lambda \frac{(2n-2\lambda+1)}{\lambda!\,(2n-\lambda+1)!} \left\{ \left[\overset{n-\lambda+{}^1/_2}{J}(x) \right]^2 - \left[\overset{-n+\lambda-{}^1/_2}{J}(x) \right]^2 \right\} \qquad (87.)$$

In Formel (87.) hat man eine Entwicklung für die ungeraden negativen Potenzen, die nach Quadraten Bessel'scher Funktionen fortschreitet. Auch hier ist Bedingung, dass n nur ganzzahlige, positive Werte annehmen kann. Setzt man $n = 0$, so hat man wieder den Identitätsnachweis für die Formel (87.) indem

$$\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \left\{ \left[\overset{{}^1/_2}{J}(x) \right]^2 + \left[\overset{-{}^1/_2}{J}(x) \right]^2 \right\}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{2}{\pi x} \sin^2 x + \frac{2}{\pi x} \cos^2 x \right\}$$

$$= \frac{1}{x}$$

Nachdem nun die Summenformeln für die geraden und ungeraden Potenzen aufgestellt sind, ist es nicht schwierig, aus ihnen die Entwicklungen für Potenzreihen, die entweder nach negativen geraden oder negativen ungeraden Potenzen des Argumentes fortschreiten, aufzustellen. Durch Addition der Produkte Bessel'scher Funktionen mit jeweilen gleichen Parametern erhält man, wenn die zu entwickelnde, gerade Funktion die Potenzreihe hat:

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty}{}^{\lambda}\; b_{\lambda}\, x^{-2}$$

für dieselbe eine nach Produkten von Bessel'schen Funktionen fortschreitende Reihe von der Form:

$$\sum_{1}^{\infty}{}^{n}\; b_n\, x^{-2n} = \pi \cdot \sum_{1}^{\infty}{}^{n}\; a_n \left\{ \overset{n+1/2}{J}(x)\, \overset{n-1/2}{J}(x) - \overset{-n+1/2}{J}(x)\, \overset{-n-1/2}{J}(x) \right\} \tag{88.}$$

$$a_n = \sum_{0}^{n}{}^{\lambda}\, (-1)^{\lambda}\, 2^{2n+2\lambda-2}\, \frac{(n+\lambda-1)!\,(n+\lambda-1)!}{(2n+2\lambda-2)!} \cdot \frac{n}{\lambda!\,(2n+\lambda)!} \cdot b_{n+\lambda}$$

Die Reihe (88.) ist für denselben Bereich definiert, für den die Potenzreihe definiert ist.

Ganz analog erhält man für Potenzreihen, die nach ungeraden negativen Potenzen des Argumentes fortschreiten, eine Entwicklung von der Form:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{0}^{\infty}{}^{n}\; b_n\, x^{-2n-1} = \pi \cdot \sum_{0}^{\infty}{}^{n}\; a_n \left\{ \left[\overset{n+1/2}{J}(x)\right]^2 + \left[\overset{-n-1/2}{J}(x)\right]^2 \right\} \\ &a_n = \sum_{0}^{n}{}^{\lambda}\, (-1)^{\lambda}\, 2^{2n+2\lambda-1}\, \frac{(n+\lambda)!\,(n+\lambda)!}{(2n+2\lambda)!} \cdot \frac{(2n+1)}{\lambda!\,(2n+2\lambda+1)!} \cdot b_{n+\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{89.}$$

definiert für denselben Bereich wie die ursprüngliche Potenzreihe.