Ueber Reihenentwicklungen nach Quadraten und Produkten von Bessel'schen Funktionen

Autor(en): **Jordi, Eduard**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1914)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-319248

Eduard Jordi.

Ueber Reihenentwicklungen nach Quadraten und Produkten von Bessel'schen Funktionen.

Einleitung.

In einer sehr bemerkenswerten Schrift hat *W. Köstler*[1] die Reihenentwicklung nach Bessel'schen Zylinderfunktionen untersucht und bedeutend erweitert. Er weist daselbst mit Recht auf ihre vielfache Verwendung sowohl in der reinen Mathematik als auch ganz besonders in der theoretischen Physik hin[2], wie dies u. a. besonders von *E. Lommel*[3], *N. Nielsen*[4] und *H. Weber*[5] getan worden ist. W. Köstler gibt in der genannten Schrift erst eine Einteilung der Reihenentwicklungen genannter Art und behandelt dann besonders die Entwicklungen nach sog. *Neumann'schen Reihen erster Art*, d. h. nach Reihen, die nach einfachen Bessel'schen Funktionen fortschreiten. Diese Art von Reihen ist wohl die am meisten verwendete, weshalb denn auch die Methoden zu ihrer Herleitung am zahlreichsten und vollkommensten ausgebildet sind.

Von mehreren Autoren: *N. Nielsen*[6], *E. Lommel*[7], *Carl Neumann*[8] ist auf die Möglichkeit der Darstellung von Potenzreihen nach sogenannten *Neumann'schen Reihen zweiter Art* hingewiesen worden, d. h. nach Reihen, die nach Quadraten oder Produkten von Bessel'schen Funktionen fortschreiten. Sie spielen jedoch nach N. Nielsen in der Theorie der Zylinderfunktionen keine so wichtige Rolle wie die der ersten Art, ebenso ist ihre Verwendung in der reinen und angewandten Mathematik unseres Wissens keine so ausgedehnte, weshalb denn auch die Methoden zu ihrer Herleitung zum Teil nur angedeutet sind von *Carl Neumann*[8], von *Niels Nielsen*[6], oder nur Resultate von geringer Allgemeinheit veröffentlicht sind von *E. Lommel*[7], *Hansen*[9] und *Gegenbaur*[10].

Wir haben nun in der vorliegenden Schrift versucht, die bestehenden Methoden auf die bekannten Potenzreihen anzuwenden, die nach den verschiedenen Methoden erhaltenen Resultate miteinander zu vergleichen und im besonderen auch die Parallelen zu ziehen zwischen den Entwicklungen nach Neumann'schen Reihen erster und zweiter Art.

Die Zahlen im Text weisen auf das am Schluss beigefügte Literaturverzeichnis hin.

I. Abschnitt.

§ 1. Klassifizierung der Reihen.

In der genannten Arbeit teilt Köstler die eigentlichen Entwicklungen nach Bessel'schen Funktionen ganz allgemein in folgende drei Typen ein:

1. Entwicklungen erster Klasse:

Reihenentwicklungen mit gleichbleibendem Parameter und veränderlichem Argument, dessen Änderung sich nach einem durch die Laufzahl λ beherrschten Gesetz vollzieht.

Ihre allgemeine Form ist:

$$F(x) = \sum_{\lambda} A_\lambda \, f\left[\overset{a}{J}(\varphi_\lambda(x))\right]$$

2. Entwicklungen zweiter Klasse:

Reihenentwicklungen mit gleichbleibendem Argument und veränderlichem Parameter, dessen Änderung sich nach einem durch die Laufzahl λ beherrschten Gesetz vollzieht.

Ihre allgemeine Form ist:

$$F(x) = \sum_{\lambda} A_\lambda \, f\left[\overset{a_\lambda}{J}(\varphi(x))\right]$$

3. Entwicklungen dritter Klasse:

Reihenentwicklungen mit veränderlichem Argument und veränderlichem Parameter, deren Änderungen sich jeweilen nach einem durch die Laufzahl λ beherrschten Gesetz vollziehen.

Ihre allgemeine Form ist:

$$F(x) = \sum_{\lambda} A_\lambda \, f\left[\overset{a_\lambda}{J}(\varphi_\lambda(x))\right]$$

Die Entwicklungen der zweiten Klasse im besonderen lassen sich wieder in zwei Gruppen trennen, nämlich:

a. Entwicklungen nach einfachen J-Funktionen. Sie werden nach Niels Nielsen als Neumann'sche Reihen erster Art bezeichnet und sind im Allgemeinen von der Form:

$$\sum_\lambda A_\lambda \overset{\nu+\lambda}{J}(x)$$

$$\sum_\lambda A_\lambda \overset{\nu+2\lambda}{J}(x)$$

Sie wird besonders zur Darstellung von einfachen analytischen Funktionen, vorteilhaft verwendbar, wie in der genannten Schrift von W. Köstler ausführlich gezeigt wird.

b. Entwicklungen nach einfachen Produkten von J-Funktionen. Sie werden nach Niels Nielsen als Neumann'schen Reihen zweiter Art bezeichnet und sind im allgemeinen von der Form:

$$\sum_\lambda A_\lambda \overset{\nu+\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\mu+\lambda}{J}(x)$$

$$\sum_\lambda A_\lambda \overset{\frac{\nu+\lambda}{2}}{J}(x) \cdot \overset{\frac{\mu+\lambda}{2}}{J}(x)$$

speziell

$$\sum_\lambda A_\lambda \overset{\lambda}{J}(x) \overset{\lambda+\mu}{J}(x)$$

$$\sum_\lambda A_\lambda \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2$$

Die zwei letztgenannten Arten der Entwicklung geben verhältnismässig einfache Darstellungen und sie sollen im Folgenden eingehend untersucht werden.

---

§ 2. Erste Methode von Carl Neumann.

Die von *Carl Neumann*[8] angegebene Methode ist in vielen Teilen analog der von Köstler zitierten zweiten Methode zur Entwicklung nach einfachen J-Funktionen. Die Methode sei hier soweit ausgeführt, als sie für die folgenden Untersuchungen von Bedeutung ist.

An die Spitze der genannten Abhandlung stellt C. Neumann den Satz:

„Versteht man unter n eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, ... ∞, so kann die Potenz x^{2n} in eine nach Quadraten von Bessel'schen Funktionen fortschreitende Reihe entwickelt werden, welche gültig bleibt für jeden endlichen Wert von x".

Definiert man nach *F. W. Bessel*[11], *Carl Neumann*[12], *Hermann Hankel*[13] die allgemeine Bessel'sche Funktion durch die Gleichung:

$$\overset{n}{J}(x) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\lambda} (-1)^{\lambda} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\, \Gamma(n+\lambda+1)}$$

wo n jede beliebige reelle, ganze, positive Zahl sein kann, dann hat die Enwicklung der Potenz x^{2n} nach einfachen Bessel'schen Funktionen die Form:

$$x^{2n} = \alpha_0 \overset{0}{J}(x) + \alpha_2 \overset{2}{J}(x) + \alpha_4 \overset{4}{J}(x) + \alpha_6 \overset{6}{J}(x) + \ldots \text{ in inf.}$$

Die nach Quadraten derselben Bessel'schen Funktion fortschreitende Entwicklung lautet dann:

$$x^{2n} = \frac{n!\,n!}{(2n)!} \left\{ \alpha_0 \left[\overset{0}{J}(x)\right]^2 + \alpha_2 \left[\overset{1}{J}(x)\right]^2 + \alpha_4 \left[\overset{2}{J}(x)\right]^2 + + \ldots \text{ in inf.} \right\}$$

Die Koeffizienten der letzteren Entwicklung sind also proportional mit denen der ersteren, nämlich von diesen nur verschieden durch den gemeinschaftlichen Faktor $\frac{n!\,n!}{(2n)!}$.

Nun sind die Entwicklungen von x^0, x^2, x^4 .... nach Bessel'schen Funktionen gegeben durch:

$$1 = J(x) + 2 \cdot \sum_{1}^{\infty}{}^{\lambda} \overset{2\lambda}{J}(x)$$

$$x^2 = \qquad 2 \cdot \sum_{1}^{\infty}{}^{\lambda} (2\lambda)^2 \cdot \overset{2\lambda}{J}(x)$$

$$x^4 = 2 \cdot \sum_{2}^{\infty}{}_{\lambda} (2\lambda)^2 \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right] \overset{2\lambda}{J}(x)$$

$$x^6 = 2 \cdot \sum_{3}^{\infty}{}_{\lambda} (2\lambda)^2 \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right] \left[(2\lambda)^2 - 4^2\right] \overset{2\lambda}{J}(x)$$

$$x^8 = 2 \cdot \sum_{4}^{\infty}{}_{\lambda} (2\lambda)^2 \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right] \left[(2\lambda)^2 - 4^2\right] \left[(2\lambda)^2 - 6^2\right] \overset{2\lambda}{J}(x)$$

$$x^{2n} = 2 \cdot \sum_{n}^{\infty}{}_{\lambda} (2\lambda)^2 \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right] \left[(2\lambda)^2 - 4^2\right] \ldots\ldots \left[(2\lambda)^2 - (2n-2)^2\right] \cdot \overset{2\lambda}{J}(x)$$

Hieraus ergeben sich nach dem oben zitierten Neumann'schen Satz die Entwicklungen dieser Potenzen nach den Quadraten der J-Funktionen zu:

$$\left.\begin{aligned}
1 &= \left[\overset{0}{J}(x)\right]^2 + 2 \cdot \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \\
x^2 &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} (2\lambda)^2 \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \\
x^4 &= \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdot 2 \cdot \sum_{2}^{\infty}{}_{\lambda} (2\lambda)^2 \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right] \cdot \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \\
x^6 &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot 2 \cdot \sum_{3}^{\infty}{}_{\lambda} (2\lambda)^2 \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right] \left[(2\lambda)^2 - 4^2\right] \cdot \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \\
x^8 &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \cdot 2 \cdot \sum_{4}^{\infty}{}_{\lambda} (2\lambda)^2 \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right] \left[(2\lambda)^2 - 4^2\right] \left[(2\lambda)^2 - 6^2\right] \cdot \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \\
x^{2n} &= \frac{n!\, n!}{(2n)!} \cdot 2 \sum_{n}^{\infty}{}_{\lambda} (2\lambda)^2 \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right] \left[(2\lambda)^2 - 4^2\right] \ldots\ldots \left[(2\lambda)^2 - (2n-2)^2\right] \cdot \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2
\end{aligned}\right\} \quad (1.)$$

Nachdem die Entwicklungen für die geraden Potenzen gegeben sind, ist es möglich, die Entwicklung einer **geraden Funktion** herzuleiten. Ebenda beweist C. Neumann mit jeder wünschbaren Strenge, dass jede Funktion f(x), welche eindeutig, stetig und gerade ist in einem Gebiet, das vollständig innerhalb eines Kreises um den Nullpunkt mit dem Radius R liegt, in eine Reihe entwickelt werden kann von der Form:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\lambda} k_{\lambda} \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^{2} \tag{2.}$$

welche gültig ist für alle der Bedingung $|x| < R$ entsprechenden Werte von x. Um nun mit Hilfe der vorhin hergeleiteten Entwicklungen für die geraden Potenzen von x eine einfache Methode zur Bestimmung der Entwicklungskoefizienten k_{λ} zu erhalten, stellt man vorerst eine gerade Funktion durch ein gewisses Integral dar.

Auf der x-Ebene sei um den Punkt $x = 0$ ein Kreis mit dem Radius R beschrieben. Ferner sei f(x) eine gegebene Funktion, welche eindeutig, stetig und gerade ist, solange $|x| < R$ ist. Das Verhalten der Funktion auf der Peripherie des Kreises, d. h. für $|x| = R$, wird als unbekannt betrachtet. Sei ferner $x = c$ ein beliebiger Punkt innerhalb der Kreisfläche (R), d. h. für den $|c| < r < R$ ist. Dann lässt sich nach dem bekannten Satz von Cauchy der Wert der gegebenen Funktion f(x) im Punkte c darstellen durch:

$$f(c) = \frac{1}{2 i \pi} \cdot \int_{(r)} f(x) \frac{dx}{x - c}$$

die Integration erstreckt in positivem Sinne über die Peripherie der Kreisfläche (r). Diese Formel muss gelten für jeden andern innerhalb der Kreisfläche (r) gelegenen Punkt, also auch z. B. für den Punkt — c, also:

$$f(-c) = \frac{1}{2 i \pi} \cdot \int_{(l)} f(x) \frac{dx}{x + c}$$

Durch Addition der beiden letzten Formeln folgt sofort:

$$\frac{f(c) + f(-c)}{2} = \frac{1}{2 i \pi} \cdot \int_{(r)} f(x) \frac{x \cdot dx}{x^2 - c^2}$$

Zufolge der Voraussetzung, dass f (x) eine gerade Funktion sein soll, ist f (c) = f (c); daher

$$f(c) = \frac{1}{2\,i\,\pi} \cdot \int_{(r)} f(x) \cdot \frac{x \cdot dx}{x^2 - c^2}. \qquad (3.)$$

Damit ist jede gerade Funktion f (c), die endlich, stetig und gerade bleibt für jeden der Bedingung $|x| < R$ genügenden Wert von x, durch ein Integral von der Form der Gleichung (3.) dargestellt.

Vermöge der bisherigen Resultate gelingt es nun, den Neumann'schen Ausdruck $\frac{1}{y^2 - x^2} = (y^2 - x^2)^{-1}$ in die gewünschte Entwicklung zu bringen. Seien x und y zwei beliebige, komplexe Grössen, y möge als fest, x als veränderlich betrachtet werden. Der Ausdruck

$$\frac{1}{y^2 - x^2} \qquad (4.)$$

stellt allsdann eine Funktion von x dar, welche eindeutig, stetig und gerade ist, solange x der Bedingung genügt $|x| < |y|$. Dann besteht nach dem oben zitierten Neumann'schen Satz eine Entwicklung von der Form:

$$\frac{1}{y^2 - x^2} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} k_\lambda \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \qquad (5.)$$

die gültig ist für jedes beliebige, der Bedingung $|x| < |y|$ entsprechende x. Die Koeffizienten k_λ der Entwicklung werden abhängig sein vom Parameter λ und von y. Sie seien bezeichnet mit $\varepsilon_\lambda\ \Omega^\lambda(y)$, wo $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots\ldots = \varepsilon_\lambda = \ldots\ldots = 2$.

In dieser Schreibweise wird die Entwicklung (5.) zu:

$$\frac{1}{y^2 - x^2} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \varepsilon_\lambda\ \Omega^\lambda(y) \cdot \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \qquad (5a.)$$

oder

$$\frac{1}{y^2 = x^2} = \Omega^0(y)\left[\overset{0}{J}(x)\right]^2 + 2 \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} \Omega^\lambda(y) \cdot \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2. \qquad (5b.)$$

Es sei hier an die Analogie der ebenfalls von *C. Neumann*[12] gegebenen Methode zur Entwicklung nach einfachen J-Funktionen erinnert. Der Weg ist folgender: Der Neumann'sche Ausdruck $\frac{1}{y-x}$ wird in Reihe entwickelt von der Form:

$$\frac{1}{y-x} = \overset{0}{O}(y)\overset{0}{J}(x) + 2 \cdot \sum_{1}^{\infty} \lambda\ \overset{\lambda}{O}(y)\overset{\lambda}{J}(x) \qquad (6.)$$

wo die darin auftretende Funktion $\overset{\lambda}{O}(y)$ definiert ist durch die Formel:

$$\overset{n}{O}(y) = \sum_{0}^{<\frac{n+1}{2}} \lambda\ \frac{n}{4} \cdot \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} \left(\frac{2}{y}\right)^{n+1-2\lambda} \qquad (6\,a.)$$

nach der von *J. H. Graf*[14] gegebenen Formulierung.

Um die in den Formeln (5a) und (5b) auftretenden unbekannten Funktionen $\Omega^{\lambda}(y)$ zu bestimmen, beachte man, dass vermöge der Bedingung $|x| < |y|$ der Ausdruck (4.) entwickelt werden kann in der Form:

$$\frac{1}{y^2 - x^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{x^2}{y^4} + \frac{x^4}{y^6} + \frac{x^6}{y^8} + + \ldots \quad \text{in inf.} \qquad (7.)$$

multipliziert man

$$1 = [\overset{0}{J}(x)]^2 + 2 \cdot \sum_{1}^{\infty} \lambda\ [\overset{\lambda}{J}(x)]^2$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sum_{1}^{\infty} \lambda\ (2\lambda)^2 [\overset{\lambda}{J}(x)]^2$$

$$x^4 = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdot 2 \cdot \sum_{2}^{\infty} \lambda\ (2\lambda)^2 [(2\lambda)^2 - 2^2] [\overset{\lambda}{J}(x)]^2$$

der Reihe nach mit $\frac{1}{y^2}$; $\frac{1}{y^4}$; $\frac{1}{y^6}$; ..... und addiert, dann erhält man links den Ausdruck (7.). Rechts dagegen kommt:

$$\begin{array}{llll}
\frac{1}{y^2}[\overset{0}{J}(x)]^2 + \frac{2}{y^2}[\overset{1}{J}(x)]^2 & + \frac{2}{y^2}[\overset{2}{J}(x)]^2 & & + \frac{2}{y^2}[\overset{3}{J}(x)]^2 + \cdots \\
\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{y^4}\cdot 2^2\cdot[\overset{1}{J}(x)]^2 & + \frac{1}{2}\frac{2}{y^4}\,4^2[\overset{2}{J}(x)]^2 & & + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{y^4}\cdot 6^2[\overset{3}{J}(x)]^2 + \cdots \\
 & \frac{1\cdot 2}{3\cdot 4}\cdot\frac{2}{y^6}\cdot 12\cdot 4^2[\overset{2}{J}(x)]^2 & & + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 4}\cdot\frac{2}{y^6}\cdot 12\cdot 6^2[\overset{3}{J}(x)]^2 + \cdots \\
 & & & \frac{1\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6}\cdot\frac{2}{y^8}\cdot 32\cdot 6^2[\overset{3}{J}(x)]^2 + \cdots
\end{array}$$

Addiert man die Vertikalen, denselben Parametern der J-Funktion enthaltenden Kolonnen, so erhält man eine Reihe, deren Koeffizienten mit $\overset{\lambda}{\Omega}(y)$ bezeichnet sein sollen, von der Form:

$$\overset{0}{\Omega}(y)[\overset{0}{J}(x)]^2 + 2\overset{1}{\Omega}(y)[\overset{1}{J}(x)]^2 + 2\overset{2}{\Omega}(y)[\overset{2}{J}(x)]^2 + 2\overset{3}{\Omega}(y)[\overset{3}{J}(x)]^2 +$$
$$+ 2\overset{4}{\Omega}(y)[\overset{4}{J}(x)]^2 + \cdots + \varepsilon_\lambda\, \overset{\lambda}{\Omega}(y)[\overset{\lambda}{J}(x)]^2 + \cdots \text{ inf.} \qquad (8.)$$

d. h. die Koeffizienten sind identisch mit den Koeffizienten in den Entwicklungen (5a.) und (5b.). Man hat demnach als Definitionsformel dieser von C. Neumann eingeführten Ω-Funktion in der allgemeinen Darstellung:

$$\overset{\lambda}{\Omega}(y) = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{2}\frac{(2\lambda)^2}{y^4} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 4}\cdot\frac{(2\lambda)^2[(2\lambda)^2 - 2^2]}{y^6} +$$
$$+ \frac{1\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6}\cdot\frac{(2\lambda)^2[(2\lambda)^2 - 2^2][(2\lambda)^2 - 4^2]}{y^8} + + \cdots \qquad (9.)$$

Die Ω-Funktion ist demnach eine ganze rationale Funktion von $\frac{1}{y^2}$ ganz entsprechend der durch Formel (6a.) definierten $\overset{n}{O}(y)$-Funktion, die bei den Entwicklungen nach einfachen J-Funktionen dieselbe Rolle spielt, wie die Ω-Funktion für die Entwicklungen zweiter Art. Zwecks vorteilhafterer Verwendung der Ω-Funktion bei den späteren Anwendungen, geben wir nachstehend eine allgemeine Summenformel. Der allgemeine Summand der Formel (9.) lautet:

$$\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!}\cdot\frac{(2\lambda)^2[(2\lambda)^2-2^2][(2\lambda)^2-4^2][(2\lambda)^2-6^2]\ldots[(2\lambda)^2-(2\nu-2)^2]}{y^{2\nu+2}}$$

$$=\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!}\cdot\frac{2^{2\nu}\lambda^2[\lambda^2-1^2][\lambda^2-2^2][\lambda^2-3^2]\ldots[\lambda^2-(\nu-1)^2]}{y^{2\nu+2}}$$

$$=2^{2\nu}\cdot\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!}\cdot\frac{(\lambda-\nu+1)(\lambda-\nu+2)\ldots(\lambda-1)\cdot\lambda\cdot\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+\nu-2)\cdot(\lambda+\nu-1)}{y^{2\nu+2}}$$

$$\left[\frac{1}{y^{2\nu+2}}\right]=2^{2\nu}\cdot\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!}\cdot\frac{\lambda\cdot(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}$$

woraus die allgemeine Summenformel lautet:

$$\Omega^\lambda(y)=\sum_0^{\lambda}{}_\nu\, 2^{2\nu}\cdot\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!}\cdot\frac{\lambda\cdot(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}\cdot\frac{1}{y^{2\nu+2}};\quad \Omega^0(y)=\frac{1}{y^2}\qquad(10.)$$

Daraus ergeben sich für einige Werte von λ die folgenden nummerischen Werte für die Ω-Funktion:

$$\left.\begin{aligned}
\Omega^0(y)&=\frac{1}{y^2}\\
\Omega^1(y)&=\frac{1}{y^2}+\frac{2}{y^4}\\
\Omega^2(y)&=\frac{1}{y^2}+\frac{8}{y^4}+\frac{32}{y^6}\\
\Omega^3(y)&=\frac{1}{y^2}+\frac{18}{y^4}+\frac{192}{y^6}+\frac{1152}{y^8}\\
\Omega^4(y)&=\frac{1}{y^2}+\frac{32}{y^4}+\frac{640}{y^6}+\frac{9216}{y^8}+\frac{73728}{y^{10}}\\
\Omega^5(y)&=\frac{1}{y^2}+\frac{50}{y^4}+\frac{1600}{y^6}+\frac{40320}{y^8}+\frac{737280}{y^{10}}+\frac{7372800}{y^{12}}\\
\Omega^6(y)&=\frac{1}{y^2}+\frac{72}{y^4}+\frac{3360}{y^6}+\frac{129024}{y^8}+\frac{3981312}{y^{10}}+\frac{88473600}{y^{12}}+\\
&\qquad+\frac{1061683200}{y^{14}}\\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}\right\}\quad(11.)$$

Diese gefundenen Resultate notieren wir in folgendem Satz:

Der aus irgend zwei komplexen Grössen x und y gebildete Bruch $\frac{1}{y^2 - x^2}$ kann unter Anwendung der Bessel'schen Funktionen sowie gewisser anderer Funktionen $\Omega^\lambda(y)$, die durch die Formeln (9.), (10.), (11.) definiert sind, in folgende Reihe entwickelt werden.

$$\frac{1}{y^2 - x^2} = \sum_0^\infty{}_\lambda \; \varepsilon_\lambda \, \Omega^\lambda(y) \, [\overset{\lambda}{J}(x)]^2 \tag{12.}$$

Die Entwicklung ist gültig für jedes der Bedingung $|x| < |y|$ entsprechende Wertsystem von x und y.

Um eine allgemeine Methode zur Bestimmung der Koeffizienten zu erhalten, beachte man, dass nach Formel (3.) jede gerade Funktion f(x) dargestellt werden kann durch:

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \cdot \int_{(r)} f(y) \frac{y \cdot dy}{y^2 - x^2} \tag{13.}$$

indem man in Formel (3.) x gegen y und c gegen x vertauscht. Dabei ist $|x| < r < R$ und die Integration erstreckt in positivem Sinn längs der Kreisperipherie (r). Es sei nun $|y| = r$, d. h. es sei y ein Punkt der Kreislinie (r). Dann ist $|x| < |y|$ und der in (13.) auftretende Ausdruck $\frac{1}{y^2 - x^2}$ kann nach Satz (12.) in folgende Reihe entwickelt werden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{y^2 - x^2} &= \sum_0^\infty{}_\lambda \; \varepsilon_\lambda \, \Omega^\lambda(y) \, [\overset{\lambda}{J}(x)]^2 \\ &= \sum_0^\infty{}_\lambda \; k_\lambda \, [\overset{\lambda}{J}(x)]^2 \\ \text{wo } k_\lambda &= \frac{\varepsilon_\lambda}{2i\pi} \cdot \int_{(\nu)} f(y) \, \Omega^\lambda(y) \cdot y \cdot dy \end{aligned}\right\} \tag{14.}$$

Der Integrationsweg des zur Bestimmung der Koeffizienten $k\lambda$ dienenden Integrals (14.) ist, irgendwelcher Deformationen fähig, ohne dass der Wert des Integrals sich ändert, solange die Peripherie (r) nicht mit den Randpunkten R, für welche das Verhalten der Funktion als unbekannt vorausgesetzt worden ist, noch mit dem Mittelpunkt der Kreisfläche in unmittelbare Berührung kommt.

Nun ist der Bruch $\dfrac{1}{y^2 - x^2}$ eine gerade Funktion von x. Man kann somit jede beliebige gerade Funktion f (x) nach der durch (14.) dargestellten Weise in Reihe entwickeln. Diese Resultate notieren wir in dem folgenden Satz:

„Stellt R eine reelle, endliche Konstante und f (x) eine gegebene Funktion dar, welche eindeutig, stetig und gerade ist, so lange $|x| < R$ bleibt, dann existiert jederzeit eine Entwicklung:

$$\underline{f(x) = k_0 [\overset{0}{J}(x)]^2 + k_1 [\overset{1}{J}(x)]^0 + k_2 [\overset{2}{J}(x)]^2 + k_3 [\overset{3}{J}(x)]^2 \ldots \text{ in inf.}}$$

oder (15.)

$$\underline{f(x) = \sum_0^\infty{}^{\lambda}\ k_\lambda\ [\overset{\lambda}{J}(x)]^2}, \text{ wo } \underline{k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2 i \pi} \cdot \int_{(r)} f(y) \cdot \Omega^\lambda (y) \cdot y \cdot dx}$$

welche gültig ist für jeden der Bedingung $|x| < R$ entsprechenden Wert von x. Die Integration ist zu erstrecken längs irgend einer Kreislinie (r), deren Mittelpunkt in $x = 0$ liegt und deren Radius $r < R$ ist.

Dabei ist $\underline{\varepsilon_0 = 1;\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots = \varepsilon_\lambda = \ldots = 2.}$

Analog lässt sich eine Funktion f (x) behandeln, welche eindeutig, stetig und gerade ist auf einer ringförmigen Fläche, die begrenzt ist von zwei konzentrischen um den Punkt $x = 0$ beschriebenen Kreisen (Laurent'scher Kranz). Sind $R_1 < R$ zwei reelle Konstanten und stellt f (x) eine gegebene Funktion dar, welche eindeutig, stetig und gerade ist, so lange $R_1 < |x| < R$ bleibt, dann existiert jeder Zeit eine Entwicklung von der Form:

$$f(x) = \frac{1}{2 i \pi} \cdot \int_{(R)} f(y) \frac{y \cdot dy}{y^2 - x^2} + \frac{1}{2 i \pi} \cdot \int_{(R_1)} f(y) \frac{y \cdot dy}{x^2 - y^2}$$

Für $|x| < |y|$ gilt nach obigem die konvergente Reihenentwicklung:

$$\frac{1}{y^2 - x^2} = \sum_0^{\infty} \lambda \; \varepsilon_\lambda \; \Omega^\lambda(y) \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2$$

für $|y| < |x|$ gilt analog

$$\frac{1}{x^2 - y^2} = \sum_0^{\infty} \lambda \; \varepsilon_\lambda \cdot \Omega^\lambda(x) \left[\overset{\lambda}{J}(y)\right]^2$$

Demnach lässt sich die den oben genannten Bedingungen genügende, willkürliche Funktion $f(x)$ darstellen durch:

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \cdot \int_{(R)} \left\{ \sum_0^{\infty} \lambda \; \varepsilon_\lambda \; \Omega^\lambda(y) \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \right\} f(y) \cdot y \cdot dy$$

$$+ \frac{1}{2i\pi} \cdot \int_{(R_1)} \left\{ \sum_0^{\infty} \lambda \; \varepsilon_\lambda \; \Omega^\lambda(x) \left[\overset{\lambda}{J}(y)\right]^2 \cdot f(y)\, y \cdot dy. \right.$$

$$\underline{f(x) = \sum_0^{\infty} \lambda \; \varepsilon_\lambda \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \cdot \frac{1}{2i\pi} \cdot \int_{(R)} \cdot \Omega^\lambda(y) \cdot f(y) \cdot y \cdot dy +}$$

$$\underline{+ \sum_0^{\infty} \lambda \; \varepsilon_\lambda \; \Omega^\lambda(x) \cdot \frac{1}{2i\pi} \cdot \int_{(R_1)} \left[\overset{\lambda}{J}(y)\right]^2 \cdot f(y) \cdot y \cdot dy}$$

$$\underline{f(x) = \sum_0^{\infty} \lambda \; k_\lambda \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 + \sum_0^{\infty} \lambda \cdot \mu_\lambda \; \Omega^\lambda(x)} \qquad (16.)$$

wo

$$\left. \begin{aligned} &\underline{k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2i\pi} \cdot \int_{(R)} \Omega^\lambda(y) \cdot f(y) \cdot y \cdot dy} \\ &\underline{\mu = \frac{\varepsilon_\lambda}{2i\pi} \cdot \int_{(R_1)} \left[\overset{\lambda}{J}(y)\right]^2 \cdot f(y) \cdot y \cdot dy.} \end{aligned} \right\} \qquad (16a.)$$

Die Methode, nach welcher man zu dieser allgemeinen Darstellung kommt, ist ganz analog der durch (13.) und (14.) gegebenen und zudem in hohem Masse übereinstimmend mit der von *Graf* und *Gubler*[14] gegebenen allgemeinen Herleitung einer Methode zur Entwicklung nach einfachen J-Funktionen. Ist nämlich die Funktion f(x) in einem Laurent'schen Kranz definiert, dann gilt für $R_1 < |x| < R$

$$\underline{f(x) = \frac{1}{2i\pi} \cdot \int_{(R)} f(y) \frac{dy}{y-x} + \frac{1}{2i\pi} \cdot \int_{(R_1)} f(y) \frac{dy}{x-y}}$$

Nun ist nach (6.)

$$\frac{1}{y-x} = \overset{0}{O}(y) \overset{0}{J}(x) + 2\sum_{1}^{\infty}\lambda \; \overset{\lambda}{O}(y) \overset{\lambda}{J}(x) \qquad |x| < |y|$$

$$\frac{1}{x-y} = \overset{0}{O}(x) \overset{0}{J}(y) + 2 \cdot \sum_{1}^{\infty}\lambda \; \overset{\lambda}{O}(x) \overset{\lambda}{J}(y) \qquad |y| < |x|$$

Daher ist auch den oben genannten Bedingungen genügende, willkürliche Funktion f(x) darstellbar durch:

$$\underline{f(x) = \sum_{0}^{\infty}\lambda \left\{ k_\lambda \overset{\lambda}{J}(x) + \mu_\lambda \overset{\lambda}{O}(x) \right\}}$$

wo $\underline{k_\lambda = \frac{\varepsilon\lambda}{2i\pi} \cdot \int_{(R_1)} \overset{\lambda}{O}(y) f(y) \cdot dy}$

$$\underline{\mu_\lambda = \frac{\varepsilon\lambda}{2i\pi} \cdot \int_{(R)} \overset{\lambda}{J}(y) f(y) \cdot dy}$$

woraus die vollkommene Analogie ersichtlich ist.

Man erkennt unschwer die vielfache Verwendbarkeit dieser Methode. Es sind ihr nur Grenzen gesetzt durch die mögliche oder unmögliche Lösung der Integralausdrücke, die zur Bestimmung der konstanten Koeffizienten dienen. Sie wird ferner dadurch beschränkt, dass die prinzipielle Bedingung erfüllt sein muss, d. h. dass f(x) eine gerade Funktion sein soll. Bei der entsprechenden Methode zur Entwicklung nach Neumann'schen Reihen erster Art hat man nur die erstere Beschränkung, indem die zu entwickelnden Funktionen gerade oder ungerade sein können. Es sei speziell nochmals hervorgehoben, dass diese Reihenentwicklungen für gerade Funktionen nach Quadraten, d. h. nach Produkten Bessel'scher Funktionen desselben Parameters fortschreiten. Nach einem später zu betrachtenden Postulat von *E. Lommel*[8] können auch ungerade Funktionen in Reihen entwickelt werden, die nach Quadraten von Bessel'schen Funktionen fortschreiten, deren Parameter aber gemischte Zahlen sind, während in den Formeln (15.) λ nur ganzzahlige, positive Werte annehmen kann.

Noch auf einen Punkt möchten wir aufmerksam machen, der in gewissem Widerspruch steht zu einer später zu besprechenden Forderung. Die Neumann'sche Entwicklungsmethode gibt konvergente Reihen für alle Werte von x, die der Bedingung genügen: $|x| < R$, wo R eine reelle, positive, endliche Grösse ist. In einer von Niels Nielsen gegebenen Methode, die zu genau denselben Reihenentwicklungen führt wie die Neumann'sche Methode, wird mit jeder wünschbaren Strenge bewiesen, dass die nach den Quadraten und Produkten Bessel'scher Funktionen fortschreitenden Reihen in demselben Bereich konvergent sind, wie die, die entwickelte Funktion darstellende Potenzreihe. Für die Entwicklung des trigonometrischen Cosinus hätte man demnach, da seine Potenzreihenentwicklung konvergent ist für alle Werte $-\infty < x < \infty$; $|x| < \infty$, ebenfalls eine konvergente Reihenentwicklung nach Neumann'schen Reihen II. Art für alle Werte $|x| < \infty$, was mit der Neumann'schen Forderung, dass R endlich sein soll, nicht so ohne weiteres vereinbar ist. Den Grund dieser Unstimmigkeit haben wir bis jetzt nicht ermittelt.

Im übrigen wird diese erste, von Carl Neumann gegebene Methode immer dann zu einem Resultat führen, wenn die zu entwickelnde gerade Funktion f (x) in eine Potenzreihe entwickelt werden kann. Dadurch werden die zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten k_λ dienenden Integralausdrücke leicht lösbar. Zur Anwendung und weiteren Erläuterung der Methode geben wir im folgendenden Paragraphen die Entwicklungen für einige gerade Funtionen.

§ 3. Anwendungen.

1. Aufstellung der Reihe für 1.

Nach (15.) ist dann zu setzen: $f(x) = x^0 = 1$
somit: $f(y) = y^0 = 1$

Daher hat man

$$f(x) = 1 = \sum_0^\infty {}^\lambda \; k_\lambda \; [\overset{\lambda}{J}(x)]^2, \text{ wo } k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2 i \pi} \cdot \int_{(r)} \Omega^\lambda(y) \cdot y \cdot d\,y.$$

Die Integration ist in rechtläufigem Sinn längs einer Kreisperipherie um den Nullpunkt zu erstrecken, was wir jetzt und in allen folgenden Untersuchungen durch $\int$ andeuten. Unter Benützung der in (11.) gegebenen Summenausdrücke für $\Omega^\lambda(y)$ hat man sofort:

$$k_0 = \frac{\varepsilon_0}{2 i \pi} \cdot \int \Omega^0(y) \cdot y \cdot d\,y = \frac{1}{2 i \pi} \cdot \int \frac{1}{y^2} \cdot y \cdot d\,y = 1.$$

$$k_1 = \frac{\varepsilon_1}{2 i \pi} \cdot \int \Omega^1(y) \cdot y \cdot d\,y = \frac{2}{2 i \pi} \cdot \int \cdot \left\{\frac{1}{y^2} + \frac{2}{y^4}\right\} \cdot y\,d\,y = 2.$$

$$k_2 = \frac{\varepsilon_2}{2 i \pi} \cdot \int \Omega^2(y) \cdot y \cdot d\,y = \frac{2}{2 i \pi} \cdot \int \left\{\frac{1}{y^2} + \frac{8}{y^4} + \frac{3^2}{y^6}\right\} y \cdot d\,y = 2.$$

Analog bestimmen sich $k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = \ldots\ldots = k_\lambda = \ldots\ldots = 2.$

Unter Benützung der allgemeinen Summenformel für $\Omega^\lambda(y)$ (10.) leitet sich der allgemeine Koeffizient leicht ab.

$$k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2 i \pi} \cdot \int \sum_0^\infty {}^\nu \; 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda \cdot (\lambda + \nu - 1)!}{(\lambda - \nu)!} \cdot \frac{1}{y^{2\nu+2}} \cdot y \cdot d\,y.$$

Um das Integral auszuwerten, hat man vom Integranden denjenigen Summanden zu entnehmen, der die Potenz $y^{-1} = \frac{1}{y}$ liefert. Alle andern Potenzen von y geben zu diesem Cauchy'schen Integral keinen Beitrag. Man erkennt sofort, dass man diesen Summanden erhält durch die Setzung $-2\nu - 2 + 1 = -1$; $\nu = 0$.

Dann ist der Koeffizient von $\frac{1}{y}$, also $\left[\frac{1}{y}\right] = 1.$

Diese Bestimmungen enthalten keine Beschränkung für die Laufzahl λ, welche, wie ursprünglich definiert worden ist, alle ganzzahligen positiven Werte von 0 bis ∞ durchlaufen kann. Daher werden auch alle k_λ auftreten, und sie sind allgemein bestimmt durch:

$$k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2 i \pi} \cdot \int \frac{d y}{y} = \varepsilon_\lambda = 2; \ k_0 = 1.$$

Man hat daher die Entwicklung:

$$\underline{1 = [\overset{0}{J}(x)]^2 + 2\,[\overset{1}{J}(x)]^2 + 2\,[\overset{2}{J}(x)]^2 + 2\,[\overset{3}{J}(x)]^2 + \ldots \quad \text{in inf.}}$$

$$= [\overset{0}{J}(x)]^2 + 2 \cdot \sum_{1}^{\infty}{}^{\lambda} \ [\overset{\lambda}{J}(x)]^2 \quad \text{gültig für } |x| < R. \qquad (17.)$$

2. Aufstellung der Reihen für die geraden Potenzen.

Reihe für x^2. $\qquad f(x) = x^2; \ f(y) = y^2$

$$\text{daher ist } f(x) = x^2 = \sum_{0}^{\infty}{}^{\lambda} \ k_\lambda \ [\overset{\lambda}{J}(x)]^2,$$

$$k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2 i \pi} \cdot \int \Omega^\lambda (y) \cdot y^3 \cdot d y$$

Man findet im besonderen:

$$k_0 = \frac{\varepsilon_0}{2 i \pi} \cdot \int \Omega^0 (y) \cdot y^3 \cdot d y = \frac{1}{2 i \pi} \cdot \int \frac{1}{y^2} \cdot y^3 \cdot d y = 0.$$

$$k_1 = \frac{\varepsilon_1}{2 i \pi} \cdot \int \Omega^1 (y) \cdot y^3 \cdot d y = \frac{2}{2 i \pi} \cdot \int \left\{\frac{1}{y^2} + \frac{2}{y^4}\right\} \cdot y^3 \cdot dy = 4.$$

$$k_2 = \frac{\varepsilon_2}{2 i \pi} \cdot \int \Omega^2 (y) \cdot y^3 \cdot d y = \frac{2}{2 i \pi} \cdot$$

$$\cdot \int \left\{\frac{1}{y^2} + \frac{8}{y^4} + \frac{32}{y^6}\right\} \cdot y^3 \cdot d y = 16.$$

im allgemeinen:

$$k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2 i \pi} \cdot \int \cdot \sum_{0}^{\lambda}{}^{\nu} \ 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda(\lambda+\nu-1!}{(\lambda-\nu)!} \cdot \frac{1}{y^{2\nu+2}} \cdot y^3 \cdot d y$$

die allgemeine Potenz im Integranden ist $y^{-2\nu-2+3}$. Die einzig in betracht fallende Potenz $\frac{1}{y}$ erhält man durch die Setzung $-2\nu-2+3=-1$, $\nu=1$. Es wird dann:

$$\left[\frac{1}{y}\right]=2^2\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda\cdot\lambda!}{(\lambda-1)!}=2\lambda^2, \qquad \text{woraus dann}$$

$$k_\lambda=\frac{\varepsilon_\lambda}{2i\pi}\cdot\int 2\lambda^2\frac{1}{y}\cdot dy=(2\lambda)^2.$$

In der Bestimmung des Koeffizienten von $\frac{1}{y}$ sind keinerlei Beschränkungen für die Laufzahl λ enthalten. Sie kann somit alle ganzzahligen, positiven Werte von 1 bis ∞ durchlaufen. Man hat demnach die Entwicklung:

$$x^2=4\left[\overset{1}{J}(x)\right]^2+16\left[\overset{2}{J}(x)\right]^2+36\left[\overset{3}{J}(x)\right]^2+64\left[\overset{4}{J}(x)\right]^2+\ldots \text{ in inf.}$$

$$x^2=\sum_{1}^{\infty}{}^{\lambda}\,(2\lambda)^2\cdot\left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2, \text{ gültig für } |x|<R. \tag{18.}$$

Ganz entsprechend werden die Reihen für die folgenden geraden Potenzen von x hergeleitet.

Reihe für die allgemeine gerade Potenz x^{2n}.

Man hat zu setzen $f(x)=x^{2n}$; $f(y)=y^{2n}$

$$f(x)=x^{2n}=\sum_{0}^{\infty}{}^{\lambda}\,k_\lambda\left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2$$

$$\text{wo } k_\lambda=\frac{\varepsilon_\lambda}{2i\pi}\cdot\int\Omega^\lambda(y)\cdot y^{2n+1}\cdot dy.$$

$$k_\lambda=\frac{\varepsilon_\lambda}{2i\pi}\cdot\int\sum_{0}^{\lambda}{}^{\nu}\,2^{2\nu}\cdot\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!}\cdot\frac{\lambda(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}\cdot\frac{1}{y^{2\nu+2}}\cdot y^{2n+1}\cdot dy.$$

$$=\frac{2}{2i\pi}\cdot\sum_{0}^{\lambda}{}^{\nu}\,2^{2\nu}\cdot\frac{\nu!\,\nu!\,\lambda(\lambda+\nu-1)!}{(2\nu)!\,(\lambda-\nu)!}\cdot\int y^{-2\nu-2+2n+1}\cdot dy.$$

Die Potenz y^{-1} findet man durch die Setzung $2n + 1 - 2\nu - - 2 = -1$, $\nu = n$.

Es fallen alle Koeffizienten des Integrals weg mit Ausnahme des einzigen, in welchem man $n = \nu$ setzt. Es wird daher:

$$k_\lambda = 2 \cdot 2^{2n} \cdot \frac{n!\, n!}{(2n)!} \cdot \frac{\lambda \cdot (\lambda + n - 1)!}{(\lambda - n)!}$$

Aus dieser Bestimmungsgleichung für k_λ geht hervor, dass $\lambda \geqq n$ sein muss, indem für $\lambda < n$ der Nenner unendlich gross wird, die entspr. Koeffizienten also verschwinden. Daraus ergibt sich die Entwicklung für die allgemeine Potenz x^{2n} zu:

$$x^{2n} = \frac{n!\, n!}{(2n)!} 2 \cdot \sum_n^\infty \lambda \; \frac{(2\lambda)^2 [(2\lambda)^2 - 2^2] \ldots\ldots [(2\lambda)^2 - (2n-(2)^2] \cdot [\overset{\lambda}{J}(x)]^2}{} \qquad (19.)$$

$$= \frac{n!\, n!}{(2n)!} \cdot 2^{2n+1} \cdot \sum_n^\infty \lambda \; \frac{\lambda \cdot (\lambda + n - 1)!}{(\lambda - n)!} [\overset{\lambda}{J}(x)]^2 \cdot |x| < R.$$

Nach den bei der Herleitung der Methode gemachten Voraussetzungen sollen diese Reihenentwicklungen konvergent sein für jedes der Bedingung $|x| < R$ genügende x, wenn R eine reelle, endliche Konstante bedeutet. Dass zufolge dieser Bedingung die gefundenen Reihen wirklich konvergent sind, soll gezeigt werden, dadurch, dass für alle Reihen ein bestimmter Grenzwert

$$\lim \frac{|n_{n+1}|}{|n_n|} < 1$$

existiert. Damit ist dann gleichzeitig nachgewiesen, dass die Reihen unbedingt konvergieren.

Der allgemeine Term der Formel (19.) lautet, abgesehen von dem für ein und dieselbe Potenz konstanten Faktor $2^{2n+1} \cdot \frac{n!\, n!}{(2n)!}$ folgendermassen:

$$\frac{\lambda \cdot (\lambda + n - 1)!}{(\lambda - n)!} \cdot [\overset{\lambda}{J}(x)]^2$$

Die durch die unendliche Reihe

$$\overset{n}{J}(x) = \sum_0^\infty \mu \; (-1)^\mu \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\mu}}{\mu!\; \Gamma(n+\mu+1)}$$

definierte Bessel'sche Funktion ist in dieser Darstellung absolut konvergent für jeden endlichen Wert von x. Nach einer von J. J. Schönholzer[15] gegebenen Formel bestimmt sich das Produkt zweier Bessel'scher Funktionen durch die Formel:

$$\overset{a}{J}(x) \cdot \overset{b}{J}(x) = \sum_0^\infty \mu \; (-1)^\mu \frac{\Gamma(a+b+2\mu+1)}{\Gamma(a+\mu+1)\,\Gamma(b+\mu+1)} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+b+2\mu}}{\Gamma(a+b+\mu+1)!\,\mu!} \tag{20.}$$

was wegen der absoluten Konvergenz jeder einzelnen unendlichen Reihe von $\overset{a}{J}(x)$ und $\overset{b}{J}(x)$ wieder eine absolut konvergente Entwicklung ist für jeden endlichen Wert von x. Da es sich oben um das Quadrat einer Bessel'schen Funktion handelt, wo also $a = b = \lambda$ ist, so wird die Formel zu:

$$[\overset{\lambda}{J}(x)]^2 = \sum_0^\infty \mu \; (-1)^\mu \cdot \frac{\Gamma(2\lambda+2\mu+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+1)\cdot\Gamma(\lambda+\mu+1)} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+2\mu}}{\Gamma(2\lambda+\mu+1)\cdot\mu!}$$

was unter der Annahme, dass die Laufzahl μ nur positive ganzzahlige Werte durchlaufen soll, auch geschrieben werden kann:

$$[\overset{\lambda}{J}(x)]^2 = \sum_0^\infty \mu \; (-1)^\mu \cdot \frac{(2\lambda+2\mu)!}{(\lambda+\mu)!\,(\lambda+\mu)!} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+2\mu}}{(2\lambda+\mu)!\,\mu!} \tag{20a.}$$

Sowohl in der Summenformel für $\overset{n}{J}(x)$ als auch in der Summenformel für $[\overset{\lambda}{J}(x)]^2$ ist der erste Summand; d. h. wenn

$\mu = 0$ ist, der grösste. Da man es hier und dort mit unendlichen Reihen zu tun hat, die bei wechselndem Vorzeichen monoton abnehmen, so ist offenbar der absolute Betrag des ersten Summanden grösser als der absolute Betrag der Summe aller Summanden. Wenn man daher bei den folgenden Konvergenzuntersuchungen den absoluten Betrag des ersten Summanden in Rechnung bringt, so führt man einen zu grossen Wert ein, indem eben:

$$\left|\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}}{\lambda!\,\lambda!}\right| > \left|\sum_{\lambda}^{\infty}{}^{\mu}\,(-1)^{\mu}\cdot\frac{(2\lambda+2\mu)!}{(\lambda+\mu)!\,(\lambda+\mu)!}\cdot\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+2\mu}}{(2\lambda+\mu)!\;\mu!}\right|$$

Setzt man den Wert links statt $\left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2$ in der allgemeinen Form der Formel (19.) ein, dann kommt:

$$n_\lambda < \frac{\lambda\,(\lambda+n-1)!}{(\lambda-n)!}\cdot\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}}{\lambda!\;\lambda!}$$

analog $$n_{\lambda+1} < \frac{(\lambda+1)\cdot(\lambda+n)!}{(\lambda-n+1)!}\cdot\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+2}}{(\lambda+1)!\;(\lambda+1)!}$$

Demnach: $$\frac{n_{\lambda+1}}{n_\lambda} < \frac{(\lambda+n)}{(\lambda-n+1)}\cdot\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2}}{\lambda\cdot(\lambda+1)}$$

was für gegenüber n einigermassen grosse λ zu

$$\frac{n_{\lambda+1}}{n_\lambda} < \frac{x^2}{4\cdot\lambda(\lambda+1)} < 1 \text{ für } |x| < R \qquad \text{wird.}$$

Unter der Bedingung, dass $|x| < R$, wo R eine reelle, endliche, positive Zahl sei, was unbedingt notwendig ist für die Konvergenz der die Bessel'sche Funktion definierenden unendlichen Reihe, sind die in (17.) bis (19.) hergeleiteten unendlichen Reihen unbedingt konvergent.

3. Aufstellung der Reihen für die geraden trigonometrischen Funktionen.

Reihe für cos (x).

$$f(x) = \cos(x); \; f(y) = \cos(y)$$

$$\cos(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda} \; k_\lambda \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2; \text{ wo } k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2i\pi} \cdot$$

$$\int \cos(y) \cdot \Omega^\lambda(y) \cdot y \cdot dy.$$

Das Integral lässt sich am einfachsten auswerten, wenn man für cos (y) seine Potenzreihenentwicklung einsetzt:

$$\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} - + \ldots \text{ inf.} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu} \; (-1)^\mu \; \frac{y^{2\mu}}{(2\mu)!}$$

Dann wird:

$$k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2i\pi} \cdot \int \left\{ 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} - + \ldots \right\} \Omega^\lambda(y) \cdot y \cdot dy$$

$$= \frac{\varepsilon_\lambda}{2i\pi} \cdot \int \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu} \; 2^{2\nu} \; \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda \cdot (\lambda + \nu - 1)!}{(\lambda - \nu)!} \cdot \frac{1}{y^{2\nu+2}}$$

$$\cdot \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu} \; (-1)^\mu \cdot \frac{y^{2\mu}}{(2\mu)!} \cdot y \cdot dy.$$

Man erhält im einzelnen:

$$k_0 = \frac{\varepsilon_0}{2i\pi} \cdot \int \Omega^0(y) \left\{ 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + - \ldots \right\} \cdot y \cdot dy = 1$$

$$k_1 = \frac{\varepsilon_1}{2i\pi} \cdot \int \Omega^1(y) \left\{ 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + - \ldots \right\} y \, dy = 0$$

$$k_2 = \frac{2}{2i\pi} \cdot \int \Omega^2(y) \cdot \left\{ 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + - \ldots \right\} y \cdot dy = -\frac{10}{3}$$

$$k_3 = \frac{2}{2i\pi} \cdot \int \Omega^3(y) \left\{ 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} - + \ldots \right\} y \cdot dy$$

$$= -\frac{48}{1 \cdot 3 \cdot 5}$$

im allgemeinen:

$$k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2\,i\,\pi} \cdot \int \Omega^\lambda(y) \cos y \cdot y \cdot d\,y$$

$$= \frac{2}{2\,i\,\pi} \cdot \int \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu} \; 2^{2\nu} \, \frac{\nu!\,\nu!}{(2\,\nu)!} \cdot \frac{\lambda(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot \frac{1}{y^{2\nu+2}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu} \; (-1)^\mu \, \frac{y^{2\mu}}{(2\,\mu)!} \cdot y \cdot d\,y$$

Die allgemeine Potenz im Integranden ist $y^{2\mu+1-2\nu-2}$. Von allen Gliedern geben nur die einen Beitrag zum Integral, die die Potenz y^{-1} enthalten. Man erhält diese Potenz durch die Setzung $2\,\mu + 1 - 2\,\nu - 2 = -1$; $\mu = \nu$.

Dann wird $\left[\frac{1}{y}\right] = (-1)^\nu \cdot 2^{2\nu} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\,\nu)!\,(2\,\nu)!} \cdot \frac{\lambda\cdot(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}$

und daher auch

$$k_\lambda = \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu} \; (-1)^\nu \cdot 2^{2\nu+1} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\,\nu)!\,(2\,\nu)!} \cdot \frac{\lambda\cdot(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}; \; k_0 = 1.$$

Demnach lautet die Entwicklung für cos (x):

$$\underline{\cos(x) = \left[\overset{0}{J}(x)\right]^2 + \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} \; 2\,\lambda \cdot \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \cdot \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu} \; (-1)^\nu \cdot 2^{2\nu} \cdot}$$

$$\underline{\cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\,\nu)!\,(2\,\nu)!} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \qquad |x| < R.}$$

oder

$$\underline{\cos(x) = \left[\overset{0}{J}(x)\right]^2 + 2 \cdot \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} \; k_\lambda \cdot \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2} \qquad (21.)$$

$$\underline{k_\lambda = \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu} \; (-1)^\nu 2^{2\nu} \, \frac{\nu!\,\nu!}{(2\,\nu)!\,(2\,\nu)!} \cdot \frac{\lambda\cdot(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}}$$

Nach Ausmittelung einiger numerischer Werte für k_λ erhält man:

$$\cos(x) = [\overset{0}{J}(x)]^2 - \frac{10}{1\cdot 3}\cdot[\overset{2}{J}(x)]^2 - \frac{48}{1\cdot 3\cdot 5}\cdot[\overset{3}{J}(x)]^2 +$$

$$+ \frac{146}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\cdot[\overset{4}{J}(x)]^2 + \frac{5520}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}[\overset{5}{J}(x)]^2 \ldots\ldots$$

Die Reihe zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten k_λ ist eine endliche, von selbst abbrechende Reihe mit alternierendem Vorzeichen. Die einzelnen Summanden werden mit zunehmenden Werten der Laufzahl ν grösser, um bei einem bestimmten Werte ν ein Maximum zu erreichen und nachher wieder abzunehmen. Wir behaupten, dass bei geraden λ der Summand der grösste wird, für den man ν ersetzt durch $\frac{\lambda}{2}$; bei ungeraden λ jedoch der, in welchem man ν ersetzt durch $\frac{\lambda-1}{2}$. Dabei soll es sich jedesmal nur um den absoluten Wert handeln.

Wir betrachten den ersten Fall: λ gerade; $\lambda = 2\,n$, wo $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$ Der allgemeine, absolut genommene Term der Summenformel für k_λ lautet:

$$2^{2\nu}\cdot\frac{\nu!\;\nu!}{(2\nu)!\;(2\nu)!}\cdot\frac{\lambda\cdot(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}$$

Setze $\nu = \frac{\lambda}{2}$:

$$2^{\lambda}\,\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)!\left(\frac{\lambda}{2}\right)!}{\left(2\frac{\lambda}{2}\right)!\left(2\frac{\lambda}{2}\right)!}\cdot\frac{\lambda\cdot\left\{\lambda+\frac{\lambda}{2}-1\right\}!}{\left\{\lambda-\frac{\lambda}{2}\right\}!}$$

Setze $\lambda = 2\,n$:

$$2^{2n}\,\frac{n!\;n!}{(2n)!\;(2n)!}\cdot\frac{2n\cdot(3n-1)!}{n!} = 2^{2n}\cdot\frac{n!}{(2n)!\;(2n)!}\,2n\cdot(3n-1)! \quad \text{(A.)}$$

Den unmittelbar vorausgehenden Term erhält man durch die Setzung

$$\nu = \frac{\lambda}{2} - 1 = \frac{\lambda - 2}{2}$$

dann kommt

$$2^{\lambda - 2} \frac{\left(\frac{\lambda - 2}{2}\right)! \left(\frac{\lambda - 2}{2}\right)!}{(\lambda - 2)!\ (\lambda - 2)!} \quad \frac{\lambda \cdot \left\{\lambda + \frac{\lambda - 2}{2} - 1\right\}!}{\left\{\lambda - \frac{\lambda - 2}{2}\right\}!}$$

Setze $\lambda = 2\,n$

$$2^{2n-2} \frac{(n-1)!\ (n-1)!}{(2\,n-2)!\ (2\,n-2)!} \cdot \frac{2\,n \cdot (3\,n-2)!}{(n+1)!} \qquad \text{(B.)}$$

Den unmittelbar nachfolgenden Summand erhält man durch die Setzung:

$$\nu = \frac{\lambda}{2} + 1 = \frac{\lambda + 2}{2}$$

dann wird

$$2^{\lambda + 2} \frac{\left(\frac{\lambda + 2}{2}\right)! \left(\frac{\lambda + 2}{2}\right)!}{(\lambda + 2)!\ (\lambda + 2)!} \cdot \frac{\lambda \cdot \left\{\lambda + \frac{\lambda + 2}{2} - 1\right\}!}{\left\{\lambda - \frac{\lambda + 2}{2}\right\}!}$$

Setze $\lambda = 2\,n$

$$2^{2n+2} \frac{(n+1)!\ (n+1)!}{(2\,n+2)!\ (2\,n+2)!} \cdot \frac{2\,n \cdot (3\,n)!}{(n-1)!} \qquad \text{(C.)}$$

Der Quotient aus (C.) und (A.) wird, wenn man für $2\,n$ wieder λ setzt, zu:

$$\frac{(C)}{(A)} = \frac{3 \cdot \lambda^2}{4 \cdot (\lambda + 1)^2}$$

was für alle Werte von λ kleiner als eins ist; daher ist $|A| > |C|$.

Der Quotient aus (B) und (A) wird, wenn man für $2\,n$ wieder λ setzt:

$$\frac{(B)}{(A)} = \frac{4\,(\lambda - 1)\,(\lambda - 1)}{(\lambda + 2)\,(3\,\lambda - 2)}; \text{ d.h. } |A| > |B|.$$

Es ist nun interessant, dass diese letztere Ungleichung von der Grösse der Laufzahl λ abhängig ist, während die Bedingungsgleichung für die Ungleichung $|A| > |C|$ für jedes λ gilt. Mit andern Worten:

Welches auch der Wert von λ sei, unter allen Umständen sind in der Summenformel für k_λ alle Summanden, deren Laufzahl $\nu > \frac{\lambda}{2}$ ist, kleiner als der Summand, für den $\nu = \frac{\lambda}{2}$ ist.

Was die zweite Ungleichung $|A| > |B|$ anbetrifft, so kann man sich leicht überzeugen, dass der Quotient $\frac{B}{A}$ nur bis und mit $\lambda = 10$ kleiner als eins ist. Für $\lambda = 10$ erhält man:

$$\frac{(B)}{(A)} = \frac{4 \cdot 9 \cdot 9}{12 \cdot 28} = \frac{27}{28} < 1; \ |A| > |B|.$$

Für $\lambda = 12$

$$\frac{(B)}{(A)} = \frac{4 \cdot 11 \cdot 11}{14 \cdot 34} = \frac{121}{119} > 1; \ |B| > |A|.$$

d. h. bis zur Laufzahl $\lambda = 10$ wachsen die Glieder der Summe bis zum Glied mit der Laufzahl $\nu = \frac{\lambda}{2}$, welches Glied grösser ist als alle vorhergehenden und grösser ist als alle nachfolgenden. Für $\lambda > 10$ ist nicht mehr das Glied, für welches $\nu = \frac{\lambda}{2}$ ist, das grösste. Wir setzen jetzt $\nu = \frac{\lambda}{2} - 2 = \frac{\lambda - 4}{2}$; dann wird der allgemeine, absolut genommene Term:

$$2^{2n-4} \frac{(n-2)! \, (n-2)!}{(2n-4)! \, (2n-4)!} \cdot \frac{2n \cdot (3n-3)!}{(n+2)!} \tag{B_1}$$

Bildet man den Quotienten aus (B) und (B_1), dann kommt

$$\frac{(B_1)}{(B)} = \frac{4(\lambda-3)(\lambda-3)}{(\lambda+4)(3\lambda-4)}$$

Für alle Werte von λ ist das Glied B_1, für welches $\nu = \frac{\lambda - 4}{2}$ ist, kleiner als das unmittelbar nachfolgende Glied B, für welches

$\nu = \frac{\lambda - 2}{2}$ ist. Diese Ungleichung $|B| > |B_1|$ geht bis zu $\lambda = 30$; man erhält für:

$$\lambda = 30: \frac{(B_1)}{(B)} = \frac{4 \cdot 27 \cdot 27}{34 \cdot 86} = \frac{729}{731} < 1;\ |B| > |B_1|$$

$$\text{für } \lambda = 32: \frac{(B_1)}{(B)} = \frac{4 \cdot 29 \cdot 29}{36 \cdot 92} = \frac{841}{828} > 1\ |B_1| > |B|$$

d. h. bis zu der Laufzahl $\lambda = 30$ ist in der Summenformel für k_λ das Glied, für welches $\nu = \frac{\lambda - 2}{2}$ ist, grösser als alle vorangehenden Glieder, und was aus dem obigen folgt, grösser als alle nachfolgenden Glieder für $12 \overline{\leqq} 2n \overline{\leqq} 30$, wo statt λ $2n$ gesetzt ist.

Für $\lambda > 30$ trifft dies nicht mehr zu.

Wir setzen $\nu = \frac{\lambda - 4}{2} - 1 = \frac{\lambda - 6}{2}$, dann wird der allgemeine, absolut genommene Term:

$$2^{2n-6} \cdot \frac{(n-3)!\,(n-3)!}{(2n-6)!\,(2n-6)!} \cdot \frac{2n \cdot (3n-4)!}{(n+3)!} \qquad (B_2)$$

Der Quotient aus (B_2) und (B_1) wird dann, wenn $n = \frac{\lambda}{2}$ gesetzt wird:

$$\frac{(B_2)}{(B_1)} = \frac{4 \cdot (\lambda - 5) \cdot (\lambda - 5)}{(\lambda + 6) \cdot (3\lambda - 6)}$$

Für alle Werte von λ ist das Glied B_2, für welches $\nu = \frac{\lambda - 6}{2}$ ist, kleiner als das unmittelbar nachfolgende Glied B_1, für welches $\nu = \frac{\lambda - 4}{2}$ ist. Diese Ungleichung geht bis zu $\lambda = 50$; man erhält für:

$$\lambda = 50: \frac{(B_2)}{(B_1)} = \frac{4 \cdot 45 \cdot 45}{56 \cdot 144} = \frac{135}{256} < 1;\ \text{d. h. } |B_1| > |B_2|$$

$$\text{für } \lambda = 52: \frac{(B_2)}{(B_1)} = \frac{4 \cdot 47 \cdot 47}{58 \cdot 150} = \frac{2209}{2175} > 1;\ \text{d. h. } |B_2| > |B_1|$$

d. h. in der Summenformel für k_λ ist das Glied, für welches

$\nu = \frac{\lambda - 4}{2}$ gesetzt wird, bis zur Laufzahl $\lambda = 50$ grösser als alle vorangehenden Glieder, und für alle Werte von $\lambda = 2\,n$, für die $32 \lesseqgtr 2\,n \lesseqgtr 50$ ist, ist dieses Glied gleichzeitig grösser als alle nachfolgenden.

Wir setzen $\nu = \frac{\lambda - 6}{2} - 1 = \frac{\lambda - 8}{2}$. Der allgemeine, absolut genommene Term wird dann:

$$2^{2n-8} \frac{(n-4)!\,(n-4)!}{(2n-8)!\,(2n-8)!} \cdot \frac{2\,n \cdot (3\,n-5)!}{(n+4)!} \qquad (B_3)$$

Der Quotient aus dem Gliede B_3 und dem unmittelbar nachfolgenden B_2 wird dann, wenn statt n wieder $\frac{\lambda}{2}$ gesetzt wird:

$$\frac{(B_3)}{(B_2)} = \frac{4 \cdot (\lambda - 7)\,(\lambda - 7)}{(\lambda + 8)\,(3\,\lambda - 8)}$$

Für alle Werte von λ ist das Glied B_3, für welches $\nu = \frac{\lambda - 8}{2}$ ist, kleiner als das unmittelbar nachfolgende Glied B_2, für welches $\nu = \frac{\lambda - 6}{2}$ ist. Diese Ungleichheit besteht bis zu $\lambda = 68$; man erhält für:

$$\lambda = 68: \frac{(B_3)}{(B_2)} = \frac{4 \cdot 61 \cdot 61}{76 \cdot 196} = \frac{3721}{3724} < 1; \; |B_2| > |B_3|$$

$$\lambda = 70: \frac{(B_2)}{(B_3)} = \frac{4 \cdot 63 \cdot 63}{78 \cdot 202} = \frac{3969}{3939} > 1; \; |B_3| > |B_2|$$

d. h. in der Summenformel für k_λ ist das Glied, für welches $\nu = \frac{\lambda - 6}{2}$ gesetzt wird, bis zur Laufzahl $\lambda = 68$ grösser als alle vorangehenden Glieder, und gleichzeitig für alle Werte von $\lambda = 2\,n$, für die $52 \lesseqgtr 2\,n \lesseqgtr 68$ ist, ist dieses Glied grösser als alle nachfolgenden.

Das nächste Intervall geht von $70 \lesseqgtr 2\,n \lesseqgtr 86$.
das folgende $88 \lesseqgtr 2\,n \lesseqgtr 102$.
u. s. w. $104 \lesseqgtr 2\,n \lesseqgtr 118$.

Wir betrachten nunmehr den zweiten Fall: λ ungerade, $\lambda = 2n + 1$, $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$ Der allgemeine, absolut genommene Term der Summenformel für k_λ wird dann; wenn man wie angegeben ν ersetzt durch $\frac{\lambda - 1}{2}$ zu:

$$2^{\lambda - 1} \frac{\left(\frac{\lambda - 1}{2}\right)! \left(\frac{\lambda - 1}{2}\right)!}{(\lambda - 1)!\,(\lambda - 1)!} \cdot \frac{\lambda \cdot \left\{\lambda + \frac{\lambda - 1}{2} - 1\right\}!}{\left\{\lambda - \frac{\lambda - 1}{2}\right\}!}$$

Setze $\lambda = 2n + 1$:

$$2^{2n} \cdot \frac{n!\, n!}{(2n)!\,(2n)!} \cdot \frac{(2n + 1) \cdot (3n)!}{(n + 1)!} \tag{Q^1}$$

Das unmittelbar vorausgehende Glied der Reihe erhält man, wenn man $\nu = \frac{\lambda - 1}{2} - 1 = \frac{\lambda - 3}{2}$ setzt. Dann wird der absolut genommene Term:

$$2^{\lambda - 3} \frac{\left(\frac{\lambda - 3}{2}\right)! \left(\frac{\lambda - 3}{2}\right)!}{(\lambda - 3)!\,(\lambda - 3)!} \cdot \frac{\lambda \cdot \left\{\lambda + \frac{\lambda - 3}{2} - 1\right\}!}{\left\{\lambda - \frac{\lambda - 3}{2}\right\}!}$$

Setze $\lambda = 2n + 1$:

$$2^{2n - 2} \frac{(n - 1)!\,(n - 1)!}{(2n - 2)!\,(2n - 2)!} \cdot \frac{(2n + 1) \cdot (3n - 1)!}{(n + 2)!} \tag{B^1}$$

Das unmittelbar nachfolgende Glied der Reihe erhält man durch die Setzung $\nu = \frac{\lambda - 1}{2} + 1 = \frac{\lambda - 1}{2}$; dann wird dieser Term:

$$2^{\lambda + 1} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda + 1}{2}\right)! \left(\frac{\lambda + 1}{2}\right)!}{(\lambda + 1)!\,(\lambda + 1)!} \cdot \frac{\lambda \cdot \left\{\lambda + \frac{\lambda + 1}{2} - 1\right\}!}{\left\{\lambda - \frac{\lambda + 1}{2}\right\}!}$$

Setze $\lambda = 2n + 1$:

$$2^{2n+2} \frac{(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)!\,(2n+2)!} \cdot \frac{(2n+1)\cdot(3n+1)!}{n!} \qquad (C^1)$$

Man bildet den Quotienten:

$$\frac{(C^1)}{(A^1)} = \frac{(\lambda+1)\cdot(3\lambda-1)}{4\lambda^2}$$

Dieser Quotient ist für alle Werte von $\lambda = 2n + 1$, wo $n = 0, 1, 2, 3 \ldots.$ kleiner als eins, mit Ausnahme für $\lambda = 1$, $n = 0$, wo er zu eins wird. Mit andern Worten:

Für alle Werte von $\lambda = 2n + 1$ ist in der Summenformel für k_λ das Glied, in welchem ν ersetzt ist durch $\frac{\lambda+1}{2}$, kleiner als alle vorangehenden. Man bildet nunmehr den Quotienten:

$$\frac{(B^1)}{(A^1)} = \frac{4(\lambda-2)(\lambda-2)}{(\lambda+3)\cdot 3(\lambda-1)}$$

Der Quotient ist für alle $\lambda = 2n + 1$ kleiner als eins bis zu $\lambda = 19$; man erhält für $\lambda = 19$:

$$\frac{(B^1)}{(A^1)} = \frac{4 \cdot 17 \cdot 17}{22 \cdot 54} = \frac{289}{297} < 1; \; |A^1| > |B^1|$$

für $\lambda = 21$:

$$\frac{(B^1)}{(A^1)} = \frac{4 \cdot 19 \cdot 19}{24 \cdot 60} = \frac{361}{360} > 1; \; |B^1| > |A^1|$$

d. h. für alle ungeraden Zahlen $3 \gtreqless 2n + 1 \gtreqless 19$, ist das Glied in der Summenformel für k_λ, in welchen ν ersetzt ist durch $\frac{\lambda-1}{2}$, grösser als alle vorangehenden und, wie oben gezeigt wurde, gleichzeitig grösser als alle nachfolgenden. Für $\lambda = 2n + 1 > 19$ gilt dies nicht mehr.

Wir setzen $\nu = \frac{\lambda-3}{2} - 1 = \frac{\lambda-5}{2}$; dann wird der allgemeine Term absolut genommen:

$$2^{\lambda-5} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda-5}{2}\right)!\left(\frac{\lambda-5}{2}\right)!}{(\lambda-5)!\,(\lambda-5)!} \cdot \frac{\lambda \cdot \left\{\lambda + \frac{\lambda-5}{2} - 1\right\}!}{\left\{\lambda - \frac{\lambda-5}{2}\right\}!}$$

setze für $\lambda = 2n + 1$:

$$2^{2n-4} \cdot \frac{(n-2)!\,(n-2)!}{(2n-4)!\,(2n-4)!} \cdot \frac{(2n+1)\cdot\{3n-2\}!}{(n+3)!} \qquad (B_1^1)$$

Man bilde den Quotienten:

$$\frac{(B_1^1)}{(B^1)} \cdot \frac{4\cdot(\lambda-4)(\lambda-4)}{(\lambda+5)\cdot(3\lambda-5)}$$

Für $\lambda = 39$ erhält man:

$$\frac{(B_1^1)}{(B^1)} = \frac{4\cdot 35\cdot 35}{44\cdot 112} = \frac{175}{176} < 1;\ |B^1| > |B_1^1|$$

Für $\lambda = 41$ erhält man:

$$\frac{(B_1^1)}{(B^1)} = \frac{4\cdot 37\cdot 37}{46\cdot 118} = \frac{1369}{1357} > 1;\ |B_1^1| > |B^1|$$

d. h. für alle Werte von $\lambda = 2n + 1$, $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$, ist das Glied, in welchem die Laufzahl ν ersetzt ist durch $\nu = \frac{\lambda - 3}{2}$, grösser als alle vorangehenden und alle nachfolgenden Glieder, wenn λ, resp. n im Intervall $21 \gtreqless 2n + 1 \gtreqless 39$ liegt.

Das folgende Intervall wird: $41 \gtreqless 2n + 1 \gtreqless 57$.

Das folgende Intervall wird $59 \gtreqless 2n + 1 \gtreqless 77$.

das nächste wird $79 \gtreqless 2n + 1 \gtreqless 95$.

u. s. w.

Die gefundenen Resultate sollen kurz zusammengestellt werden.

1. λ gerade, $\lambda = 2n$.

Für $0 \gtreqless 2n \gtreqless 10$ ist das Glied mit $\nu = \frac{\lambda}{2}$ das grösste

„ $12 \gtreqless 2n \gtreqless 30$ „ „ „ „ $\nu = \frac{\lambda - 2}{2}$ „ „

„ $32 \gtreqless 2n \gtreqless 50$ „ „ „ „ $\nu = \frac{\lambda - 4}{2}$ „ „

„ $52 \gtreqless 2n \gtreqless 68$ „ „ „ „ $\nu = \frac{\lambda - 6}{2}$ „ „

Für $70 \leqq 2\,n \leqq 86$ ist das Glied mit $\nu = \frac{\lambda - 8}{2}$ das grösste

„ $88 \leqq 2\,n \leqq 102$ „ „ „ „ $\nu = \frac{\lambda - 10}{2}$ „ „

„ $104 \leqq 2\,n \leqq 118$ „ „ „ „ $\nu = \frac{\lambda - 12}{2}$ „ „

2. λ ungerade, $\lambda = 2\,n + 1$.

Für $3 \leqq 2n + 1 \leqq 19$ ist das Glied mit $\nu = \frac{\lambda - 1}{2}$ das grösste

„ $21 \leqq 2n + 1 \leqq 39$ „ „ „ „ $\nu = \frac{\lambda - 3}{2}$ „ „

„ $41 \leqq 2n + 1 \leqq 57$ „ „ „ „ $\nu = \frac{\lambda - 5}{2}$ „ „

„ $59 \leqq 2n + 1 \leqq 77$ „ „ „ „ $\nu = \frac{\lambda - 7}{2}$ „ „

„ $79 \leqq 2n + 1 \leqq 95$ „ „ „ „ $\nu = \frac{\lambda - 9}{2}$ „ „

„ $97 \leqq 2n + 1 \leqq 115$ „ „ „ „ $\nu = \frac{\lambda - 11}{2}$ „ „

„ $117 \leqq 2n + 1 \leqq 133$ „ „ „ „ $\nu = \frac{\lambda - 13}{2}$ „ „

Die Anzahl der Werte, die λ in den verschiedenen Intervallen annehmen kann, sind für

gerade λ resp. 5, 10, 10, 9, 9, 8, 8, 6, 6

ungerade λ resp. 9, 10, 9, 10, 9, 10, 9, 10, 9.

Für die geraden λ hat man nicht die periodische Regelmässigkeit, wie für die ungeraden λ, indem erstere in der Folge wieder viel grössere Intervalle zeigen.

Wenn man nun zur Untersuchung der Konvergenz der Reihe (21.) zurückkehrt, denn zu diesem Zwecke ist die Summenformel für k_λ etwas genauer betrachtet worden, so fragt es sich, welchen Wert man in der Formel:

$$k_\lambda = \sum_0^\lambda {}^\nu \, (-1)^\nu \cdot 2^{2\nu} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\,\nu)!\,(2\,\nu)!} \cdot \frac{\lambda \cdot (\lambda + \nu - 1)!}{(\lambda - \nu)!}$$

dem ν erteilen muss, um in der Konvergenzbetrachtung der Reihe:

$$\cos(x) = [\overset{0}{J}(x)]^2 + 2 \cdot \sum_{1}^{\infty} \lambda \; k_\lambda \; [\overset{\lambda}{J}(x)]^2$$

keinen zu kleinen Wert einzuführen. Unserer Ansicht nach kann hier nicht genau gesagt werden, für einen unendlich grossen Wert von λ habe man, um in k_λ das grösste Glied herauszunehmen, für ν den oder jenen Wert einzusetzen, sondern es kann sich nur um eine angenäherte Schätzung für sehr grosse Werte von λ handeln. Man kommt mit der Setzung für gerade λ: $\nu = \frac{\lambda - 1000}{2}$, für ungerade λ: $\nu = \frac{\lambda - 1001}{2}$ jeden Fall schon zu sehr grossen Werten der Laufzahl λ. Im ersteren Fall wird dann der allgemeine Term von k_λ zu:

$$(-1)^{\frac{\lambda - 1000}{2}} \cdot 2^{\lambda - 1000} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda - 1000}{2}\right)! \left(\frac{\lambda - 1000}{2}\right)!}{(\lambda - 1000)! \; (\lambda - 1000)!} \cdot$$

$$\cdot \frac{\lambda \cdot \left\{\lambda + \frac{\lambda - 1000}{2} - 1\right\}!}{\left\{\lambda - \frac{\lambda - 1000}{2}\right\}!}$$

Setze für $\lambda = 2\,n$, so wird, da

$$(-1)^{n - 500} = (-1)^n$$

$$(-1)^n \cdot 2^{2n - 1000} \frac{(n - 500)! \; (n - 500)!}{(2n - 1000)! \, (2n - 1000)!} \cdot \frac{2\,n \cdot (3\,n - 501!}{(n + 500)!}$$

Dieser Wert ist für das sehr grosse gerade λ der grösste von allen Summanden der Summenformel für k_λ. Da diese wechselndes Vorzeichen hat, ist der obige Wert absolut genommen gleichzeitig grösser als der absolute Wert der ganzen Summe. Für diesen sehr grossen Wert $\lambda = 2\,n$ wird dann der zugehörige grösste Wert des Quadrates der J-Funktion, also von

$$[\overset{\lambda}{J}(x)]^2, \text{ zu: } \left| \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\lambda}{\lambda! \; \lambda!} \right| = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(2\,n)! \; (2\,n)!}$$

Das Produkt $k_\lambda \cdot [\overset{\lambda}{J}(x)]^2$ für $\lambda = 2n$ wird dann:

$$\left| k_\lambda \cdot [\overset{\lambda}{J}(x)]^2 \right| = \left| k_{2n} \cdot [\overset{2n}{J}(x)]^2 \right| <$$

$$< \left| 2^{2n-1000} \cdot \frac{(n-500)!\,(n-500)!}{(2n-1000)!\,(2n-1000)!} \cdot \frac{2n \cdot (3n-501)!}{(n+500)!} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(2n)!\,(2n)!} \right|$$

Analog wird für ungerades λ: $\lambda = 2n+1$:

$$\left| k_{\lambda+1} \cdot [\overset{\lambda+1}{J}(x)]^2 \right| = \left| k_{2n+1} [\overset{2n+1}{J}(x)]^2 \right| <$$

$$< \left| 2^{2n-1000} \cdot \frac{(n-500)!\,(n-500)!}{(2n-1000)!\,(2n-1000)!} \cdot \frac{(2n+1) \cdot (3n-500)!}{(n+500)!} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)!} \right|$$

Der Quotient wird dann:

$$\frac{\left| k_{\lambda+1} \cdot [\overset{\lambda+1}{J}(x)]^2 \right|}{\left| k_\lambda \cdot [\overset{\lambda}{J}(x)]^2 \right|} < \frac{(3n-500)\left(\frac{x}{2}\right)}{(n+501)\,(2n+1) \cdot 2n} = \frac{(3\lambda - 1003) \cdot x}{2\lambda \cdot (\lambda+1) \cdot (\lambda+1002)}$$

Für $\lambda = 400$ erhält man annähernd einen Quotienten von $1:2.10^6$. Da die absoluten Werte untersucht worden sind, so ist die Reihe:

$$\cos(x) = [\overset{0}{J}(x)]^2 + 2 \cdot \sum_{1}^{\infty}{}_\lambda \; k_\lambda \cdot [\overset{\lambda}{J}(x)]^2$$

wo $$k_\lambda = \sum_{0}^{\infty}{}_\nu \; (-1)^\nu \cdot 2^{2\nu} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda \cdot (\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}$$

auf Grund dieser angenäherten Schätzung absolut konvergent für alle endlichen Werte von x.

Im Anschluss an diese Beweisführung möchten wir nicht unterlassen zuzugeben, dass sie weit entfernt davon ist, einen streng gültigen Beweis zu erbringen und rein empirischen Charakters ist. Da wir bis jetzt nicht Mittel und Wege gefunden haben, einen solchen zu leisten, behalten wir uns vor, darauf zurückzukommen.

Reihe für den hyperpolischen Cosinus. $\mathfrak{cos}\,(x)$.

$$f(x) = \mathfrak{cos}\,(x);\; f(y) = \mathfrak{cos}\,(y)$$

$$\mathfrak{cos}\,(x) = \sum_0^\infty{}_\lambda\; k_\lambda\,.\,[\overset{\lambda}{J}(x)]^2,\ \text{wo } k_\lambda =$$

$$= \frac{\varepsilon_\lambda}{2\,i\,\pi} \cdot \int \Omega^\lambda(y) \cdot \mathfrak{cos}\,(y) \cdot y \cdot d\,y.$$

Bekanntlich ist der hyperbolische Cosinus definiert durch:

$$\mathfrak{cos}\,(y) = \frac{1}{2}\,(e^y + e^{-y}) = \sum_0^\infty{}_\mu \frac{y^{2\mu}}{(2\,\mu)\,!}$$

Die Koefizienten bestimmen sich ganz analog wie beim trigonometrischen Cosinus, so dass wir uns auf die Bestimmung des allgemeinen Koefizienten k_λ beschränken können.

$$k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2\,i\,\pi} \cdot \int \Omega^\lambda(y)\,\mathfrak{cos}\,(y) \cdot y \cdot d\,y$$

$$= \frac{2}{2\,i\,\pi} \cdot \int \sum_0^\lambda{}_\nu\; 2^{2\nu} \cdot \frac{\nu\,!\;\nu\,!}{(2\,\nu);} \cdot \frac{\lambda\,(\lambda + \nu - 1)\,!}{(\lambda - \nu)\,!}\,\frac{1}{y^{2\nu+2}}$$

$$\cdot \sum_0^\infty{}_\mu \frac{y^2}{(2\,\mu)\,!} \cdot y \cdot d\,y$$

Mit Ausnahme des hier fehlenden Faktors (-1) hat man genau den obigen Fall, daher wird:

$$k_\lambda = 2\,\lambda \cdot \sum_0^\lambda{}_\nu\; 2^{2\nu} \cdot \frac{\nu\,!\;\nu\,!}{(2\,\nu)\,!\;(2\,\nu)\,!} \cdot \frac{(\lambda + \nu - 1)\,!}{(\lambda - \nu)\,!};\ k_0 = 1.$$

Man erhält dann die Reihe:

$$\mathfrak{cof}(x) = [\overset{0}{J}(x)]^2 + \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\; k_{\lambda} \cdot [\overset{\lambda}{J}(x)]^2 \qquad |x| < R.$$

$$= [\overset{0}{J}(x)]^2 + \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\; 2\lambda \cdot [\overset{\lambda}{J}(x)]^2 \cdot \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu}\; 2^{2\nu} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \qquad (22.)$$

$$\mathfrak{cof}(x) = [\overset{0}{J}(x)]^2 + 3\,[\overset{1}{J}(x)]^2 + \frac{38}{1\cdot 3}\cdot[\overset{2}{J}(x)]^2 + \frac{588}{1\cdot 3\cdot 5}\cdot[\overset{3}{J}(x)]^2 + \frac{6121}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\,[\overset{4}{J}(x)]^2 + \ldots \text{ inf.}$$

Die Konvergenz der Reihe lässt sich ähnlich wie oben nachweisen.

Damit sind die geraden Funktionen, die in Potenzreihe entwickelt werden können erschöpft, und man betrachtet im folgenden eine neue Methode zur Entwicklung von ungeraden Funktionen.

II. Abschnitt.

§ 1. Zweite Methode von Carl Neumann.

In derselben Abhandlung gibt Carl Neumann [16]) eine Methode zur Entwicklung ungerader Funktionen in Reihen, die nach Produkten von Bessel'schen Funktionen fortschreiten. Er beweist daselbst eingangs den Satz:

„Ebenso wie die Entwicklung

$$\frac{1}{y^2 - x^2} = \sum_0^{\infty}{}^{\lambda} \varepsilon_\lambda \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \Omega^\lambda(y) \tag{23.}$$

gültig ist für jedes beliebige, der Bedingung $|x| < |y|$ entsprechende Wertsystem von x und y; ebenso gilt gleiches auch von allen denjenigen Entwicklungen, die aus dieser hervorgehen durch (beliebig oft wiederholtes) Differenzieren nach x und y.

Daraus folgt, dass die in (15.) erhaltenen Entwicklungen ohne Beeinträchtigung ihres Gültigkeitsgebietes beliebig oft nach x differentiert werden können. Setzt man abkürzend

$$\left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 = Q^\lambda; \quad \Omega^\lambda(x) = \Omega^\lambda$$

dann lässt sich die Entwicklung (23.) folgendermassen darstellen

$$\frac{1}{y^2 - x^2} = Q^0\,\Omega^0 + 2\,Q^1\,\Omega^1 + 2\,Q^2\,\Omega^2 + 2\,Q^3\,\Omega^3 + \\ + 2\,Q^4\,\Omega^4 + + \ldots \text{ inf.} \tag{24.}$$

Durch Differentiation nach x erhält man:

$$\frac{2}{(y^2 - x^2)^2} = \frac{\Omega^0}{x} \cdot \frac{d\,Q^0}{d\,x} + \frac{2\,\Omega^1}{x} \cdot \frac{d\,Q^1}{x} + \frac{2\,\Omega^2}{x} \cdot \frac{d\,Q^2}{d\,x} +$$

$$+\frac{2\ \Omega^3}{x}\cdot\frac{d\,Q^3}{d\,x}+ + \ldots \text{inf.} \tag{25.}$$

Nun ist

$$Q^\lambda=[\overset{\lambda}{J}(x)]^2;\ \frac{d\,Q^\lambda}{d\,x}=\frac{x}{2\,\lambda}\{Q^{\lambda-1}-Q^{\lambda+1}\}$$

ferner

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\,Q^0}{d\,x}=x\Big\{&-Q^0+\frac{2}{1\cdot 3}\cdot Q^2+\frac{2}{3\cdot 5}\cdot Q^4+\frac{2}{5\cdot 7}\cdot Q^6+ + \ldots\\ &-\frac{1}{2}Q^1+\frac{2}{2\cdot 4}\cdot Q^3+\frac{2}{4\cdot 6}\cdot Q^5+\frac{2}{6\cdot 8}\cdot Q^7+ + \ldots\Big\}\end{aligned}\right\} \tag{26.}$$

Setzt man diese Werte in (27.) ein und ordnet, dann kommt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{(y^2-x^2)^2}=\Omega^0\Big\{&-Q^0+\frac{2}{1\cdot 3}Q^2+\frac{2}{3\cdot 5}\cdot Q^4+\\ &+\frac{2}{5\cdot 7}\cdot Q^6+ + \ldots\\ +\Omega^0\Big\{&-\frac{1}{2}Q^1+\frac{2}{2\cdot 4}\cdot Q^3+\frac{2}{4\cdot 6}\cdot Q^5+\\ &+\frac{2}{6\cdot 8}\cdot Q^7+ + \ldots\\ &+\Omega^1\frac{Q^0-Q^2}{1}+\Omega^3\frac{Q^2-Q^4}{3}+\Omega^5\frac{Q^4-Q^6}{5}+\ldots\\ &+\Omega^2\frac{Q^1-Q^2}{2}+\Omega^4\frac{Q^8-Q^5}{4}+\Omega^6\frac{Q^5-Q^7}{6}+\ldots\end{aligned}\right\} \tag{27.}$$

Andererseits erhält man durch Differentiation der Gleichung (24.) nach y:

$$\begin{aligned}\frac{2}{(y^2-x^2)^2}=-\frac{Q^0}{y}\cdot\frac{d\,\Omega^0}{d\,y}-2\cdot\frac{Q^1}{y}\frac{d\,\Omega^1}{d\,y}-2\frac{Q^2}{y}\frac{d\,\Omega^2}{d\,y}-\\ -2\frac{Q^3}{y}\frac{d\,\Omega^3}{d\,y}- - \ldots \text{inf.}\end{aligned} \tag{28.}$$

In den Formeln (27.) und (28.) hat man zwei Entwicklungen für denselben Ausdruck $\frac{2}{(y^2-x^2)^2}$. Beide schreiten fort nach

Q-Funktionen. Nach dem Descartes'schen Prinzip müssen die Koeffizienten von Q-Funktionen desselben Parameters einzeln einander gleich sein. Daraus folgt sofort:

$$-\frac{1}{y}\frac{d\,\Omega^0}{d\,y} = \Omega^1 - \Omega^0$$

$$-\frac{2}{y}\cdot\frac{d\,\Omega^1}{d\,y} = \frac{\Omega^2}{2} - \frac{\Omega^1}{1}$$

$$-\frac{2}{y}\cdot\frac{d\,\Omega^2}{d\,y} = \frac{\Omega^3}{3} - \frac{\Omega^1}{1} + \frac{2}{1\cdot 3}\Omega^0$$

$$-\frac{2}{y}\cdot\frac{d\,\Omega^3}{d\,y} = \frac{\Omega^4}{4} - \frac{\Omega^2}{2} + \frac{2}{2\cdot 4}\cdot\Omega^0$$

— — — — — — — — — — — — — —

$$-\frac{2}{y}\cdot\frac{d\,\Omega^n}{d\,y} = \frac{\Omega^{n+1}}{n+1} - \frac{\Omega^{n-1}}{n-1} + \frac{2}{(n+1)(n-1)}\cdot\Omega^0$$

Diese Formeln können mit Ausnahme der beiden ersten zusammengefasst werden in eine einzige. Vertauscht man den Parameter n mit λ, dann hat man die Relationen:

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{2}{y}\frac{d\,\Omega^0(x)}{d\,y} = 2\,\Omega^1(y) - 2\,\Omega^0(x)\\
&-\frac{2}{y}\frac{d\,\Omega^1(y)}{d\,y} = \frac{\Omega^2(y)}{2} - \frac{\Omega^1(y)}{1}\\
&-\frac{2}{y}\frac{d\,\Omega^\lambda(y)}{d\,y} = \frac{\Omega^{\lambda+1}(y)}{\lambda+1} - \frac{\Omega^{\lambda-1}(y)}{\lambda-1} + \frac{2\,\Omega^0(y)}{(\lambda+1)(\lambda-1)}
\end{aligned}\right\}\quad(29.)$$

Diese Ableitungen sind nicht unmittelbar von Belang für die Herleitung der gesuchten Entwicklungsmethode. Doch geben sie eine wichtige Eigenschaft der im ersten Abschnitt eingeführten Ω-Funktionen, die in ihrer Art ähnlich ist den Differentialeigenschaften der $\overset{n}{O}$-Funktion in der Theorie der Bessel'schen Funktionen. Man hat in (6a.) die $\overset{n}{O}$-Funktion definiert durch:

$$\overset{n}{O}(y) = \sum_{0}^{<\frac{n+1}{2}} \lambda \frac{n}{4} \cdot \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} \left(\frac{2}{y}\right)^{n+1-2\lambda}$$

Sie genügt der Differentialrelation:

$$\overset{n+1}{O}(y) - \overset{n-1}{O}(y) + 2 \frac{d \overset{0}{O}(y)}{d y} = O.$$

Wie leicht einzusehen, kann man der Ω^{λ}-Funktion auch die Form geben:

$$\Omega^{n}(y) = \sum_{0}^{n} \lambda \frac{n}{4} \cdot \frac{\lambda!\,\lambda!}{(2\lambda)!} \cdot \frac{(n+\lambda-1)!}{(n-\lambda)!} \left(\frac{2}{y}\right)^{2\lambda+2}$$

so dass man auch darin eine gewisse Analogie hat. Nach der Art ihrer Entstehung spielt die Ω^{n}-Funktion für die Neumann'schen Reihen zweiter Art genau dieselbe Rolle wie die $\overset{n}{O}$-Funktion für die Neumann'schen Reihen erster Art.

Mit Hülfe des Satzes (23.) lässt sich nun nachweisen, dass jede gerade Funktion f(x) in demselben Masse wie nach den $[\overset{\lambda}{J}(x)]^2$ auch nach den $\frac{d^p}{d x^p} [\overset{\lambda}{J}(x)]^2$ entwickelt werden kann, wo p eine beliebig gegebene gerade Zahl sein kann, dass ferner Gleiches auch gilt von jeder ungeraden Funktion f(x), nur mit dem Unterschied, dass in diesem Fall unter p eine beliebig gegebene ungerade Zahl zu verstehen ist. Setzt man nun $p = 1$, dann hat man offenbar den kürzesten Weg, um aus den Resultaten für die Entwicklung gerader Funktionen Methoden zur Entwicklung ungerader Funktionen herzuleiten.

Um den Punkt $x = 0$ einer x-Ebene sei ein Kreis beschrieben mit dem Radius R. Ferner sei eine Funktion f(x) gegeben, welche eindeutig, stetig und ungerade ist innerhalb dieser Kreisfläche und definiert ist für alle $|x| < R$. Dann ist offenbar die Funktion

$$\varphi(x) = \int_{0}^{x} f(x)\, d x$$

wo der Integrationsweg auf das Innere des Definitionsbereiches beschränkt gedacht ist, stetig, eindeutig und gerade, solange $|x| < R$ bleibt. Sie ist daher nach Satz (15.) entwickelbar in eine nach den $[\overset{\lambda}{J}(x)]^2$ fortschreitende Reihe von der Form:

$$\varphi(x) = k_0 [\overset{0}{J}(x)]^2 + k_1 [\overset{1}{J}(x)]^2 + k_2 [\overset{2}{J}(x)]^2 + \\ + k_3 [\overset{3}{J}(x)]^2 + + \ldots \text{inf.} \tag{30.}$$

Diese Reihe ist gültig für jeden der Bedingung $|x| < R$ entsprechenden Wert von x. Zufolge des Satzes (23.) kann diese Reihe, unbeschadet ihres Gültigkeitsgebietes nach x differentiert werden. Man erhält somit die Reihe:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = 2k_0 \overset{0}{J} \frac{d}{dx} \overset{0}{J} + 2k_1 \overset{1}{J} \frac{d}{dx} \overset{1}{J} + 2k_2 \overset{2}{J} \frac{d}{dx} \overset{2}{J} + \\ + 2k_3 \overset{3}{J} \frac{d}{dx} \overset{3}{J} + + \ldots \text{inf.} \tag{31.}$$

wo abkürzend J statt J(x) gesetzt ist. Diese Entwicklung ist unter denselben Bedingungen gültig. Nun ist aber ohne weiteres ersichtlich, dass

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x)$$

Ferner ist nach bekannten Differentialeigenschaften der Bessel'schen Funktionen:

$$\frac{d}{dx} \overset{0}{J}(x) = -\overset{1}{J}(x)$$

$$\frac{d}{dx} \overset{\lambda}{J}(x) = \frac{1}{2} \left\{ \overset{\lambda-1}{J}(x) - \overset{\lambda+1}{J}(x) \right\}; \; \lambda = 1, 2, 3, \ldots \infty.$$

Führt man diese Relationen in (31.) ein, dann kommt:

$$f(x) = -2k_0 \overset{0}{J} \overset{1}{J} + k_1 \overset{1}{J} (\overset{0}{J} - \overset{2}{J}) + k_2 \overset{2}{J} (\overset{1}{J} - \overset{3}{J}) + \\ + k_3 \overset{3}{J} (\overset{2}{J} - \overset{4}{J}) + + \ldots \text{inf.} \tag{32.}$$

oder was dasselbe ist

$$f(x) = (k_1 - 2k_0)\overset{0}{J}(x)\overset{1}{J}(x) + (k_2 - k_1)\overset{1}{J}(x)\overset{2}{J}(x) + $$
$$+ (k_3 - k_2)\overset{2}{J}(x)\overset{3}{J}(x) + (k_4 - k_3)\overset{3}{J}(x)\overset{4}{J}(x) + + \ldots \text{ inf.} \tag{33.}$$

Dieses Resultat notieren wir in folgendem Satz:

„Ist f(x) eine beliebige, gegebene Funktion, welche eindeutig, stetig und ungerade ist, solange $|x| < R$ bleibt, dann ist sie immer darstellbar durch eine nach den Produkten

$$\overset{0}{J}(x)\overset{1}{J}(x),\ \overset{1}{J}(x)\overset{2}{J}(x),\ \overset{2}{J}(x)\overset{3}{J}(x),\ \overset{3}{J}(x)\overset{4}{J}(x)\ldots \tag{34.}$$

fortschreitende Entwicklung, die gültig ist für jeden der Bedingung $|x| < R$ genügenden Wert von x“.

Man bezeichnet abkürzend

$$\frac{d}{dx}\left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 = \overset{\lambda}{J}(x)\left\{\overset{\lambda-1}{J}(x) - \overset{\lambda+1}{J}(x)\right\} = \overset{\lambda}{\Pi}(x);\ \lambda = 1, 2, 3, \ldots \infty. \tag{35.}$$

Deferentiert man nun die in den Gleichungen (1.) gegebenen Entwicklungen für die geraden Potenzen von x, dann erhält man unter Benützung des obigen Symboles:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= -\overset{0}{J}(x)\overset{1}{J}(x) + \sum_1^\infty \lambda\, \overset{\lambda}{\Pi}(x) \\
\frac{2}{2}\cdot x &= \frac{1}{2}\sum_1^\infty \lambda\,(2\lambda)^2 \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x) \\
\frac{4}{2}\cdot x^3 &= \frac{1\cdot 2}{3\cdot 4}\sum_2^\infty \lambda\,(2\lambda)^2\left[(2\lambda)^2 - 2^2\right]\cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x) \\
\frac{6}{2}\cdot x^5 &= \frac{1\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6}\sum_3^\infty \lambda\,(2\lambda)^2\left[(2\lambda)^2 - 2^2\right]\left[(2\lambda)^2 - 4^2\right]\cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x) \\
\frac{8}{2}\cdot x^7 &= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\sum_4^\infty \lambda\,(2\lambda)^2\left[(2\lambda)^2 - 2^2\right]\left[(2\lambda)^2 - \right. \\
&\qquad \left. - 4^2\right]\left[(2\lambda)^2 - 6^2\right]\overset{\lambda}{\Pi}(x)
\end{aligned}\right\} \tag{36.}$$

Für den Fall $|x| < |y|$, wo x und y komplexe Variable sind, gilt identisch:

$$\frac{x}{y^2 - x^2} = \frac{x}{y^2} + \frac{x^3}{y^4} + \frac{x^5}{y^6} + \frac{x^7}{y^8} + \frac{x^9}{y^{10}} + + \ldots \text{ inf.}$$

Auf der rechten Seite setzt man für die Potenzen von x die Entwicklungen aus (36.) ein. Man erhält dann:

$$\frac{x}{y^2 - x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\,y^2} \cdot 2 \cdot \sum_1^\infty \lambda \; (2\,\lambda)^2 \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x) +$$

$$+ \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{4\,y^4} \cdot 2 \cdot \sum_2^\infty \lambda \; (2\,\lambda)^2 \left[(2\,\lambda)^2 - 2^2\right] \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x)$$

$$+ \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \frac{1}{6\,y^6} \cdot 2 \cdot \sum_3^\infty \lambda \; (2\,\lambda)^2 \left[(2\,\lambda)^2 - 2^2\right] \left[(2\,\lambda)^2 - 4^2 \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x)\right.$$

$$+ \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \cdot \frac{1}{8\,y^8} \cdot 2 \cdot \sum_4^\infty \lambda \; (2\,\lambda)^2 \left[(2\,\lambda)^2 - 2^2\right] \left[(2\,\lambda)^2 - \right.$$

$$\left. - 4^2\right] \left[(2\,\lambda)^2 - 6^2\right] \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x)$$

$$+ \;—\;—\;—\;—\;—\;—\;—\;—\;—\;—\;—\;—\;—\;—\;—\;—$$

$$+ \text{ in inf.}$$

Ordnet man nach den $\overset{\lambda}{\Pi}(x)$, dann erhält man eine Entwicklung von der Form:

$$\frac{x}{y^2 - x^2} = 2 \cdot \sum_1^\infty \lambda \; \overset{\lambda}{P}(y)\, \overset{\lambda}{\Pi}(x) \tag{37.}$$

Die neu eingeführte Funktion $\overset{\lambda}{P}(y)$ ist dabei definiert durch die von Carl Neumann gegebene Formel:

$$\overset{\lambda}{P}(x) = \frac{1}{2} \frac{(2\,\lambda)^2}{2\,y^2} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} \frac{(2\,\lambda)^2 \left[(2\,\lambda)^2 - 2^2\right]}{4\,y^4} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot$$

$$\cdot \frac{(2\,\lambda)^2 \left[(2\,\lambda)^2 - 2^2\right] \left[(2\,\lambda)^2 - 4^2\right]}{6\,y^6} + + \ldots \text{ fin.}$$

Zur bequemeren Verwendung bei den Anwendungen haben wir die $\overset{\lambda}{P}(y)$ Funktion wieder durch eine endliche Summe dargestellt. Der allgemeine Summand lautet:

$$\frac{\nu!\,\nu!}{(2\,\nu)!}\cdot\frac{(2\,\lambda)^2\left[(2\,\lambda)^2-2^2\right]\left[(2\,\lambda)^2-4^2\right]\ldots\ldots\left[(2\,\lambda)^2-(2\,\nu-2)^2\right]}{2\,\nu\cdot y^{2\nu}}$$

$$=\frac{\nu!\,\nu!}{(2\,\nu)!}\,\frac{2^{2\nu-1}(\lambda-\nu+1)(\lambda-\nu+2)\ldots\ldots(\lambda-2)(\lambda-1)\lambda\cdot\cdot\lambda\cdot(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots\ldots(\lambda+\nu-2)(\lambda+\nu-1)}{\nu\cdot y^{2\nu}}$$

$$=\frac{\nu!\,\nu!}{(2\,\nu)!}\,2^{2\nu-1}\cdot\frac{\lambda}{\nu}\cdot\frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}\cdot\frac{1}{y^{2\nu}}$$

Die Laufzahl ν nimmt alle Werte von 1 bis λ; daher lautet nun die Summenformel:

$$\overset{\lambda}{P}(y)=\sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\;2^{2\nu-1}\,\frac{\nu!\,\nu!}{(2\,\nu)!}\cdot\frac{\lambda}{\nu}\cdot\frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}\cdot\frac{1}{y^{2\nu}} \tag{38.}$$

Dies kann auch geschrieben werden:

$$\overset{n}{P}(y)=\sum_{1}^{n}{}_{\lambda}\,\frac{n}{4}\cdot\frac{(\lambda-1)!\,(\lambda-1)!}{(2\,\lambda-1)!}\cdot\frac{(n+\lambda-1)!}{(n-\lambda)!}\cdot\left(\frac{2}{y}\right)^{2\lambda} \tag{38a.}$$

In dieser letztern Schreibweise tritt die Analogie mit der Ω^n-Funktion am besten hervor.

Mit Rücksicht auf die Definitionsformel (35.) der Π-Funktion kann die Entwicklung (37.) als eine nach Produkten von J-Funktionen fortschreitende Reihe betrachtet werden.

In der Gleichung (3.) hat man für eine gerade Funktion die Integraldarstellung gefunden:

$$f(x)=\frac{1}{2\,i\,\pi}\cdot\int_r f(y)\cdot\frac{y\cdot dy}{y^2-x^2}\qquad |\,y\,|<R;\;|\,x\,|<r<R.$$

die Integration erstreckt längs einer um den Punkt $y=0$ beschriebenen, den Punkt $y=x$ umschliessenden Kreisperipherie. Setzt man $f(y)$ als eine ungerade, für alle Werte $|y|<R$ definierte, endliche und stetige Funktion voraus, dann erhält man analog

$$f(x) = \frac{1}{2 i \pi} \cdot \int_r f(y) \cdot \frac{x \cdot dy}{y^2 - x^2} \tag{39.}$$

die Integration wieder erstreckt über eine, den Punkt $y = x$ umschliessende Kreisperipherie aus dem Nullpunkt. Nun ist nach (37.):

$$\frac{x}{y^2 - x^2} = \sum_1^{\infty} \lambda \; 2 \cdot \overset{\lambda}{P}(y) \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x) \qquad |x| < |y|$$

daher auch:

$$f(x) = \sum_1^{\infty} \lambda \; k_\lambda \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x), \quad \text{wo } k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2 i \pi} \cdot \int_r f(y) \cdot \overset{\lambda}{P}(y) \cdot dy \tag{40.}$$

Wir notieren diese Resultate in folgendem Satz:

Jede beliebige Funktion $f(x)$, die eindeutig, stetig und ungerade ist für jeden der Bedingung $|x| < R$ genügenden Wert von x, lässt sich in eine von der Form:

$$f(x) = \sum_1^{\infty} \lambda \; k \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x), \quad \text{wo } k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2 i \pi} \cdot \int_r f(y) \cdot \overset{\lambda}{P}(y) \cdot dy \tag{40.}$$

entwickeln, die zufolge der Definitionsformel (35.) der Π-Funktion betrachtet werden kann als eine Entwicklung, die nach Produkten von J-Funktionen fortschreitet. Die Reihe ist gültig für jeden der Bedingung $|x| < R$ genügenden Wert von x, wenn R eine reelle, endliche Konstante ist.

Ist die beliebige Funktion $f(x)$ nicht definiert für das Gebiet einer vollständigen Kreisfläche, sondern nur für ein Ringgebiet (Laurent'scher Kranz) d. h. für alle Werte von x, die der Bedingung $R_1 < |x| < R$, wo $R_1 < R$, genügen, dann findet man analog dem entsprechenden Fall für die geraden Funktionen eine Reihe, die nach Π- und P-Funktionen fortschreitet von der Form:

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} \frac{\varepsilon_\lambda}{2 i \pi} \overset{\lambda}{\Pi}(x) \cdot \int_{(R)} f(y) \cdot \overset{\lambda}{P}(y)\, dy +$$

$$+ \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} \frac{\varepsilon_\lambda}{2 i \pi} \cdot \overset{\lambda}{P}(x) \cdot \int_{(R_1)} f(y) \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(y) \cdot dy$$

oder kürzer:

$$\left.\begin{aligned} & f(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\, k \cdot \overset{\lambda}{\pi}(x) + \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\, \mu_\lambda \cdot \overset{\lambda}{P}(x) \\ & \qquad \text{wo } k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2 i \pi} \cdot \int_{(R)} f(y) \cdot \overset{\lambda}{P}(y) \cdot dy \\ & \qquad\qquad \mu_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2 i \pi} \cdot \int_{(R_1)} f(y) \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(y) \cdot dy \end{aligned}\right\} \tag{41.}$$

Der obige Fall (40.) tritt als Spezialfall dieser letzteren Entwicklung auf, wenn die Entwicklungskoeffizienten μ_λ verschwinden, was für jede Funktion f (x) der Fall ist, die innerhalb eines um den Nullpunkt mit dem Radius R beschriebenen Kreisgebietes, also für $|x| < r < R$ eindeutig und stetig ist. Mit andern Worten:

Ist der Nullpunkt zugänglich, so kann die Entwicklung von f (x) nur Potenzen mit positivem Exponenten enthalten, und da $\overset{\lambda}{J}(x)$ auch nur solche enthält, muss in diesem Fall das Kreisintegral

$$\int_R \overset{\lambda}{\Pi}(y)\, f(y) \cdot dy$$

notwendig verschwinden, also auch $\mu_\lambda = 0$ sein. Der Entwicklungskoeffizient k_λ dagegen kann dann nicht gleich Null sein, weil $\overset{\lambda}{P}(y)$ eine Reihe ist, die nach wachsenden negativen Potenzen fortschreitet, die also das Integral nicht verschwinden lassen, wenn sie sich teilweise mit dem positiven Potenzen von f (y) zum Integranden $\frac{dy}{y}$ ergänzen.

Lässt sich die gegebene, ungerade Funktion f(x) nur in eine nach wachsenden negativen Potenzen des Argumentes fortschreitende Potenzreihe entwickeln, dann verschwindet umgekehrt das Integral

$$\int_{(R)} \overset{\lambda}{P}(y) f(y) \cdot dy$$

damit wird auch k_λ zu Null, und man erhält eine Entwicklung die nur nach $\overset{\lambda}{P}(x)$-Funktionen fortschreitet.

Weist endlich die Potenzreihenentwicklung der gegebenen ungeraden Funktion f(x) sowohl positive und negative Potenzen auf, dann verschwinden die k_λ und μ_λ nur teilweise, und man erhält eine nach Π- und P-Funktionen fortschreitende Entwicklung.

Die für die gegebene, ungerade Funktion f(x) möglichen drei Fälle können natürlich auch bei einer geraden Funktion φ(x) eintreten. Es gelten dann hinsichtlich der gesuchten Entwicklung die den obigen entsprechenden Bedingungen, nämlich:

Enthält die Potenzreihenentwicklung der gegebenen geraden Funktion φ(x) nur positive Potenzen, dann schreitet die gesuchte Neumann'sche Reihe zweiter Art nur fort nach den Quadraten der J-Funktion, d. h. in der Formel (16a.) verschwinden alle Koeffizienten μ_λ.

Enthält die Potenzreihenentwicklung der gegebenen geraden Funktion φ (x) nur negative Potenzen, dann schreitet die gesuchte Entwicklung nur fort nach Ω^λ-Funktionen, d. h. alle k_λ verschwinden.

Enthält endlich die Potenzreihenentwicklung der gegebenen geraden Funktion φ(x) sowohl negative als auch positive Potenzen, ist sie also definiert für einen Laurent'schen Kranz, dann verschwinden weder alle μ_λ noch alle k_λ; die gesuchte Entwicklung schreitet daher fort nach den $\left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2$ und Ω^λ (x).

Um auch für diese zweite Neumann'sche Methode eine kurze Charakteristik zu geben, heben wir hervor, dass sie die erste Methode dahin ergänzt, dass unter Anwendung beider Methoden gerade und ungerade Funktionen in Neumann'sche Reihen II. Art entwickelt werden können. Aber selbst unter gleichzeitiger Anwendung beider Methoden ist es nicht möglich, Funktionen, deren Potenzreihen nach geraden und ungeraden Potenzen des Arguments fortschreiten, in Neumann'sche Reihen zweiter Art zu entwickeln. In dieser Hinsicht ist die Möglichkeit der Entwicklung nach Reihen erster Art viel allgemeiner, indem von der zu entwickelnden Funktion nur verlangt wird, dass sie durch eine konvergente Potenzreihe dargestellt werden kann.

Im übrigen ist diese zweite Neumann'sche Methode anwendbar auf alle ungeraden Funktionen, die in eine konvergente Potenzreihe enwickelt werden können. Denn dadurch werden die zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten k_λ und μ_λ entstehenden Integralausdrücke leicht integrierbar. In Anwendung des Verfahrens geben wir nachstehend die Entwicklungen einiger ungerader Funktionen.

---

§ 2. Aufstellung der Reihen für die ungeraden Potenzen von x.

Es sei vorerst aufmerksam gemacht auf die durch Differentiation der Entwicklung für 1, d. h. von

$$1 = [\overset{0}{J}(x)]^2 + 2\sum_{1}^{\infty}\lambda\ [\overset{\lambda}{J}(x)]^2$$

erhaltene Identität

$$0 = -\overset{0}{J}(x)\overset{1}{J}(x) + \sum_{1}^{\infty}\lambda\ \overset{\lambda}{\Pi}(x)$$

$$0 = -\overset{0}{J}(x)\overset{1}{J}(x) + \overset{0}{J}(x)\overset{1}{J}(x) - \overset{1}{J}(x)\overset{2}{J}(x) + \overset{1}{J}(x)\overset{2}{J}(x) - + - + \ldots \text{ inf.}$$

1. Aufstellung der Reihe für x.

$$f(x) = x;\ f(y) = y$$

$$x = \sum_{1}^{\infty}\lambda\ k_\lambda \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x);\quad k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2i\pi} \cdot \int f(y) \cdot \overset{\lambda}{P}(y) \cdot dy.$$

Man erhält im einzelnen:

$$k_1 = \frac{2}{2i\pi} \cdot \int \overset{1}{P}(y) \cdot y \cdot dy = \frac{2}{2i\pi} \cdot \int \frac{dy}{y} = 2.$$

$$k_2 = \frac{2}{2i\pi} \cdot \int^{2} P(y) \cdot y \cdot dy = \frac{2}{2i\pi} \cdot \int \left\{ \frac{4}{y^2} + \frac{8}{y^4} \right\} y \cdot dy = 8.$$

$$k_3 = \frac{2}{2i\pi} \cdot \int^{3} P(y) \cdot y \cdot dy = \frac{2}{2i\pi} \cdot \int \left\{ \frac{9}{y^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{48}{y^4} + \frac{192}{y^6} \right\} \cdot y \cdot dy = 18.$$

$$k_4 = \frac{2}{2i\pi} \cdot \int^{4} P(y) \cdot y \cdot dy = \frac{2}{2i\pi} \cdot \int \left\{ \frac{16}{y^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{160}{y^4} + \ldots \right\} y \cdot dy = 32.$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — —

im allgemeinen:

$$k_\lambda = \frac{2}{2i\pi} \cdot \int \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\, 2^{2\nu-1} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \frac{1}{y^{2\nu}} \cdot y \cdot dy.$$

Die allgemeine Potenz im Integranden ist $y^{-2\nu+1}$. Um für dieses Cauchy'sche Integral überhaupt einen von Null verschiedenen Wert zu erhalten, muss die Potenz $y^{-1} = \frac{1}{y}$ sein und diese erhält man durch die Setzung $-2\nu + 1 = -1$; $\nu = 1$. Dann wird im Integranden der Koeffizient von $\frac{1}{y}$ $\left[\frac{1}{y}\right] = \lambda^2$ und daher:

$$k_\lambda = \frac{2}{2i\pi} \cdot \lambda^2 \cdot \int \frac{dy}{y} = 2\lambda^2.$$

Dadurch wird nun die Entwicklung für x zu:

$$\underline{x = 2\,\overset{1}{\Pi}(x) + 8\,\overset{2}{\Pi}(x) + 18\,\overset{3}{\Pi}(x) + 32\,\overset{4}{\Pi}(x) + 50\,\overset{5}{\Pi}(x) + + \ldots \text{inf.}}$$

$$\underline{x = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\, 2\lambda^2\, \overset{\lambda}{\Pi}(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\, (2\lambda)^2\, \overset{\lambda}{\Pi}(x)} \qquad (42.)$$

In dieser Darstellung hat man jedoch nur eine mittelbar nach Produkten von J-Funktionen fortschreitende Reihe. Um

4

eine auch unmittelbar nach Produkten von J-Funktionen fortschreitende Reihe zu erhalten, bildet man nach (33.) die Koeffizienten

$$a_1 = (k_1 - 2\,k_0) = 2; \quad a_2 = (k_2 - k_1) = 6; \quad a_3 = (k_3 - k_2) = 10$$
$$a_4 = (k_4 - k_3) = 14$$

allgemein

$$a_\lambda = (k_\lambda - k_{\lambda-1}) = 2\left\{\lambda^2 - (\lambda-1)^2\right\} = 2\,(2\,\lambda - 1)$$

Die unmittelbar nach Produkten von J-Funktionen fortschreitende Reihe erhält demnach die Form:

$$\underline{x = 2 \cdot \overset{0}{J}(x)\,\overset{1}{J}(x) + 6 \cdot \overset{1}{J}(x)\,\overset{2}{J}(x) + 10\,\overset{2}{J}(x)\,\overset{3}{J}(x) +}$$
$$\underline{+ 14\,\overset{3}{J}(x)\,\overset{4}{J}(x) + 18\,\overset{4}{J}(x) \cdot \overset{5}{J}(x) + + \text{inf.}}$$
$$\underline{= 2 \cdot \sum_1^\infty{}_\lambda\; (2\,\lambda - 1) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x)} \quad \text{gültig für } |x| < R.$$

Wir leiten noch die Formel für die allgemeine ungerade Potenz ab. Es sei

$$f(x) = x^{2n-1}; \; f(y) = y^{2n-1}$$

Wir definieren die ungerade Potenz aus dem Grund mit x^{2n-1} und nicht wie sonst üblich mit x^{2n+1}, um unter dem Integralzeichen des zur Bestimmung von k_λ auszuwertenden Integrals überhaupt die Potenz $y^{-1} = \frac{1}{y}$ zu erhalten. Jede andere Potenz gibt zu jenem Cauchy'schen Integral keinen Beitrag. Man hat also:

$$x^{2n-1} = \sum_1^\infty{}_\lambda\; k_\lambda \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x), \quad \text{wo } k_\lambda = \frac{2}{2\,i\,\pi} \cdot \int f(y) \cdot \overset{\lambda}{P}(y) \cdot dy$$

Setzt man für $\overset{\lambda}{P}(y)$ die Summenformel, so kommt:

$$k_\lambda = \frac{2}{2\,i\,\pi} \cdot \sum_1^\lambda{}_\nu\; 2^{2\nu-1} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\,\nu)!}\,\frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot \int y^{2n-1}\,\frac{1}{y^{2\nu}} \cdot dy$$

Die Potenz $\frac{1}{y} = y^{-1}$ erhält man durch die Setzung $2n - 1 - 2\nu = -1$; $n = \nu$.

Dann wird im Integranden der Koeffizient von $\frac{1}{y}$ zu:

$$\left[\frac{1}{y}\right] = 2^{2n-1} \cdot \frac{n!\,n!}{(2n)!} \cdot \frac{\lambda}{n} \cdot \frac{(\lambda + n - 1)!}{(\lambda - n)!}$$

woraus sich sofort k_λ bestimmt zu:

$$k_\lambda = \frac{1}{n} \cdot \frac{n!\,n!}{(2n)!} (2\lambda)^2 \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right]\left[(2\lambda)^2 - 4^2\right]\left[\ldots\ldots\right]\left[(2\lambda)^2 - (2n-2)^2\right]$$

und daher erhält man für x^{2n-1}:

$$x^{2n-1} = \frac{1}{n} \frac{n!\,n!}{(2n)!} \cdot \sum_n^\infty {}_\lambda\, (2\lambda)^2 \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right]\left[(2\lambda)^2 - 4^2\right]\left[\ldots\right]\left[(2\lambda)^2 - (2n-2)^2\right] \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x) \qquad (43.)$$

Man bildet wie früher:

$$a_\lambda = (k_\lambda - k_{\lambda-1}) = 2^{2n+1} \cdot \frac{n!\,n!}{(2n)!} (2\lambda - 1) \cdot \frac{(\lambda + n - 1)!}{(\lambda - n)!}$$

und daher

$$x^{2n-1} = 2^{2n} \frac{n!\,n!}{(2n)!} \cdot \sum_n^\infty {}_\lambda\, (2\lambda - 1) \cdot \frac{(\lambda + n - 1)!}{(\lambda - n)!} \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \qquad (44.)$$

Um die Konvergenz der in (42.) bis (44.) hergeleiteten Formeln nachzuweisen, zeigt man, wie im ersten Abschnitt, dass die Bedingungen

$$\frac{|n_{\lambda+1}|}{|n_\lambda|} < 1$$

von einem beliebigen, endlichen λ an erfüllt sind, so wie ferner

$$\lim_{\lambda = \infty} \frac{|n_{\lambda+1}|}{|n_\lambda|} = 0.$$

Den für ein und dieselbe Potenz konstanten Faktor

$$2^{2n} \cdot \frac{n!\,n!}{(2n)!}$$

lässt man dabei ausser acht. Nach der Formel von J. J. Schönholzer wird, wenn man in

$$\overset{a}{J}(x) \cdot \overset{b}{J}(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu} (-1)^{\mu} \cdot \frac{\Gamma(a+b+2\mu+1)}{\mu!\,\Gamma(a+\mu+1) \cdot \Gamma(b+\mu+1)} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+b+2\mu}}{\Gamma(a+b+\mu+1)}$$

für a setzt $\lambda - 1$, für b setzt λ

$$\overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu} (-1)^{\mu} \frac{\Gamma(2\lambda+2\mu)}{\mu!\,\Gamma(\lambda+\mu) \cdot \Gamma(\lambda+\mu+1)} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+2\mu-1}}{\Gamma(2\lambda+\mu)}$$

oder statt der Gammafunktionen die Fakultäten gesetzt, indem man festsetzt, das μ nur alle ganzen, positiven Zahlen durchlaufen soll, was für λ a priori Bedingung ist,

$$\overset{\lambda-1}{J}(x)\,\overset{\lambda}{J}(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu} (-1)^{\mu} \cdot \frac{(2\lambda+2\mu-1)!}{\mu!\,(\lambda+\mu-1)!\,(\lambda+\mu)!} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+2\mu-1}}{(2\lambda+\mu-1)!}$$

Genau in derselben Weise wie für $[\overset{\lambda}{J}(x)]^2$ kann man hier schliessen, dass der absolute Betrag des ersten Summanden grösser ist als der absolute Betrag der Summe aller einzelnen Summanden. Es ist daher das allgemeine Glied $n_{\lambda+1}$ der allgemeinen ungeraden Potenz:

$$|n_{\lambda+1}| < (2\lambda+1) \cdot \frac{(\lambda+n)!}{(\lambda-n+1)} \cdot \frac{\left|\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+1}\right|}{\lambda!\,(\lambda+1)!}$$

ebenso

$$|n_{\lambda}| < (2\lambda-1) \cdot \frac{(\lambda+n-1)!}{(\lambda-n)!} \cdot \frac{\left|\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-1}\right|}{(\lambda-1)!\,\lambda!}$$

Daher

$$\frac{|n_{\lambda+1}|}{|n_\lambda|} < \frac{(2\lambda+1)}{(2\lambda-1)} \cdot \frac{(\lambda+n)}{(\lambda-n+1)} \cdot \frac{x^2}{4 \cdot \lambda \cdot (\lambda+1)}$$

Für im Vergleich zu n einigermassen grosse λ konvergieren der erste und der zweite Bruch rechts jeder für sich gegen 1. Unter der a priori gemachten Voraussetzung, dass $|x| < R$, wo R eine reelle, endliche Konstante ist, kann leicht ein λ gefunden werden, für welches der Quotient rechts kleiner als 1 ist. Daraus ist auch ersichtlich, dass für lim $(\lambda = \infty)$ der Quotient zu Null wird. Die durch die Formeln (42.) bis (44.) dargestellten Neumann'schen Reihen zweiter Art für die ungeraden Potenzen von x sind also unbedingt konvergent für alle endlichen Werte des Argumentes x.

---

§ 3. Vergleich zwischen den für die geraden und ungeraden Potenzen von x geltenden Neumann'schen Reihen erster und zweiter Art.

Die Reihen erster Art für die geraden Potenzen, die wir der oben zitierten Schrift von W. Köstler entnehmen, sind die folgenden:

$$1 = \overset{0}{J}(x) + 2 \cdot \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\ \overset{2\lambda}{J}(x)$$

$$x^2 = 2 \cdot \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\ (2\lambda)^2\, \overset{2\lambda}{J}(x)$$

$$x^4 = 2 \cdot \sum_{2}^{\infty}{}_{\lambda}\ (2\lambda)^2 \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right] \cdot \overset{2\lambda}{J}(x)$$

$$x^6 = 2 \cdot \sum_{3}^{\infty}{}_{\lambda}\ (2\lambda)^2\left[(2\lambda)^2 - 2^2\right]\left[(2\lambda)^2 - 4^2\right] \overset{2\lambda}{J}(x)$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$x^{2n} = 2 \cdot \sum_{n}^{\infty} \lambda \; (2\lambda)^2 [(2\lambda)^2 - 2^2][(2\lambda)^2 - 4^2][\ldots\ldots][(2\lambda)^2 - (2n-2)^2] \cdot \overset{2\lambda}{J}(x)$$

Die Reihen zweiter Art für die geraden Potenzen sind:

$$1 = [\overset{0}{J}(x)]^2 + 2 \cdot \sum_{1}^{\infty} \lambda \; [\overset{\lambda}{J}(x)]^2$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sum_{1}^{\infty} \lambda \; (2\lambda)^2 \cdot [\overset{\lambda}{J}(x)]^2$$

$$x^4 = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdot 2 \cdot \sum_{2}^{\infty} \lambda \; (2\lambda)^2 \, [(2\lambda)^2 - 2^2] \cdot [\overset{\lambda}{J}(x)]^2$$

$$x^6 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot 2 \cdot \sum_{3}^{\infty} \lambda \; (2\lambda)^2 [(2\lambda)^2 - 2^2] \, [(2\lambda)^2 - 4^2] \cdot [\overset{\lambda}{J}(x)]^2$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$x^{2n} = \frac{n!\,n!}{(2n)!} \cdot 2 \cdot \sum_{n}^{\infty} \lambda \; (2\lambda)^2 [(2\lambda)^2 - 2^2] \, [(2\lambda)^2 - 4^2][\ldots\ldots][(2\lambda)^2 - (2n-2)^2] \, [\overset{\lambda}{J}(x)]^2$$

Man erkennt sofort die grosse Analogie zwischen den beiden Entwicklungen. Die Entwicklungskoeffizienten der Reihen zweiter Art sind proportional den entsprechenden der ersten Art. Der Proportionalitätsfaktor ist jeweilen $\frac{n!\,n!}{(2n)!}$. Bei den Reihen erster Art kommen nur Bessel'sche Funktionen mit geraden Parametern vor, während bei denjenigen zweiter Art gerade und ungerade Parameter auftreten.

Die Reihen erster Art für die ungeraden Potenzen sind:

$$x = 2 \cdot \sum_{0}^{\infty} \lambda \; (2\lambda + 1) \overset{2\lambda+1}{J}(x)$$

$$x^3 = 2 \cdot \sum_{1}^{\infty}\lambda\ (2\lambda+1)\left[(2\lambda+1)^2 - 1^2\right] \overset{2\lambda+1}{J}(x)$$

$$x^5 = 2 \cdot \sum_{2}^{\infty}\lambda\ (2\lambda+1)\left[(2\lambda+1)^2 - 1^2\right]\left[(2\lambda+1)^2 - 3^2\right] \overset{2\lambda+1}{J}(x)$$

$$x^7 = 2 \cdot \sum_{3}^{\infty}\lambda\ (2\lambda+1) \cdot \left[(2\lambda+1)^2 - 1^2\right]\left[(2\lambda+1)^2 - 3^2\right]\left[(2\lambda+1)^2 - 5^2\right] \overset{2\lambda+1}{J}(x)$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$x^{2n+1} = 2 \cdot \sum_{n}^{\infty}\lambda\ (2\lambda+1)\left[(2\lambda+1)^2 - 1^2\right]\left[\ldots\ldots\right]\left[(2\lambda+1)^2 - (2n-1)^2\right] \cdot \overset{2\lambda+1}{J}(x)$$

Die Reihen zweiter Art sind in der ersten Schreibweise:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sum_{1}^{\infty}\lambda\ (2\lambda)^2 \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x)$$

$$x^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdot 2 \cdot \sum_{2}^{\infty}\lambda\ (2\lambda)^2\left[(2\lambda)^2 - 2^2\right] \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x)$$

$$x^5 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot 2 \cdot \sum_{3}^{\infty}\lambda\ (2\lambda)^2\left[(2\lambda)^2 - 2^2\right]\left[(2\lambda)^2 - 4^2\right] \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x)$$

$$x^7 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \cdot 2 \cdot \sum_{4}^{\infty}\lambda\ (2\lambda)^2 \cdot \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right]\left[(2\lambda)^2 - 4^2\right]\left[(2\lambda)^2 - 6^2\right] \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x)$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$x^{2n-1} = \frac{1}{2n}\,\frac{n!\,n!}{(2n)!} \cdot 2 \cdot \sum_{n}^{\infty}\lambda\ (2\lambda)^2\left[(2\lambda)^2 - 2^2\right]\left[(2\lambda)^2 - 4^2\right]\left[\ldots\ldots\ldots\right]\left[(2\lambda)^2 - (2n-2)^2\right] \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x).$$

Durch Vergleich mit den Reihen zweiter Art für die geraden Potenzen erkennt man sofort, dass die Reihen für die ungeraden Potenzen kurzweg durch Differentiation der geraden Potenzen erhalten werden können, wenn man das Symbol $\overset{\lambda}{\Pi}(x)$ einführt. Man erhält zwar dabei nur eine mittelbar nach Produkten fortschreitende Reihe. Will man die unmittelbar nach Produkten $\overset{\lambda-1}{J}\ \overset{\lambda}{J}$ fortschreitenden Reihen haben, so hat man die Koeffizienten a_λ zu bilden aus $a_\lambda = (k_\lambda - k_{\lambda-1})$. Die Reihen werden dann:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\ \frac{(2\lambda - 1)}{\lambda^2} \cdot (2\lambda)^2 \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x)\,\overset{\lambda}{J}(x)$$

$$x^3 = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdot \sum_{2}^{\infty}{}_{\lambda}\ \frac{(2\lambda - 1)}{\lambda \cdot (\lambda + 1)} (2\lambda)^2 \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right] \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x)\,\overset{\lambda}{J}(x)$$

$$x^5 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \sum_{3}^{\infty}{}_{\lambda}\ \frac{(2\lambda - 1)}{\lambda \cdot (\lambda + 2)} \cdot (2\lambda)^2 \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right]\left[(2\lambda)^2 - 4^2\right] \overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x)$$

$$x^7 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \cdot \sum_{4}^{\infty}{}_{\lambda}\ \frac{(2\lambda - 1)}{\lambda \cdot (\lambda + 3)} \cdot (2\lambda)^2 \cdot \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right]\left[(2\lambda)^2 - 4^2\right]\left[(2\lambda)^2 - 6^2\right] \overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x)$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$x^{2n-1} = \frac{n!\,n!}{(2n)!} \sum_{n}^{\infty}{}_{\lambda}\ \frac{(2\lambda - 1)}{\lambda(\lambda + n - 1)} (2\lambda)^2 \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right]\left[(2\lambda)^2 - 4^2\right][\ldots..]\left[(2\lambda)^2 - (2n-2)^2\right] \overset{\lambda-1}{J}(x)\,\overset{\lambda}{J}(x).$$

Wie leicht zu kontrollieren ist, lassen sich die Reihen erster Art für die ungeraden Potenzen auch folgendermassen schreiben:

$$x = 2 \cdot \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda}\ (2\lambda + 1) \overset{2\lambda+1}{J}(x)$$

$$x^3 = 2 \cdot \sum_{1}^{\infty} \lambda\,(2\lambda+1) \cdot 2^2 \cdot \lambda \cdot (\lambda+1) \cdot \overset{2\lambda+1}{J}(x)$$

$$x^5 = 2 \cdot \sum_{2}^{\infty} \lambda\,(2\lambda+1) \cdot 2^2 \lambda(\lambda+1) \cdot 2^2(\lambda-1) \cdot (\lambda+2) \cdot \overset{2\lambda+1}{J}(x)$$

$$x^7 = 2 \cdot \sum_{3}^{\infty} \lambda\,(2\lambda+1) \cdot 2^2 \lambda(\lambda+1)\, 2^2(\lambda-1)(\lambda+2)\, 2^2(\lambda - 2)(\lambda+3) \cdot \overset{2\lambda+1}{J}(x)$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$x^{2n+1} = 2 \cdot \sum_{n}^{\infty} \lambda\,(2\lambda+1) \cdot 2^2 \lambda(\lambda+1)\, 2^2(\lambda-1)(\lambda+2) \ldots\ldots 2^2(\lambda-n+1)(\lambda+n) \cdot \overset{2\lambda+1}{J}(x)$$

Für die entsprechenden Potenzen nach Reihen zweiter Art steht uns unbenommen, unter Berücksichtigung der dadurch bedingten Veränderung der untern Grenze statt der Laufzahl λ die Laufzahl $\lambda + 1$ zu setzen. Man erhält dann:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \sum_{0}^{\infty} \frac{(2\lambda+1)}{(\lambda+1)^2} \cdot 2^2 \cdot (\lambda+1)^2 \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \overset{\lambda+1}{J}(x)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \sum_{0}^{\infty} \lambda\,(2\lambda+1) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \overset{\lambda+1}{J}(x)$$

$$x^3 = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdot \sum_{1}^{\infty} \lambda\, \frac{(2\lambda+1)}{(\lambda+1) \cdot (\lambda+2)} \cdot 2^2(\lambda+1)^2\, 2^2\left[(\lambda+1)^2 - 1^2\right] \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x)$$

$$= \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdot \sum_{1}^{\infty} \lambda\, \frac{(2\lambda+1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)} \cdot 2^2 \cdot (\lambda+1)^2 \cdot 2^2 \cdot \lambda \cdot (\lambda+2) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x)$$

$$= \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdot 2^2 \cdot \sum_{1}^{\infty} \lambda \; (2\lambda + 1) \cdot 2^2 \cdot (\lambda + 1) \cdot \lambda \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x)$$

$$x^5 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \sum_{2}^{\infty} \lambda \frac{(2\lambda + 1)}{(\lambda + 1)(\lambda + 3)} \cdot 2^2 (\lambda + 1)^2 \cdot 2^2 \left[(\lambda + 1)^2 - 1^2\right] 2^2 \left[(\lambda + 1)^2 - 2^2\right] \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x)$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \sum_{2}^{\infty} \lambda \; \frac{(2\lambda + 1)}{(\lambda + 1) \cdot (\lambda + 3)} \cdot 2^2 (\lambda + 1)^2 \cdot 2^2 \lambda \cdot (\lambda + 2) \cdot 2^2 (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 3) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x)$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot 2^2 \cdot \sum_{2}^{\infty} \lambda \; (2\lambda + 1) \cdot 2^2 \lambda (\lambda + 1) \cdot 2^2 (\lambda - 1)(\lambda + 2) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \overset{\lambda+1}{J}(x)$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$x^{2n-1} = \frac{n!\,n!}{(2n)!} \sum_{n-1}^{\infty} \lambda \; \frac{(2\lambda + 1)}{(\lambda + 1) \cdot (\lambda + n)} \; 2^2 (\lambda + 1)^2 \; 2^2 \left[(\lambda + 1)^2 - 1^2\right] \ldots\ldots 2^2 \left[(\lambda + 1)^2 - (n - 1)^2\right] \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \overset{\lambda+1}{J}(x)$$

$$= \frac{n!\,n!}{(2n)!} \cdot \sum_{n-1}^{\infty} \lambda \; \frac{(2\lambda + 1)}{(\lambda + 1) \cdot (\lambda + n)} \cdot 2^2 (\lambda + 1)^2 \cdot 2^2 \lambda \cdot (\lambda + 2) \ldots\ldots 2^2 (\lambda - n + 2)(\lambda + n) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \overset{\lambda+1}{J}(x)$$

$$= \frac{n!\,n!}{(2n)!} \cdot 2^2 \sum_{n-1}^{\infty} \lambda \; (2\lambda + 1) \cdot 2^2 \lambda (\lambda + 1) \, 2^2 (\lambda - 1)(\lambda + 2) \ldots\ldots 2^2 [\lambda + n - 1^1] \cdot [\lambda - (n - 1) + 1] \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x)$$

Denkt man sich auch hier die allgemeine ungerade Potenz durch x^{2n+1} definiert wie oben, setzt man also n statt (n — 1), dann wird die letzte Reihe:

$$x^{2n+1} = \frac{(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)!} \cdot 2^2 \sum_{n}^{\infty} \lambda\,(2\lambda+1)\,2^2\,\lambda\,(\lambda+1)\,2^2(\lambda-$$
$$-1)(\lambda+2)\ldots.2^2(\lambda-n+1)(\lambda+n)\,\overset{\lambda}{J}(x)\,\overset{\lambda+1}{J}(x)$$

Vergleicht man jetzt die Entwicklungen nach Reihen erster und zweiter Art, so erkennt man die Proportionalität der Entwicklungskoeffizienten, wobei der Proportionalitätsfaktor

$$2 \cdot \frac{(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)!}$$

ist. Damit ist die Behauptung, die Carl Neumann in der genannten Abhandlung ausgesprochen hat, dass nämlich die Entwicklungskoeffizienten der Reihen bis auf den Proportionalitätsfaktor mit einander übereinstimmen, auch für die ungeraden Potenzen nachgewiesen. Bedeutend einfacher ist die dritte Schreibweise für die Reihen der ungeraden Potenzen:

$$x = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \sum_{0}^{\infty} \lambda\,(2\lambda+1) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x)$$

$$x^3 = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdot 2^4 \cdot \sum_{1}^{\infty} \lambda\,(2\lambda+1) \cdot \frac{(\lambda+1)!}{(\lambda-1)!}\,\overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x)$$

$$x^5 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot 2^6 \cdot \sum_{2}^{\infty} \lambda\,(2\lambda+1) \cdot \frac{(\lambda+2)!}{(\lambda-2)} \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x)$$

— — — — — — — — — — — — — — — —

$$x^{2n+1} = \frac{(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)!} \cdot 2^{2n+2} \cdot \sum_{n}^{\infty} \lambda\,(2\lambda+1) \cdot \frac{(\lambda+n)!}{(\lambda-n)!}\,\overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x)$$

§ 4. Herleitung der Reihen für die ungeraden trigonometrischen und zyklometrischen Funktionen.

1. Die Reihe für sin (x).

$$f(x) = \sin(x); \quad f(y) = \sin(y)$$

$$\sin(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\, k_\lambda \overset{\lambda}{\Pi}(x); \qquad \text{wo } k_\lambda = \frac{2}{2 i \pi} \cdot$$

$$\cdot \int f(y) \cdot \overset{\lambda}{P}(y) \cdot d\,y.$$

Die zur Bestimmung von k_λ dienenden Integrale lassen sich wieder am bequemsten auswerten, wenn man für sin (y) seine Potenzreihenentwicklung einsetzt. Es ist allgemein:

$$\sin(y) = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \frac{y^9}{9!} - + \ldots \text{inf.} =$$

$$= \sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\, (-1)^{\mu - 1} \frac{y^{2\mu - 1}}{(2\mu - 1!)}$$

wo man wieder, abweichend vom üblichen Gebrauch, die Summenformel wie angegeben schreibt, und nicht

$$\sin y = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\, (-1)^{\mu} \cdot \frac{y^{2\mu + 1}}{(2\mu + 1)!}$$

um im Integranden überhaupt die Potenz $y^{-1} = \frac{1}{y}$ zu erhalten. Die Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten ergibt nun im einzelnen:

$$k_1 = \frac{2}{2 i \pi} \cdot \int \sin(y) \cdot \overset{1}{P}(y) \cdot d\,y$$

$$= \frac{2}{2 i \pi} \cdot \int \left\{ y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - + \ldots \right\} \left\{ \frac{1}{y^2} \right\} d\,y = 2$$

$$k_2 = \frac{2}{2 i \pi} \cdot \int \sin(y) \cdot \overset{2}{P}(y) \cdot d\,y$$

$$= \frac{2}{2\,i\,\pi} \cdot \int \cdot \left\{ y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + - \ldots \right\} \left\{ \frac{4}{y^2} + \frac{8}{y^4} \right\} \cdot dy = \frac{16}{1 \cdot 3}$$

$$k_3 = \frac{2}{2\,i\,\pi} \cdot \int \cdot \sin(y) \cdot \overset{3}{P}(y) \cdot dy$$

$$= \frac{2}{2\,i\,\pi} \cdot \int \left\{ y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \frac{y^9}{9!} - + \ldots \right\} \left\{ \frac{9}{y^2} + \frac{48}{y^4} + \right.$$

$$\left. + \frac{192}{y^6} \right\} \cdot dy = \frac{78}{1 \cdot 3 \cdot 5}$$

$$k_4 = \frac{2}{2\,i\,\pi} \cdot \int \sin(y) \cdot \overset{4}{P}(y) \cdot dy$$

$$= \frac{2}{2\,i\,\pi} \cdot \int \left\{ y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \frac{y^9}{9!} - \frac{y^{11}}{11!} + - \ldots \right\} \left\{ \frac{16}{y^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{160}{y^4} + \frac{1536}{y^6} + \frac{9216}{y^8} \right\} \cdot dy = \frac{64}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

im allgemeinen:

$$k_\lambda = \frac{2}{2\,i\,\pi} \cdot \int \sum_{1}^{\infty}{}_{\mu} (-1)^{\mu-1} \frac{y^{2\mu-1}}{(2\mu-1)!} \cdot \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\, 2^{2\nu-1}$$

$$\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot \frac{1}{y^{2\nu}} \cdot dy.$$

Die in Betracht fallende Potenz $\frac{1}{y}$ erhält man, da die allgemeine Potenz im Integranden $y^{2\mu-1-2\nu}$ ist, durch die Setzung $2\mu - 1 - 2\nu = -1$, also $\nu = \mu$. Dann wird der Koeffizient von $\frac{1}{y}$ im Integranden:

$$\left[\frac{1}{y}\right] = (-1)^{\nu-1}\, 2^{2\nu-1} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!\,(2\nu-1)!}$$

woraus dann:

$$k_\lambda = \sum_{1}^{\lambda}{}_\nu (-1)^{\nu-1} \cdot 2^{2\nu} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu-1)!} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}$$

Man erhält demgemäss eine erste Form der Entwicklung:

$$\sin(x) = 2 \cdot \overset{1}{\Pi}(x) + \frac{16}{1 \cdot 3} \cdot \overset{2}{\Pi}(x) + \frac{78}{1 \cdot 3 \cdot 5} \cdot \overset{3}{\Pi}(x) +$$

$$+ \frac{64}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \overset{4}{\Pi}(x) + + \ldots \text{ inf.}$$

$$= \sum_{1}^{\infty}{}_\lambda \sum_{1}^{\lambda}{}_\nu (-1)^{\nu-1} \cdot 2^{2\nu} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu-1)!} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x) \tag{45.}$$

Um die unmittelbar nach Produkten von J-Funktionen fortschreitende Reihe zu erhalten, bildet man die Koeffizienten:

$$a_1 = (k_1 - 2k_0) = 2; \quad a_2 = (k_2 - k_1) = \frac{10}{3};$$

$$a_3 = (k_3 - k_2) = -\frac{2}{1 \cdot 3 \cdot 5}; \quad a_4 = (k_4 - k_3) = -\frac{482}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \quad - - -$$

allgemein $\quad a_\lambda = (k_\lambda - k_{\lambda-1})$.

Nun ist

$$k_\lambda = \sum_{1}^{\lambda}{}_\nu (-1)^{\nu-1} 2^{2\nu} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!\,(2\nu-1)!}$$

$$k_{\lambda-1} = \sum_{1}^{\lambda-1}{}_\nu (-1)^{\nu-1} 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda-1}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu-1)!\,(2\nu-1)!}$$

dann wird

$$a_\lambda = (k_\lambda - k_{\lambda-1}) = \sum_{1}^{\lambda-1}{}_\nu (-1)^{\nu-1} \cdot 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu-1)!} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{\lambda\cdot(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}-\frac{(\lambda+\nu-2)!\,(\lambda-1)!}{(\lambda-\nu-1)!}\right\}+$$

$$+(-1)^{\lambda-1}\cdot 2^{2\lambda}\cdot\frac{\lambda!\,\lambda!}{(2\lambda-1)!\,(2\lambda)!}\cdot\frac{\lambda\cdot(2\lambda-1)!}{\lambda}$$

Der Term in der Klammer kann reduziert werden zu:

$$\frac{\lambda(\lambda+\nu-1!)}{(\lambda-\nu)!}-\frac{(\lambda+\nu-2)!\,(\lambda-1)!}{(\lambda-\nu-1)!}=\frac{\lambda\cdot(\lambda+\nu-2)!\,(\lambda+\nu-1)}{(\lambda-\nu-1)!\,(\lambda-\nu)}-$$

$$-\frac{(\lambda-1)\,(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu-1)!}$$

$$=\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu-1)!}\cdot\left\{\frac{\lambda\cdot(\lambda+\nu-1)}{(\lambda-\nu)}-(\lambda-1)\right\}$$

$$=\nu\cdot(2\lambda-1)\cdot\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}$$

Ferner ist

$$(-1)^{\lambda-1}\,2^{2\lambda}\,\frac{\lambda!\,\lambda!}{(2\lambda-1)!\,(2\lambda)!}\cdot\frac{\lambda(2\lambda-1)!}{\lambda}=(-1)^{\lambda-1}\cdot 2^{2\lambda}\cdot\frac{\lambda!\,\lambda!}{(2\lambda)!}$$

Nach diesen Reduktionen wird:

$$a_\lambda=(k_\lambda-k_{\lambda-1})=\sum_{1}^{\lambda-1}{}_{\nu}\;(-1)^{\nu-1}\,2^{2\nu}\,\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu-1)!\,(2\nu)!}(2\lambda-1)\cdot$$

$$\cdot\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}+(-1)^{\lambda-1}\,2^{2\lambda}\,\frac{\lambda!\,\lambda!}{(2\lambda)!}$$

Der letzte Term kann ebenfalls unter das Summenzeichen genommen werden, sodass man für den Entwicklungskoeffizienten a_λ der unmittelbar nach Produkten von Bessel'schen Funktionen fortschreitenden Reihe die einfache Formel hat:

$$\underline{a_\lambda=\sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\;(-1)^{\nu-1}\cdot 2^{2\nu}\,\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu-1)!\,(2\nu)!}\,(2\lambda-1)\cdot\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}}$$

Die Reihe selber wird dann:

$$\sin(x) = 2\,\overset{0}{J}(x)\cdot\overset{1}{J}(x) + \frac{10}{1\cdot 3}\cdot\overset{1}{J}(x)\cdot\overset{2}{J}(x) - \frac{2}{1\cdot 3\cdot 5}\cdot\overset{2}{J}(x)\cdot\overset{3}{J}(x) -$$

$$- \frac{482}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\cdot\overset{3}{J}(x)\,\overset{4}{J}(x) + + - - \ldots \text{inf.}$$

$$= \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\,(2\lambda - 1)\cdot\overset{\lambda-1}{J}(x)\cdot\overset{\lambda}{J}(x)\cdot\sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\,(-1)^{\nu-1}\cdot 2^{2\nu}\cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu-1)!\,(2\nu)!}\cdot\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!} \qquad (45a.)$$

Um die Konvergenz der obigen Reihe nachzuweisen, bildet man entsprechend dem bisherigen Verfahren den Quotienten

$$\frac{|n_{\lambda-1}|}{|n_\lambda|}$$

und weist nach, dass er von einem beliebigen, endlichen λ kleiner wird als eins. Die zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten a_λ dienenden, endlichen Reihen haben bei wechselndem Vorzeichen Summenglieder, die wachsen bis zu einem bestimmten Wert der Laufzahl ν, um nachher wieder abzunehmen. Wir führen eine Untersuchung durch, die derjenigen bei der Cosinusreihe entspricht. Man hat wieder in zwei Fällen zu unterscheiden, 1) λ gerade, $\lambda = 2n$, 2) λ ungerade, $\lambda = 2n + 1$. Die Untersuchung des ersten Falles wird dann:

1. Fall: $\lambda = 2n$. Der allgemeine, absolut genommene Term der Reihe für a_λ:

$$a_\lambda = \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\,(-1)^{\nu-1}\,2^{2\nu}\,\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu-1)!\,(2\nu)!}(2\lambda-1)\cdot\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}$$

wird:

$$2^{2\nu}\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu-1)!\,(2\nu)!}\cdot(2\lambda-1)\,\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}$$

Man setze darin $\nu = \frac{\lambda}{2}$; dann kommt:

$$2^{\lambda} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)!\left(\frac{\lambda}{2}\right)!}{(\lambda-1)!\ \lambda!}(2\lambda-1) \cdot \frac{\left\{\lambda+\frac{\lambda}{2}-2\right\}!}{\left\{\lambda-\frac{\lambda}{2}\right\}!}$$

oder $\lambda = 2n$ gesetzt:

$$2^{2n} \cdot \frac{n!\,n!}{(2n-1)!\,(2n)!}(4n-1)\frac{(3n-2)!}{n!} \qquad \text{(A.)}$$

Das unmittelbar nachfolgende Glied erhält man durch die Setzung:

$$\nu = \frac{\lambda}{2} + 1 = \frac{\lambda+2}{2}$$

dann wird der allgemeine Term absolut genommen:

$$2^{\lambda+2} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)!\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)!}{(\lambda+1)!\,(\lambda+2)!} \cdot (2\lambda-1) \cdot \frac{\left\{\lambda+\frac{\lambda+2}{2}-2\right\}!}{\left\{\lambda-\frac{\lambda+2}{2}\right\}!}$$

für $\lambda = 2n$ gesetzt:

$$2^{2n+2} \cdot \frac{(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+1)!\,(2n+2)!}(4n-1) \cdot \frac{(3n-1)!}{(n-1)!} \qquad \text{(C.)}$$

Das unmittelbar vorangehende Glied erhält man durch die Setzung:

$$\nu = \frac{\lambda}{2} - 1 = \frac{\lambda-2}{2}$$

dann wird der allgemeine Term absolut genommen:

$$2^{\lambda-2} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda-2}{2}\right)!\left(\frac{\lambda-2}{2}\right)!}{(\lambda-3)!\,(\lambda-2)!}(2\lambda-1) \cdot \frac{\left\{\lambda+\frac{\lambda-2}{2}-2\right\}!}{\left\{\lambda-\frac{\lambda-2}{2}\right\}!}$$

oder für $\lambda = 2n$ gesetzt:

$$2^{2n-2} \cdot \frac{(n-1)!\,(n-1)!}{(2n-3)!\,(2n-2)!}\,(4n-1)\cdot\frac{(3n-3)!}{(n+1)!} \qquad (B.)$$

Bildet man den Quotienten aus (A) und (B), so wird dieser:

$$\frac{(B)}{(A)} = \frac{4\cdot(\lambda-2)\cdot(\lambda-1)\cdot(\lambda-1)}{\lambda\cdot(\lambda+2)\cdot(3\lambda-4)}$$

Der Quotient aus (C) und (A) wird:

$$\frac{(C)}{(A)} = \frac{(\lambda+2)\,(3\lambda-2)}{4\,(\lambda+1)^2}$$

Wie leicht zu kontrollieren ist, der Quotient $\frac{(C)}{(A)}$ für alle Werte von $\lambda = 2n$, $n = 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots$ kleiner als eins, d. h. für alle Werte λ ist $|A| > |C|$. In der Summenformel für a_λ ist demnach das Glied, in welchem die Laufzahl ν ersetzt ist durch $\nu = \frac{\lambda}{2}$, grösser als alle folgenden Glieder. Der Quotient aus (B) und (A) ist für alle Werte von $\lambda = 2n$, die innerhalb $2 \lesseqgtr 2n \lesseqgtr 16$ liegen, kleiner als eins. Man erhält für $\lambda = 16$

$$\frac{(B)}{(A)} = \frac{4\cdot 14\cdot 15\cdot 15}{16\cdot 18\cdot 44} = \frac{175}{176} < 1; \text{ d. h. } |A| > |B|$$

d. h. In der Summenformel für a_λ ist das Glied, in welchem die Laufzahl ν ersetzt ist durch $\nu = \frac{\lambda}{2}$, grösser als alle nachfolgenden Glieder für alle Werte von $\lambda = 2n$, und gleichzeitig grösser als alle vorangehenden Glieder für alle Werte von λ, die im Intervall $2 \lesseqgtr 2n \lesseqgtr 16$ liegen.

Man setzt nunmehr $\nu = \frac{\lambda-2}{2} - 1 = \frac{\lambda-4}{2}$; dann wird der allgemeine, absolut genommene Term:

$$2^{\lambda-4}\cdot\frac{\left(\frac{\lambda-4}{2}\right)!\left(\frac{\lambda-4}{2}\right)!}{(\lambda-5)!\,(\lambda-4)!}\,(2\lambda-1)\cdot\frac{\left\{\lambda+\frac{\lambda-4}{2}-2\right\}!}{\left\{\lambda-\frac{\lambda-4}{2}\right\}!}$$

Setze $\lambda = 2\,n$

$$2^{2n-4}\,\frac{(n-2)!\,(n-2)!}{(2n-5)!\,(2n-4)!}\,(4n-1)\cdot\frac{(3n-4)!}{(n+2)!} \qquad (B_1)$$

Der Quotient aus B_1 und B wird dann:

$$\frac{B_1}{B} = \frac{4\cdot(\lambda-4)\cdot(\lambda-3)^2}{3\cdot(\lambda+4)\cdot(\lambda-2)^2}$$

Der Quotient ist kleiner als eins für alle Werte von $\lambda = 2\,n$, die im Intervall $18 \lesseqgtr 2\,n \lesseqgtr 34$ liegen. Man erhält für $\lambda = 34$:

$$\frac{B_1}{B} = \frac{4\cdot 30\cdot 31\cdot 31}{3\cdot 38\cdot 31\cdot 32} = \frac{9610}{9728} < 1;\ \text{d. h.}\ |B| > |B_1|$$

für $\lambda = 36$

$$\frac{B_1}{B} = \frac{4\cdot 32\cdot 33\cdot 33}{3\cdot 40\cdot 34\cdot 34} = \frac{11616}{11560} > 1;\ \text{d. h.}\ |B_1| > |B|$$

Im Intervall $18 \lesseqgtr 2\,n \lesseqgtr 34$ ist demnach in der Reihe für a_λ das Glied, für welches die Laufzahl ν ersetzt ist durch $\nu = \frac{\lambda-4}{2}$, absolut genommen das grösste.

Setzt man $\nu = \frac{\lambda-6}{2}$, dann wird der Quotient aus dem Glied (B_2) und dem nächstfolgendem (B_1):

$$\frac{(B_2)}{(B_1)} = \frac{4\cdot(\lambda-6)\,(\lambda-5)^2}{(\lambda+6)\cdot(\lambda-4)\,(3\,\lambda-8)}$$

Für alle Werte von $\lambda = 2\,n$ im Intervall $36 \lesseqgtr 2\,n \lesseqgtr 60$ ist das Glied das grösste, in welchem die Laufzahl ν ersetzt ist durch $\nu = \frac{\lambda-6}{2}$. Eine weitergehende, diesbezügliche Untersuchung bietet nichts wesentlich Neues. Es genügt, die Abhängigkeit der Laufzahl ν des grössten Gliedes von der Grösse der Laufzahl λ nachgewiesen zu haben.

Man betrachtet nunmehr den zweiten Fall, wo λ ungerade ist.

2. λ ungerade, $\lambda = 2\,n + 1$.

Der allgemeine absolut genommene Term aus der Reihe für a_λ:

$$2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu-1)!\,(2\nu)!} (2\lambda-1) \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}$$

wird, wenn man darin ν ersetzt durch $\nu = \frac{\lambda+1}{2}$ zu:

$$2^{\lambda+1} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)!\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)!}{\lambda!\,(\lambda+1)!} \cdot (2\lambda-1) \frac{\left\{\lambda+\frac{\lambda-1}{2}-2\right\}!}{\left\{\lambda-\frac{\lambda+1}{2}\right\}!}$$

Setze $\lambda = 2n+1$:

$$2^{2n+2} \frac{(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+1)!\,(2n+2)!} \cdot 4n \cdot \frac{(3n)!}{n!} \qquad (A^1)$$

Das unmittelbar vorangehende Glied erhält man durch die Setzung

$$\nu = \frac{\lambda+1}{2} - 1 = \frac{\lambda-1}{2}$$

dann wird der allgemeine Term:

$$2^{2n} \frac{n!\,n!}{(2n-1)!\,(2n)!} 4n \frac{(3n-1)!}{(n+1)!} \qquad (B^1)$$

Das unmittelbar nachfolgende Glied erhält man durch die Setzung

$$\nu = \frac{\lambda+1}{2} + 1 = \frac{\lambda+3}{2}$$

dann wird der allgemeine Term:

$$2^{2n+4} \frac{(n+2)!\,(n+2)!}{(2n+3)!\,(2n+4)!} 4n \frac{(3n-1)!}{(n-1)!} \qquad (C^1)$$

Der Quotient aus (A^1) und (C^1) wird:

$$\frac{C^1}{A^1} = \frac{\lambda \cdot (\lambda+4)\,(3\lambda+4)}{4 \cdot (\lambda+2) \cdot (\lambda+3)^2}$$

Wie man sich leicht überzeugt, ist dieser Quotient für alle Werte von $\lambda = 2n$ kleiner als eins; d. h. $|A^1| > |C^1|$.

Der Quotient aus (B^1) und (A^1) wird:

$$\frac{B^1}{A^1} = \frac{4(\lambda+1)^2}{3\cdot(\lambda+2)^2}$$

Dieser Quotient ist kleiner als eins für die Werte $\lambda = 1$, $\lambda = 3$ und $\lambda = 5$, d. h. für diese Werte ist $|A^1| > |B^1|$. Zusammenfassend kann man sagen:

Für alle Werte von $\lambda = 2n + 1$, $n = 0, 1, 2, 3 \ldots . \infty$, ist in der Reihe zur Bestimmung der Koeffizienten a_λ das Glied, in welchem die Laufzahl ν ersetzt ist durch $\nu = \frac{\lambda+1}{2}$, grösser als alle nachfolgenden Glieder. Im Intervall $1 \lesseqgtr 2n + 1 \lesseqgtr 5$ ist dieses Glied gleichzeitig grösser als alle vorangehenden.

Der Quotient aus dem Gliede B'_1, in welchem ν ersetzt ist durch $\nu = \frac{\lambda - 3}{2}$, und dem Glied B^1, in welchem ν ersetzt ist durch $\nu = \frac{\lambda - 1}{2}$, wird nun:

$$\frac{B'_1}{B^1} = \frac{4\cdot(\lambda-2)\cdot(\lambda-1)^2}{\lambda\cdot(\lambda+4)\cdot(3\lambda-2)}$$

Dieser Quotient ist kleiner als eins bis und mit $\lambda = 23$; d. h. das Glied B^1, in welchem ν ersetzt ist durch $\nu = \frac{\lambda - 1}{2}$, ist für alle Werte von $\lambda = 2n + 1$ im Intervall $7 \lesseqgtr 2n + 1 \lesseqgtr 23$, grösser als alle vorangehenden und alle nachfolgenden Glieder. Entsprechend gestalten sich die weiteren Untersuchungen, die nichts wesentlich Neues bringen. Wenn wir nun die Konvergenz der Reihe (45a.) für $\sin(x)$ nachweisen wollen, so gehen wir gleich vor wie beim Konvergenzbeweis der Reihe für $\cos(x)$. Wir denken uns in der Summenformel für a_λ wiederum ν ersetzt durch $\nu = \frac{\lambda - 1000}{2}$, womit man jedenfalls ziemlich grosse gerade Werte von λ erreicht und entsprechend mit $\nu = \frac{\lambda - 1001}{2}$ wird man grosse ungerade Werte von λ erreichen; setzt man überall für $\lambda = 2n$ resp. $\lambda = 2n + 1$, dann wird im ersten Fall $\nu = (n - 500)$, im zweiten Fall $\nu = (n - 500)$.

Dann wird der allgemeine Term $a_\lambda = a_{2n}$ absolut genommen:

$$2^{2n-1000} \frac{(n-500)!\,(n-500)!}{(2n-999)!\,(2n-1000)!} \cdot (4n-1) \cdot \frac{(3n-502)!}{(n+500)!}$$

Nimmt man den grössten Term des Produktes $\overset{\lambda-1}{J}(x)\,\overset{\lambda}{J}(x)$, also

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+1}}{\lambda!\,(\lambda+1)!}$$

dazu, dann ist

$$\left| a_\lambda \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x)\,\overset{\lambda}{J}(x) \right| < \left| 2^{2n-1000} \frac{(n-500)!\,(n-500)!}{(2n-1001)\,(2n-1000)!} (4n-1) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{(3n-502)!}{(n+500)} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{4n+1}}{(2n)!\,(2n+1)!} \right|$$

Analog für ungerades $\lambda = 2n + 1$.

$$\left| a_{\lambda+1} \overset{\lambda}{J}(x)\,\overset{\lambda+1}{J}(x) \right| < \left| 2^{2n-1000} \frac{(n-500)!\,(n-500)!}{(2n-1001)!\,(2n-1000)!} \cdot 4n \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{(3n-501)!}{(n+501)!} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{4n+2}}{(2n+1)!\,(2n+2)!} \right|$$

Der Quotient wird dann:

$$\frac{\left| a_{\lambda+1} \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x) \right|}{\left| a_\lambda \overset{\lambda-1}{J}(x)\,\overset{\lambda}{J}(x) \right|} < \frac{n \cdot (3n-501) \cdot x}{(n+501)\,(2n+1)\,(n+1)\,(4n-1)}$$

$$< \frac{(\lambda-1)\,(3\lambda-1005) \cdot x}{\lambda(\lambda+1)\,(2\lambda-1) \cdot (\lambda+1001)}$$

Für $\lambda = 400$ erhält man angenähert den Wert der Quotienten zu: $1 : 2{,}5 \cdot 10^6$.

Die Reihe

$$\sin x = \sum_{1}^{\infty} \lambda\ a_\lambda \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x)$$

wo

$$a_\lambda = \sum_{1}^{\lambda} \nu\ (-1)^{\nu-1}\, 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu-1)!\,(2\nu)!} \cdot (2\lambda - 1) \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}$$

ist demnach absolut konvergent für alle endlichen Werte von x.

---

2. Aufstellung der Reihe für tg (x).

$$f(x) = \operatorname{tg}(x);\ \ f(y) = \operatorname{tg}(y)$$

$$\operatorname{tg}(x) = \sum_{1}^{\infty} \lambda\ k_\lambda \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x), \quad \text{wo } k_\lambda = \frac{2}{2 i \pi} \cdot \int \operatorname{tg}(y)\, \overset{\lambda}{P}(y) \cdot dy$$

Auf relativ einfache Art erhält man die einzelnen Entwicklungskoeffizienten k_λ, wenn man ausgeht von der Darstellung von tg (y) durch die Potenzreihe. Es gilt:

$$\operatorname{tg}(y) = y + \frac{1}{3} y^2 + \frac{2}{3 \cdot 5} \cdot y^5 + \frac{17}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} y^7 + \frac{62}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 9} \cdot y^9 +$$
$$+ \frac{1382}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} \cdot y^{11} + + \ldots \text{inf.}$$

gültig für $\quad -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$

Die einzelnen Koeffizienten k_λ bestimmen sich nun:

$$k_1 = \frac{2}{2 i \pi} \cdot \int \operatorname{tg}(y)\, \overset{1}{P}(y) \cdot dy = \frac{2}{2 i \pi} \int \left\{ y + \frac{1}{3} \cdot y^3 + \ldots \right\} \cdot \frac{1}{y^2}\, dy = 2$$

$$k_2 = \frac{2}{2 i \pi} \cdot \int \cdot \operatorname{tg}(y) \cdot \overset{2}{P}(y)\, dy = \frac{2}{2 i \pi} \cdot \int \left\{ y + \frac{1}{3} y^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{3 \cdot 5} \cdot y^5 + \ldots \right\} \left\{ \frac{4}{y^2} + \frac{8}{y^4} \right\} \cdot dy = \frac{40}{1 \cdot 3}$$

$$k_3 = \frac{2}{2i\pi}\int tg(y)\cdot \overset{3}{P}(y)\,dy = \frac{2}{2i\pi}\cdot\int\cdot\left\{y+\frac{1}{3}y^3+\frac{2}{3\cdot 5}\cdot y^5+\right.$$

$$\left.+\frac{17}{3^2\cdot 5\cdot 7}\cdot y^7+\ldots\right\}\left\{\frac{9}{y^2}+\frac{48}{y^4}+\frac{192}{y^6}\right\}\cdot dy = \frac{1518}{1\cdot 3\cdot 5}$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — —

Daraus bildet man die Reihe:

$$\left.\begin{array}{l} tg(x) = 2\,\overset{1}{\Pi}(x) + \frac{40}{1\cdot 3}\cdot\overset{2}{\Pi}(x) + \frac{1518}{1\cdot 3\cdot 5}\cdot\overset{3}{\Pi}(x) + \\ + \frac{162016}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\cdot\overset{4}{\Pi}(x) + \frac{45867250}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\cdot\overset{5}{\Pi}(x) + + \ldots \text{inf.} \\ \text{oder} \\ tg(x) = 2\cdot\overset{0}{J}(x)\overset{1}{J}(x) + \frac{34}{1\cdot 3}\overset{1}{J}(x)\overset{2}{J}(x) + \frac{1318}{1\cdot 3\cdot 5}\cdot\overset{2}{J}(x)\overset{3}{J}(x) + \\ + \frac{152390}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\cdot\overset{3}{J}(x)\cdot\overset{4}{J}(x) + \frac{44409106}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\cdot\overset{4}{J}(x)\overset{5}{J}(x) + + \ldots \text{inf.} \end{array}\right\} (46.)$$

Um jedoch eine allgemeine Darstellung zu erhalten, geht man aus von der Entwicklung für tg(y) vermittelst Bernoulli'scher Zahlen. Man hat nämlich:

$$tg(y) = \sum_{1}^{\infty} r\; 2^{2r}(2^{2r}-1)\cdot B_r\cdot\frac{y^{2r-1}}{(2r)!}$$

$$\text{gültig für } -\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}$$

Dabei bedeutet B_r die r.te Bernoulli'sche Zahl, die sich bestimmt aus:

$$B_r = (-1)^{r-1}(2r)!\,C_{2r}$$

und für die Bestimmung der Konstanten C_r gilt die Rekursionsformel:

$$\sum_{1}^{r} n\,\frac{C_r - n}{n!} = 0, \text{ mit Ausnahme von } C_0 = 1.$$

Im besonderen sind die Werte der ersten fünf von J. Bernoulli berechneten B-Zahlen die folgenden:

$$B_1 = \frac{1}{6}; \quad B_2 = \frac{1}{30}; \quad B_3 = \frac{1}{42}; \quad B_4 = \frac{1}{30}; \quad B_5 = \frac{5}{66}$$

Um den allgemeinen Koeffizienten k_λ zu bestimmen, geht man aus von:

$$k_\lambda = \frac{2}{2i\pi} \cdot \int \sum_1^\lambda {}_\nu \, 2^{2\nu-1} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot \frac{1}{y^{2\nu}} \cdot$$

$$\sum_1^\infty {}_r \, 2^{2r}(2^{2r}-1) B_r \cdot \frac{y^{2r-1}}{(2r)!} dy$$

Die allgemeine Potenz im Integranden ist $y^{2r-1-2\nu}$; um die einzig in Betracht kommende Potenz $\frac{1}{y} = y^{-1}$ zu erhalten, setzt man $2r - 1 - 2\nu = 1$, $r = \nu$. Dann wird der Koeffizient von y^{-1} im Integranden zu:

$$\left[\frac{1}{y}\right] = \sum_1^\lambda {}_\nu \, 2^{2\nu-1} \cdot 2^{2\nu} (2^{2\nu}-1) \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}$$

woraus dann

$$k_\lambda = \sum_1^\lambda {}_\nu \, 2^{4\nu} \cdot (2^{2\nu}-1) \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}$$

und daher (47)

$$\underline{\operatorname{tg}(x) = \sum_1^\infty {}_\lambda \, k_\lambda \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x)}$$

wo k_λ durch die obige Formel bestimmt ist.

Man bildet ferner:

$$a_\lambda = (k_\lambda - k_{\lambda-1})$$

$$k_\lambda = \sum_1^\lambda {}_\nu \, 2^{4\nu} \cdot (2^{2\nu}-1) \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot B_\nu$$

$$k_{\lambda-1} = \sum_{1}^{\lambda-1}{}_{\nu}\; 2^{4\nu}(2^{2\nu}-1)\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu!)}\cdot\frac{\lambda-1}{\nu}\cdot\frac{\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu-1)!}\cdot B_{\nu}$$

$$a_{\lambda} = (k_{\lambda} - k_{\lambda-1})$$

$$= \sum_{1}^{\lambda-1}{}_{\nu}\; 2^{4\nu}(2^{2\nu}-1)\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!}\cdot\frac{1}{\nu}\cdot B_{\nu}\left\{\frac{\lambda(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} - \frac{(\lambda-1)(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu-1)!}\right\}$$

$$+ 2^{4\lambda}(2^{2\lambda}-1)\cdot\frac{\lambda!\,\lambda!}{(2\lambda)!\,(2\lambda)!}\cdot(2\lambda-1)!\,B_{\lambda}$$

$$\left\{\frac{\lambda(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} - \frac{(\lambda-1)(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu-1)!}\right\} = \nu\cdot(2\lambda-1)\cdot\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}$$

$$a_{\lambda} = \sum_{1}^{\lambda-1}{}_{\nu}\; 2^{4\nu}(2^{2\nu}-1)\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!}(2\lambda-1)\cdot\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}\cdot B_{\nu}$$

$$+ 2^{4\lambda}\cdot(2^{2\lambda}-1)\cdot\frac{\lambda!\,\lambda!}{(2\lambda)!\,(2\lambda)!}(2\lambda-1)!\,B_{\lambda}$$

Der letzte Term kann ebenfalls unter das Summenzeichen gesetzt werden. Daher wird nun:

$$a_{\lambda} = \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\; 2^{4\nu}(2^{2\nu}-1)\cdot\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!}(2\lambda-1)\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}\cdot B_{\nu}$$

Die gesuchte Entwicklung nimmt schliesslich die Form an:

$$\mathrm{tg}\,(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\;(2\lambda-1)\cdot\overset{\lambda-1}{J}(x)\,\overset{\lambda}{J}(x)\cdot\sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\; 2^{4\nu}(2^{2\nu}-1)\cdot$$

$$\cdot\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!}\;\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}\cdot B_{\nu} \qquad (47\,a.)$$

In der Formel (47 a.) ist die sogenannte innere Summe der folgende Ausdruck:

$$\sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\; 2^{4\nu}\cdot(2^{2\nu}-1)\cdot\frac{\nu!\;\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!}\;\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}\cdot B_\nu$$

Es sind λ-Summanden, die alle positiv. Im Gegensatz zu den innern Summen bei der Reihe für sin (x) und cos (x) ist hier der letzte Summand, d. h. wenn $\lambda=\nu$ gesetzt wird, der grösste, was bei den letzteren nicht zutrifft. Gibt man ν den Wert λ, so ist dieser letzte Summand der grösste und dann ist offenbar:

$$\sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\; 2^{4\nu}\cdot(2^{2\nu}-1)\frac{\nu!\;\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!}\;\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}\cdot B_\nu<\lambda\cdot$$
$$\cdot\left\{2^{4\lambda}\,(2^{2\lambda}-1)\cdot\frac{\lambda!\,\lambda!\,(2\lambda-2)!}{(2\lambda)!\,(2\lambda)!}\,B_\lambda\right\}$$

Nimmt man den grössten Term des Produktes $\overset{\lambda-1}{J}(x)\cdot\overset{\lambda}{J}(x)$ dazu, also:

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-1}}{\lambda!\,(\lambda-1)!}$$

dann wird:

$$\left|a_\lambda\cdot\overset{\lambda-1}{J}(x)\cdot\overset{\lambda}{J}(x)\right|<\lambda\cdot 2^{4\lambda}\,(2^{2\lambda}-1)\,\frac{\lambda\cdot(2\lambda-2)!}{(2\lambda)!\;(2\lambda)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-1}\cdot B_\lambda$$

Das unmittelbar nachfolgende Glied in der Reihe (47 a.) wird analog:

$$\left|a_{\lambda+1}\,\overset{\lambda}{J}(x)\,\overset{\lambda+1}{J}(x)\right|<2^{4\lambda+2}\cdot(2^{2\lambda+2}-1)\cdot$$
$$\cdot\frac{(\lambda+1)^2\cdot(2\lambda)!}{(2\lambda+2)!\,(2\lambda+2)!}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+1}B_{\lambda+1}$$

Der Quotient:

$$\frac{\left|a_{\lambda+1}\cdot\overset{\lambda}{J}(x)\cdot\overset{\lambda+1}{J}(x)\right|}{\left|a_\lambda\,\overset{\lambda-1}{J}(x)\,\overset{\lambda}{J}(x)\right|}<\frac{2\cdot(2^{2\lambda+2}-1)\,(\lambda+1)^2\cdot(2\lambda-1)}{(2^{2\lambda}-1)\,(2\lambda+1)^2\,\lambda^3}\cdot$$
$$\cdot\frac{B_{\lambda+1}}{B_\lambda}\cdot x^2$$

Der Quotient

$$\frac{2\cdot(2^{2\lambda+2}-1)}{(2^{2\lambda}-1)}$$

kann ohne grossen Fehler gleich 8 gesetzt werden, der dadurch bedingte Fehler nimmt mit wechselndem λ ab. Macht man für x ausserdem zur Bedingung, dass $-1 \gtreqless x \gtreqless +1$, dann ist der Quotient

$$\frac{8\cdot(\lambda+1)^2\cdot(2\lambda-1)}{(2\lambda+1)^2\lambda^3}\cdot\frac{B_{\lambda+1}}{B_\lambda}\cdot x^2$$

für alle Werte von λ kleiner als eins womit die Konvergenz der Reihe (47a.) für tg (x) nachgewiesen ist.

---

3. Aufstellung der Reihe für cotg (x).

Diese Funktion ist im Nullpunkt unstetig. Sie ist definiert für das Gebiet eines Kreisringes, und daher hat man die allgemeine Formel (41.) anzuwenden, also

$$\operatorname{cotg}(x)=\sum_1^\infty{}^\lambda\, k_\lambda \overset{\lambda}{\Pi}(x)+\sum_1{}^\lambda\, \mu_\lambda\cdot\overset{\lambda}{P}(x)$$

worin

$$k_\lambda=\frac{2}{2i\pi}\cdot\int f(y)\cdot\overset{\lambda}{P}(y)\cdot dy$$

$$\mu_\lambda=\frac{2}{2i\pi}\cdot\int f(y)\cdot\overset{\lambda}{\Pi}(y)\cdot dy$$

Die Unstetigkeit der Funktion im Nullpunkt erkennt man übrigens aus der Potenzreihenentwicklung, indem

$$\operatorname{cotg}(y)=\frac{1}{y}-\frac{1}{3}y-\frac{1}{3^2\cdot5}\cdot y^3-\frac{2}{3^3\cdot5\cdot7}\cdot y^5-$$

$$-\frac{1}{3^2\cdot5^2\cdot7}\cdot y^7-\,-\,\ldots\ldots\quad \text{inf.}$$

oder

$$=\frac{1}{y}-\sum_1^\infty{}^r\, 2^{2r}\cdot B_r\cdot\frac{y^{2r-1}}{(2r)!},\quad \text{gültig für } -\pi<x<+\pi$$

Setzt man, wie aus der Bestimmungsformel für die Bernoulli'schen Zahlen B_r für $r = o$ direkt hervorgeht, $B_0 = -1$, so kann man die Potenzreihe auch schreiben:

$$\cotg(y) = -\sum_0^\infty{}_r\, 2^{2r} \cdot B_r \frac{y^{2r-1}}{(2r)!} = -\sum_1^\infty{}_r\, 2^{2r-2} \cdot B_{r-1} \frac{y^{2r-3}}{(2r-2)!}$$

Zur Bestimmung des allgemeinen Koeffizienten k_λ hat man demnach:

$$k_\lambda = \frac{2}{2i\pi} \cdot \int \cotg(y) \cdot \overset{\lambda}{P}(y) \cdot dy$$

$$= \frac{2}{2i\pi} \cdot \int \sum_1^\lambda{}_\nu\, 2^{2\nu-1} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot \frac{1}{y^{2\nu}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \sum_1^\infty{}_r\, 2^{2r-2} B_{r-1} \frac{y^{2r-3}}{(2r-2)!} \right\} \cdot dy$$

Die einzig in Betracht fallende Potenz $y^{-1} = \frac{1}{y}$ erhält man, weil die allgemeine Potenz im Integranden $y^{2r-3-2\nu}$ ist, durch die Setzung $2r - 3 - 2\nu = -1$, $r = \nu + 1$. Dann wird im Integranden der Koeffizient von $\frac{1}{y}$ zu:

$$\left[\frac{1}{y}\right] = -\sum_1^\lambda{}_\nu\, 2^{2\nu}\, 2^{2\nu-1} \cdot B_\nu \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}$$

woraus sofort

$$\underline{k_\lambda = -\sum_1^\lambda{}_\nu\, 2^{4\nu} \cdot B_\nu \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}}$$

Wie ersichtlich, ist diese Bestimmungsformel dieselbe, wie die oben bei der Entwicklung für $tg(x)$ erhaltene, bis auf den hier fehlenden Faktor $(2^{2\nu} - 1)$.

Die Potenzreihenentwicklung für cotg (y) enthält nur ein einziges Glied, das erste, das eine negative Potenz aufweist. Man kann daher Umgang nehmen von der Bestimmung des allgemeinen Koeffizienten μ_λ und sich beschränken auf die Ausmittelung dieses einen Koeffizienten. Die Funktion $\overset{\lambda}{\Pi}(y)$ ist nach (35.) definiert durch die Formel:

$$\overset{\lambda}{\Pi}(y) = \overset{\lambda}{J}(y)\left\{\overset{\lambda-1}{J}(y) - \overset{\lambda+1}{J}(y)\right\} = \overset{\lambda-1}{J}(y)\cdot\overset{\lambda}{J}(y) - \overset{\lambda}{J}(y)\cdot\overset{\lambda+1}{J}(y)$$

Die Funktion f (y) ist hier $\frac{1}{y}$. Demnach wird nun:

$$\mu_\lambda = \frac{2}{2\,i\,\pi}\cdot\int\frac{1}{y}\left\{\overset{\lambda-1}{J}(y)\cdot\overset{\lambda}{J}(y) - \overset{\lambda}{J}(y)\cdot\overset{\lambda+1}{J}(y)\right\}\cdot d\,y$$

$$= \frac{2}{2\,i\,\pi}\cdot\int\frac{1}{y}\cdot\overset{\lambda-1}{J}(y)\cdot\overset{\lambda}{J}(y)\cdot d\,y - \frac{2}{2\,i\,\pi}\cdot\int\frac{1}{y}\cdot\overset{\lambda}{J}(y)\cdot\overset{\lambda+1}{J}(y)\cdot d\,y$$

Nach der schon öfters zitierten Formel von J. J. Schönholzer

$$\overset{a}{J}(x)\,\overset{b}{J}(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\;(-1)^{\mu}\,\frac{\Gamma(a+b+2\mu+1)}{\Gamma(a+\mu+1)\cdot\Gamma(b+\mu+1)}\cdot\frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{a+b+2\mu}}{\mu!\;\Gamma(a+b+\mu+1)}$$

wird nunmehr:

$$\overset{\lambda-1}{J}(y)\,\overset{\lambda}{J}(y) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\;(-1)^{\mu}\,\frac{\Gamma(2\lambda+2\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)\cdot\Gamma(\lambda+\mu+1)}\cdot\frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{2\lambda+2\mu-1}}{\mu!\;\Gamma(2\lambda+\mu)}$$

$$\overset{\lambda}{J}(y)\cdot\overset{\lambda+1}{J}(y) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\;(-1)^{\mu}\cdot\frac{\Gamma(2\lambda+2\mu+2)}{\Gamma(\lambda+\mu+1)\cdot\Gamma(\lambda+\mu+2)}\cdot\frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{2\lambda+2\mu+1}}{\mu!\;\Gamma(2\lambda+\mu+2)}$$

Diese Werte in die Bestimmungsformel für μ_λ eingesetzt, dann wird das erste Integral:

$$S_1 = \frac{2}{2i\pi} \cdot \sum_0^\infty {}^\mu (-1)^\mu \cdot \frac{\Gamma(2\lambda + 2\mu)}{2^{2\lambda+2\mu-1} \cdot \Gamma(\lambda+\mu) \cdot \mu!} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\Gamma(\lambda+\mu+1) \cdot \Gamma(2\lambda+\mu)} \cdot \int y^{2\lambda+2\mu-2} \cdot dy$$

Die Laufzahlen λ und μ nehmen nur ganzzahlige, positive Werte an. Aus der Art des Exponenten ist daher zu ersehen, dass die Potenz y^{-1} nicht auftreten kann, weshalb dieses Cauchy'sche Integral den Wert Null hat. $S_1 = 0$. Für das zweite Integral erhält man:

$$S_2 = -\frac{2}{2i\pi} \cdot \sum_0^\infty {}^\mu (-1)^\mu \frac{\Gamma(2\lambda + 2\mu + 2)}{2^{2\lambda+2\mu+2} \cdot \Gamma(\lambda+\mu+1) \cdot \mu!} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\Gamma(\lambda+\mu+2) \cdot \Gamma(2\lambda+\mu+2)} \cdot \int y^{2\lambda+2\mu} \cdot dy.$$

Aus gleichen Gründen wie oben muss $S_2 = 0$ sein. Nach diesen Resultaten ist also $\mu_\lambda = 0$. Nun würde diese weder mit der entsprechenden Formel bei den Neumann'schen Reihen I. Art in Analogie stehen, wie dies bei allen übrigen, bisherigen Entwicklung der Fall war, noch ist anzunehmen, dass die Entwicklung für cotg (x) lauter negative Summanden enthalten kann, wodurch sie eine sehr beschränkte Gültigkeit hätte. Es steht nun gar nichts im Wege, die gesuchte Entwicklung erst mit dem zweiten Glied zu beginnen und das erste unverändert zu belassen. Die Richtigkeit dieses Vorgehens wird dadurch bestätigt, dass, wenn man das fragliche Glied $\frac{1}{y}$ nach einer später zu behandelnden Methode von Nielsen, in eine Neumann'sche Reihe II. Art entwickelt, man zu der Identität $\frac{1}{y} = \frac{1}{y}$ kommt. Die Entwicklung für cotg (x) lautet demnach:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{cotg}(x) &= \frac{1}{x} - \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\, k_{\lambda} \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x) = \frac{1}{x} - \\ &- \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\, 2^{4\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot B_{\nu} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{2}{3} \cdot \overset{1}{\Pi}(x) - \frac{136}{3^2 \cdot 5} \cdot \overset{2}{\Pi}(x) - \frac{2818}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \overset{3}{\Pi}(x) - \\ &\qquad - \frac{44384}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} \cdot \overset{5}{\Pi}(x) - - \ldots \text{ inf.}\end{aligned}\right\} (48.)$$

Man bildet ferner $a_{\lambda} = k_{\lambda} - k_{\lambda-1}$.

$$k_{\lambda} = -\sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\, 2^{4\nu} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot B_{\nu}$$

$$= -\sum_{1}^{\lambda-1}{}_{\nu}\, 2^{4\nu} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot B_{\nu} - 2^{4\lambda} \cdot$$

$$\cdot \frac{\lambda!\,\lambda!}{(2\lambda)!} \cdot \frac{(2\lambda-1)!}{(2\lambda)!} \cdot B_{\lambda}$$

$$k_{\lambda-1} = -\sum_{1}^{\lambda-1}{}_{\nu}\, 2^{4\nu} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda-1}{\nu} \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu+1)} \cdot B_{\nu}$$

$$a_{\lambda} = k_{\lambda} - k_{\lambda-1} = -\sum_{1}^{\lambda-1}{}_{\nu} \cdot 2^{4\nu} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{B_{\nu}}{\nu} \left\{ \frac{\lambda\,(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} - \right.$$

$$\left. - \frac{(\lambda-1)\cdot(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu-1)} \right\} \cdot - 2^{4\lambda} \frac{\lambda!\,\lambda!}{(2\nu)!} \cdot \frac{(2\lambda-1)!}{(2\lambda)!} \cdot B_{\lambda}$$

$$= -\sum_{1}^{\lambda-1}{}_{\nu} \cdot 2^{4\nu} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} (2\lambda-1) \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot B_{\nu} - 2^{4\lambda} \cdot$$

$$\cdot \frac{\lambda!\,\lambda!}{(2\lambda)!} \cdot \frac{(2\lambda-1)!}{(2\lambda)!} \cdot B_{\lambda}$$

$$= -\sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu} \cdot 2^{4\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} (2\lambda - 1) \frac{(\lambda + \nu - 2)!}{(\lambda - \nu)!} \cdot B_\nu$$

Die endgültige Entwicklung wird dann:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cotg}(x) &= \frac{1}{x} - \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} (2\lambda - 1) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu} 2^{4\nu} \cdot \\ &\qquad \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{(\lambda + \nu - 2)!}{(\lambda - \nu)!} \cdot B_\nu \\ &= \frac{1}{x} - \frac{2}{3} \cdot \overset{0}{J}(x)\,\overset{1}{J}(x) - \frac{106}{3^2}\,\overset{1}{J}(x)\,\overset{2}{J}(x) - \frac{1866}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \\ &\qquad \cdot \overset{2}{J}(x)\,\overset{3}{J}(x) - \frac{30294}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} \cdot \overset{3}{J}(x)\,\overset{4}{J}(x) - - \ldots \text{ inf.} \end{aligned}\right\} \quad (48a.)$$

Für die Untersuchung der Konvergenz kann man sich aus den Hinweis beschränken, dass die inneren Summen für a_λ in der Entwicklung für tg (x) und cotg (x) übereinstimmen bis auf den Faktor $(2^{2\nu} - 1)$, der bei der letztern fehlt. Daraus darf man schliessen, dass die Reihe für cotg (x) ebenso konvergent ist wie die Reihe für tg (x) für alle Werte von $-1 \gtreqless x \gtreqless +1$.

Nach dem bisherigen Verfahren leiten sich auch die folgenden ungeraden Funktionen ab:

Mit arc sin (x) erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \arcsin(x) &= \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\, 2\lambda \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x) \cdot \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu} \frac{(\lambda + \nu - 1)!}{(2\nu - 1)^2 (\lambda - \nu)!} \\ &= 2 \cdot \overset{1}{\Pi}(x) + \frac{32}{1 \cdot 3} \cdot \overset{2}{\Pi}(x) + \frac{942}{1 \cdot 3 \cdot 5} \cdot \overset{3}{\Pi}(x) + \\ &\qquad + \frac{117872}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \overset{4}{\Pi}(x) + + \ldots \text{ inf.} \end{aligned}\right\} \quad (49.)$$

Man bildet wie früher $a_\lambda = (k_\lambda - k_{\lambda-1})$; dann wird:

$$\text{arc}\sin(x) = \frac{\sum\limits_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\, 2(2\lambda - 1) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot}{\cdot \sum\limits_{1}^{\lambda}{}_{\nu} \dfrac{\nu}{(2\nu-1)^2} \cdot \dfrac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}} \qquad (49\text{a.})$$

Es ist evident, dass in der innern Summe

$$\sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu} \frac{\nu}{(2\nu-1)^2} \cdot \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}$$

der letzte Term der grösste ist, d. h. wenn $\nu = \lambda$ gesetzt wird Dann ist:

$$\sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu} \frac{\nu}{(2\nu-1)^2} \cdot \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!} < \frac{\lambda^2}{(2\lambda-1)^2} \cdot (2\lambda - 2)!$$

Daher auch

$$\left| a_\lambda \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \right| < \frac{2\lambda^2}{(2\lambda-1)} \cdot (2\lambda-2)! \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-1}}{(\lambda-1)!\ \lambda!}$$

Ebenso

$$\left| a_{\lambda+1} \overset{\lambda}{J}(x) \overset{\lambda+1}{J}(x) \right| < \frac{(\lambda+1)^2}{(2\lambda+1)} \cdot (2\lambda)! \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+1}}{\lambda!\ (\lambda+1)!}$$

Der Quotient:

$$\frac{\left| a_{\lambda+1} \overset{\lambda}{J}(x) \overset{\lambda+1}{J}(x) \right|}{\left| a_\lambda \overset{\lambda-1}{J}(x) \overset{\lambda}{J}(x) \right|} < \frac{(\lambda+1) \cdot (2\lambda-1)^2\, x^2}{(2\lambda+1) \cdot \lambda^2 \cdot 2}$$

Dieser Quotient ist unter der Bedingung, dass $-1 < x < +1$ sei, für alle Werte von λ kleiner als eins, womit die Konvergenz der Reihe (49a.) nachgewiesen ist.

Mit arc tg (x) erhält man:

$$\operatorname{arc\,tg}(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu} (-1)^{\nu-1}\, 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu-1)(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x) \tag{50.}$$

Man bildet: $a_\lambda = (k_\lambda - k_{\lambda-1})$; dann wird:

$$\operatorname{arc\,tg}(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} (2\lambda-1) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu} (-1)^{\nu-1} \cdot 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu-1)\cdot(2\nu)!} \cdot \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}$$

Die Reihe ist absolut konvergent für $-1 \lesseqgtr x \lesseqgtr 1$.

Setzt man im besondern für $x = 1$, dann wird

$$\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

daher

$$\pi = 4 \cdot \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} (2\lambda-1) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(1) \cdot \overset{\lambda}{J}(1) \cdot \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu} (-1)^{\nu-1}\, 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu-1)\cdot(2\nu)!} \cdot \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!} \tag{51.}$$

---

§ 5. Vergleich der Entwicklungen für die trigonometrischen und zyklometrischen Funktionen nach Reihen I. und II. Art.

Die Reihen I. Art lauten nach der Schrift von Köstler:

$$\cos(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda} (-1)^{\lambda} \cdot \varepsilon_{2\lambda} \cdot \overset{2\lambda}{J}(x) = \overset{0}{J}(x) + 2 \cdot \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} (-1)^{\lambda} \cdot \overset{2\lambda}{J}(x)$$

$$\sin(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda} (-1)^{\lambda} \varepsilon_{2\lambda+1} \overset{2\lambda+1}{J}(x) = 2 \cdot \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda} (-1)^{\lambda} \cdot \overset{2\lambda+1}{J}(x)$$

$$\operatorname{tg}(x) = 4 \cdot \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda} (2\lambda+1) \cdot \overset{2\lambda+1}{J}(x) \cdot$$

$$\sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu} 4^{2\nu} (4^{\nu+1} - 1) \frac{(\lambda+\nu)!}{(2\nu+1) \cdot (\nu+1) \cdot (2\nu)!} \cdot \frac{B_{\nu+1}}{(\lambda-\nu)!}$$

$$\operatorname{cotg}(x) = \frac{1}{x} - 4 \cdot \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda} (2\lambda+1) \cdot \overset{2\lambda+1}{J}(x) \cdot$$

$$\sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu} \frac{4^{2\nu}}{(\nu+1) \cdot (2\nu+1)(2\nu)!} \cdot \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!} B_{\nu+1}$$

$$\operatorname{arc\,sin}(x) = 2 \cdot \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda} (2\lambda+1) \cdot \overset{2\lambda+1}{J}(x) \cdot \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu} \frac{(2\nu)!}{(2\nu+1) \cdot \nu! \, \nu!} \cdot \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!}$$

$$\operatorname{arc\,tg}(x) = 2 \cdot \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda} (2\lambda+1) \cdot \overset{2\lambda+1}{J}(x) \cdot \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu} (-1)^{\nu} \cdot 2^{2\nu} \frac{(\lambda+\nu)!}{(2\nu+1) \cdot (\lambda-\nu)!}$$

$$\pi = 8 \cdot \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda} (2\lambda+1) \cdot \overset{2\lambda+1}{J}(1) \cdot \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu} (-1)^{\nu} 2^{2\nu} \frac{(\lambda+\nu)!}{(2\nu+1)(\lambda-\nu)!}$$

Die Reihen II. Art lauten, wie sie oben hergeleitet wurden:

$$\cos(x) = \left[\overset{0}{J}(x)\right]^2 + 2 \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda \cdot \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \sum_{\nu=1}^{\lambda} (-1)^{\nu} \cdot 2^{2\nu} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}$$

$$\sin(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} (2\lambda-1) \overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \sum_{\nu=1}^{\lambda} (-1)^{\nu-1} \cdot 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu-1)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}$$

$$\operatorname{tg}(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} (2\lambda-1) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \sum_{\nu=1}^{\lambda} 4^{2\nu}(4^{\nu}-1) \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot B_{\nu}$$

$$\operatorname{cotg}(x) = \frac{1}{x} - \sum_{\lambda=1}^{\infty} (2\lambda-1) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \sum_{\nu=1}^{\lambda} 4^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot B_{\nu}$$

$$\operatorname{arc\,sin}(x) = 2 \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} (2\lambda-1) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \sum_{\nu=1}^{\lambda} \frac{\nu \cdot (\lambda+\nu-2)!}{(2\nu-1)^2 \cdot (\lambda-\nu)!}$$

$$\operatorname{arc\,tg}(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} (2\lambda-1) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \sum_{\nu=1}^{\lambda} (-1)^{\nu-1}\, 2^{2\nu} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu-1) \cdot (2\nu)!} \cdot \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}$$

$$\pi = 4 \cdot \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} (2\lambda - 1) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(1) \cdot \overset{\lambda}{J}(1) \cdot \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu} (-1)^{\nu-1} \cdot$$

$$\cdot\, 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu - 1)\cdot(2\nu)!} \cdot \frac{(\lambda + \nu - 2)!}{(\lambda - \nu)!}$$

Als auffallendste Verschiedenheit in den Entwicklungskoeffizienten der Reihen erster und zweiter Art erkennt man sofort den Faktor $\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!}$. Er spielt bei diesen Reihen dieselbe Rolle wie der Faktor $\frac{n!\,n!}{(2n)!}$ bei den Entwicklungen für die geraden und ungeraden Potenzen, der dort geradezu als Proportionalitätsfaktor zwischen den Entwicklungskoeffizienten der Reihen erster und zweiter Art bezeichnet worden ist. Wegen dieses Faktors $\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!}$ kann die innere Summe bei den Entwicklungen für sin (x) und cos (x) nicht vereinfacht werden, wie dies bei den Reihen erster Art von Köstler in so eleganter Weise getan worden ist.

Bedeutend mehr Analogie als diese zwei ersten Entwicklungen zeigen alle folgenden. Setzt man in den Reihen zweiter Art statt der Laufzahl λ die neue $\lambda + 1$, was ohne weiteres gestattet ist, wenn die dadurch bedingte Veränderung der untern Grenze berücksichtigt wird; definiert man ferner die ungeraden Funktionen in der üblichen Art, d. h. durch den Exponenten $2\nu + 1$ statt $2\nu - 1$, setzt man also in der innern Summe die Laufzahl $\nu + 1$ statt ν, dann werden die Reihen, abgesehen von den beiden ersten:

$$\operatorname{tg}(x) = 4 \cdot \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda} (2\lambda + 1) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \overset{\lambda+1}{J}(x) \cdot$$

$$\cdot \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu} 4^{2\nu} (4^{\nu+1} - 1) \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{1}{(2\nu + 1)^2} \cdot \frac{(\lambda + \nu)!}{(\lambda - \nu)!} \cdot B_{\nu+1}$$

$$\operatorname{cotg}(x) = \frac{1}{x} - 4 \cdot \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda} (2\lambda + 1) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x) \cdot \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu} 4^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{(2\nu+1)^2} \cdot \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot B_{\nu+1}$$

$$\operatorname{arc\,sin}(x) = 2 \cdot \sum_0^\infty {}_\lambda\, (2\lambda+1) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x) \cdot \sum_0^\lambda {}_\nu\, \frac{\nu+1}{(2\nu+1)^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \cdot \frac{(2\nu)!}{\nu!\,\nu!} \cdot \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!}$$

$$\operatorname{arc\,tg}(x) = 2 \cdot \sum_0^\infty {}_\lambda\, (2\lambda+1) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x) \cdot \sum_0^\lambda {}_\nu\, (-1)^\nu \cdot$$

$$\cdot 2^{2\nu} \frac{(\nu+1)!\,(\nu+1)!}{(2\nu+1)\cdot(2\nu+2)!} \cdot \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!}$$

Abgesehen vom Faktor $\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!}$ stimmen die innern Summen für tg (x) und cotg (x) nach Reihen erster und zweiter Art überein, nur dass bei den letztern $\frac{1}{(2\nu+1)}$ statt $\frac{1}{\nu+1}$ steht. Für die arc sin (x) Entwicklung hat man Analogie bis auf den Quotienten $\frac{\nu+1}{2\nu+1}$ bei den letzteren, für arc tg (x) bis auf $\frac{\nu+1}{2(2\nu+1)}$. Sieht man jedoch $\frac{(\nu+1)!\,(\nu+1)!}{(2\nu+2)!}$ als Proportionalitätsfaktor an, dann hat man bei tg (x) und cotg (x) völlige Uebereinstimmung bis auf den Faktor 2, bei arc sin (x) bis auf den Faktor $\frac{1}{2}$ und bei arc tg (x) völlige Uebereinstimmung.

Im grossen Ganzen kann man die Behauptung, die Carl Neumann hinsichtlich der Reihenentwicklungen erster und zweiter Art für die geraden Potenzen aufgestellt und bewiesen hat, dass nämlich die Entwicklungskoeffizienten der Reihen erster und zweiter Art proportional seien, auch auf die andern entwickelten Funktionen ausdehnen. Für die ungeraden Potenzen ist dies früher schon nachgewiesen worden. Auch für die trigonometrischen und zyklonometrischen Funktionen hat man in der Regel mit Ausnahme der Reihen für sin (x) und cos (x) bestätigt gefunden.

III. Abschnitt.

§ 1. Die Methode von Niels Nielsen.

Wohl die allgemeinste Methode zur Entwicklung analytischer Funktionen nach Neumann'schen Reihen zweiter Art hat *Niels Nielsen*[17] in seiner Abhandlung „Sur le produit de deux fonctions cylindriques“ gegeben. Sie wird nicht nur vorzüglich geeignet sein, die im I. und II. Abschnitt aufgestellten Reihen zu verifizieren, sondern sie wird gleichzeitig die Möglichkeit bieten, auch ungerade Funktionen nach Quadraten von Bessel'schen Funktionen zu entwickeln. Von *E. Lommel*[18] ist erstmals von einer solchen Möglichkeit gesprochen worden. In der genannten Abhandlung hat er einige vereinzelte, diesbezügliche Resultate veröffentlicht. In der nun zu betrachtenden Methode gibt aber N. Nielsen zuerst einen allgemein gültigen Modus zur Herleitung solcher Reihen. Wir führen die Methode soweit notwendig an und verweisen bezüglich Einzelheiten auf die genannte Abhandlung.

Nielsen beweist daselbst den Satz:

„Une série de puissances $\sum b_\nu x^{2\nu}$, qui est une fonction paire de x, peut être développée en série de la forme:

$$\sum_0^\infty{}_\varsigma\, b_\varsigma\, x^{2\varsigma} = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu-\nu} \cdot \sum_0^\infty{}_\varsigma\, a_\varsigma \cdot \overset{\mu+\varsigma}{J}(x) \cdot \overset{\nu+\varsigma}{J}(x) \qquad (52.)$$

où μ et ν désignent deux constantes quelconques, les négatifs entiers exclus. Ce développement est valable à l'intérieur du cercle de convergence de la série de puissances et les coefficients a_p sont déterminés par la formule:

$$a_p = (\mu + \nu + 2p) \cdot \sum_{m=0}^{p} \frac{\mu + \nu + 2m + 1}{(p - m)!} \cdot \qquad (53.)$$

$$\cdot B(\mu + m + 1,\ \nu + m + 1) \cdot \Gamma(\mu + \nu + p + m) \cdot 2^{2m} \cdot b_m \text{“}$$

Den Konstanten μ und ν kann man also jeden beliebigen Wert erteilen.

Setzt man z. B. $\nu = -\mu$, dann wird die Formel (52.) zu:

$$\sum_{\varsigma=0}^{\infty} b_\varsigma\, x^{2\varsigma} = \sum_{\varsigma=0}^{\infty} a_\varsigma \cdot \overset{\varsigma+\mu}{J}(x)\, \overset{\varsigma-\mu}{J}(x) \qquad (54.)$$

Die Formel (53.) zur Bestimmung der Koeffizienten a_ς wird unter Berücksichtigung der entsprechenden Werte der beiden Euler'schen Integrale B und Γ zu:

$$\left.\begin{aligned} a_p &= \frac{2p \cdot \mu \cdot \pi}{\sin(\mu\pi)} \cdot \left\{ \frac{b_0}{p} + \sum_{n=1}^{p} \frac{\binom{p+n}{p-n}}{(p+n)} (1^2 - \mu^2)(2^2 - \right. \\ &\qquad \left. - \mu^2)(3^2 - \mu^2) \ldots\ldots (n^2 - \mu^2)\, 2^{2n} \cdot b_n \right\} \\ a_0 &= \frac{\pi \cdot \mu}{\sin(\pi\mu)} \cdot b_0 \end{aligned}\right\} \qquad (55.)$$

In Formel (54.) setze man $\mu = 0$, dann wird:

$$\sum_{\varsigma=0}^{\infty} b_\varsigma\, x^{2\varsigma} = \sum_{\varsigma=0}^{\infty} a_\varsigma \cdot \left[\overset{\varsigma}{J}(x)\right]^2 \qquad (56.)$$

Der Bruch $\frac{\mu\pi}{\sin(\mu\pi)} \cdot 2p$ wird für $\mu = 0$ zu:

$$\lim_{\mu=0} \frac{\mu\pi}{\sin(\mu\pi)} \cdot 2p = \lim_{\mu=0} 2p\mu\pi \frac{1}{\mu\pi - \frac{(\mu\pi)^3}{3!} + \frac{(\mu\pi)^5}{5!} - + \ldots}$$

$$= \lim_{\mu=0} 2\,p \cdot \frac{1}{1 - \frac{(\mu\pi)^2}{3!} + \frac{(\mu\pi)^4}{5!} - + \cdots}$$

$$= 2\,p.$$

Daher wird auch $a_p = 2p \cdot \left\{ \frac{b_0}{p} + \sum_1^p n \frac{(p+n)!}{(p-n)!\,(2n)!\,(p+n)} \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \ldots n^2 \cdot 2^{2n} \cdot b_n \right\}$

Setzt man darin λ statt p und ν statt n, so wird

$$\begin{aligned} a_\lambda &= 2\,b_0 + 2\sum_1^\lambda \nu\; 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!\,(\lambda+\nu)} \cdot b_\nu \\ &= \sum_0^\lambda \nu\; 2^{2\nu+1} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot b_\nu \end{aligned} \qquad (57.)$$

Wir notieren diese Resultate in folgendem Satz:

„Eine Potenzreihe $\sum_0^\infty \lambda\, b_\lambda\, x^{2\lambda}$, die eine gerade Funktion von x ist, kann in eine Reihe von der Form:

$$\sum_0^\infty \lambda\; a_\lambda \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \qquad (58.)$$

entwickelt werden. Diese Entwicklung ist gültig im Innern des Konvergenzkreises der Potenzreihe und die Koeffizienten a_λ bestimmen sich durch die Formel:

$$a_\lambda = \sum_0^\lambda \nu\; 2^{2\nu+1} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \cdot \lambda \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot b_\nu \qquad (59.)$$

$$a_0 = b_0$$

Dabei sind die b_ν die Koeffizienten von x^{2n} in der Potenzreihenentwicklung.“

Ein Vergleich mit der in Formel (10.) gegebenen Definition für die Funktion Ω^λ (y) zeigt eine völlige Uebereinstimmung bis auf den Faktor 2 b_ν. Aber gerade dieser Faktor tritt bei jeder Bestimmung der dortigen Entwicklungskoeffizienten k_λ jeweilen zu der Definitionsformel von Ω^λ (y), sodass man Gleichheit der Definitionsformeln der Entwicklungskoeffizienten k_λ dort und a_λ hier hat. Streng genommen ist also diese neuere Methode von Nielsen nicht verschieden von der älteren von C. Neumann gegebenen Methode. Wir glaubten jedoch trotzdem von einer neuen Methode sprechen zu dürfen, weil sie viel allgemeiner ist und infolgedessen auch eine bedeutend vielseitigere Anwendung erwarten lässt. Nach dieser von vorneherein festgestellten Uebereinstimmung können wir uns auf die Bestimmung des allgemeinen Koeffizienten a_λ beschränken.

1. Die geraden Potenzen von x.

Es sei

$$b_0 = 1; \; b_1 = b_2 = \ldots\ldots = b_\lambda = \ldots\ldots = 0.$$

Dann ist

$$\sum_0^\infty{}_\lambda \, b_\lambda \, x^{2\lambda} = 1$$

Daher ist

$$1 = \sum_0^\infty{}_\lambda \, a_\lambda \cdot [\overset{\lambda}{J}(x)]^2$$

$$a_\lambda = \sum_0^\lambda{}_\nu \, 2^{2\nu+1} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \cdot \lambda \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \, b_\nu \; ; \quad a_0 = b_0$$

alle b_ν mit Ausnahme von $b_0 = 1$ sind null. In der Formel für a_λ tritt daher immer nur der erste Summand auf, sodass man hat $a_0 = 1$; $a_\lambda = 2$. Dann erhält man

$$1 = [\overset{0}{J}(x)]^2 + 2 \cdot \sum_1^\infty{}_\lambda \, [\overset{\lambda}{J}(x)]^2 \qquad (60.)$$

Der Vollständigkeit halber sei hier noch an eine dritte Methode zur Entwicklung von 1 in die nach Quadraten der Bessel'schen Funktionen fortschreitende Reihe erinnert, die von *E. Lommel*[19] gegeben ist und daselbst nachgeschlagen werden kann. Das Resultat ist aber, wie schon oben erwähnt wurde, erstmals von *Hansen*[9] gegeben worden.

Indem wir in der Anwendung der Methode von Nielsen weiterfahren, wollen wir sie nur noch auf die allgemeine gerade Potenz ausdehnen. Es sei zu dem Ende

$$b_0 = b_1 = b_2 = \ldots = b_{n-1} = 0; \; b_n = 1;$$

$$b_{n+1} = b_{n+2} = \ldots . = b_\lambda = 0.$$

Dann ist

$$\sum_0^\infty {}_\lambda \; b_\lambda \, x^{2\lambda} = x^{2n}$$

$$x^{2n} = \sum_0^\infty {}_\lambda \; a_\lambda \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2$$

$$a_\lambda = \sum_0^\lambda {}_\nu \; 2^{2\nu+1} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \cdot \lambda \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot b_\nu$$

In dieser Summe verschwinden jeweilen alle einzelnen Summanden, mit Ausnahme von dem, indem $\nu = n$ ist. Dieser wird

$$a_\lambda = 2^{2n+1} \frac{n!\,n!}{(2n)!} \lambda \cdot \frac{(\lambda+n-1)!}{(\lambda-n)!}$$

Daher wird nun

$$x^{2n} = 2^{2n+1} \frac{n!\,n!}{(2n)!} \cdot \sum_n^\infty {}_\lambda \; \lambda \cdot \frac{(\lambda+n-1)!}{(\lambda-n)!} \cdot \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \qquad (61.)$$

2. Die Reihen für cos (x) und coſ (x).

$$\cos(x) = \sum_0^\infty {}_\lambda \; (-1)^\lambda \cdot \frac{x^{2\lambda}}{(2\lambda)!} = \sum_0^\infty {}_\lambda \; b_\lambda \cdot x^{2\lambda}, \text{ wo } b_\lambda = (-1)^\lambda \cdot \frac{1}{(2\lambda)!}$$

Daher wird nun:

$$\cos(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda}\; a_{\lambda} \cdot \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2;$$

$$a_{\lambda} = \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu}\; 2^{2\nu+1} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \cdot \lambda \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot b_{\nu}$$

$$= \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu}\; (-1)^{\nu} \cdot 2^{2\nu+1} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!}\, \lambda \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}$$

$$a_0 = b_0 = 1.$$

Daher wird

$$\cos(x) = \left[\overset{0}{J}(x)\right]^2 + \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\; 2\lambda \cdot \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \cdot$$

$$\cdot \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu}\; (-1)^{\nu} \cdot 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!}\, \lambda \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \qquad (62)$$

$$\text{coſ}(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda} \frac{x^{2\lambda}}{(2\lambda)!} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda}\; b_{\lambda} \cdot x^{2\lambda}, \text{ wo } b_{\lambda} = \frac{1}{(2\lambda)!}$$

Die Herleitung ist dieselbe wie oben abgesehen vom Faktor $(-1)^{\lambda}$; daher wird

$$\text{coſ}(x) = \left[\overset{0}{J}(x)\right]^2 + \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\; 2\lambda \cdot \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \cdot$$

$$\cdot \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu}\; 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \qquad (63.)$$

Ein Vergleich mit den entsprechenden im ersten Abschnitt aufgestellten Formeln zeigt die völlige Uebereinstimmung der Entwicklungen.

§ 2. Methode für ungerade Funktionen.

Man setzt in der Formel (54.):

$$\sum_{0}^{\infty} \varsigma\, b_\varsigma\, x^{2\varsigma} = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu-\nu} \cdot \sum_{0}^{\infty} \varsigma\, a_\varsigma \cdot \overset{\mu+\varsigma}{J}(x)\, \overset{\nu+\varsigma}{J}(x)$$

$1 - \mu$ statt ν. Dann wird

$$\sum_{0}^{\infty} \varsigma\, b_\varsigma\, x^{2\varsigma+1} = \sum_{0}^{\infty} \varsigma\, a_\varsigma \cdot \overset{\varsigma+\mu}{J}(x)\, \overset{\varsigma+1-\mu}{J}(x)$$

$$a_0 = \frac{\pi\,\mu\,(1-\mu)}{\sin(\mu\,\pi)}\, b_0$$

$$a_\lambda = (2\lambda+1) \cdot \frac{\pi\,\mu}{\sin(\mu\,\pi)} \left\{ \frac{1-\mu}{1}\, 2\, b_0 + \sum_{1}^{\lambda} n\, (1^2-\mu^2)(2^2- \right.$$

$$\left. -\mu^2)(3^2-\mu^2) \ldots (n^2-\mu^2) \cdot \frac{\binom{\lambda+n}{\lambda-n}}{(2n+1)} \cdot (n+1-\mu) \cdot 2^{2n+1} \cdot b_n \right\}$$

Setzt man hier $\mu = 0$, dann wird $\lim\limits_{\mu=0} \dfrac{\pi\,\mu}{\sin \pi\,\mu} = 1$, daher

$a_0 = b_0$

$$a_\lambda = (2\lambda+1) \left\{ 2\, b_0 + \sum_{1}^{\lambda} n\, 2^{2n+1}\, \frac{n!\, n!}{(2n)!}\, \frac{n+1}{2n+1} \cdot \frac{(\lambda+n)!}{(\lambda-n)!} \right\}$$

Setzt man die Laufzahl ν statt n, dann wird

$$a_\lambda = \sum_{0}^{\lambda} \nu\; 2^{2\nu+1}\, \frac{\nu!\, \nu!}{(2\nu)!} \cdot \frac{(\nu+1)}{(2\nu+1)} \cdot (2\lambda+1)\, \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot b_\nu;\quad a_0 = b_0$$

Wir notieren diese Resultate in folgendem Satz:

„Eine Potenzreihe, $\sum\limits_{0}^{\infty} \lambda\, b_\lambda\, x^{2\lambda+1}$, welche eine ungerade Funktion von x ist, kann in eine Reihe von der Form

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda}\; a_\lambda \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x) \tag{64.}$$

entwickelt werden, welche gültig ist im Innern des Konvergenzkreises der Potenzreihe. Die Koeffizienten a_λ bestimmen sich durch die Formel

$$a_\lambda = \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu}\; 2^{2\nu+1} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \, \frac{\nu+1}{2\nu+1} (2\lambda - 1) \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot b_\nu; \quad a_0 = b_0 \tag{65.}$$

Die b_ν sind darin die Entwicklungskoeffizienten der Potenzreihe.“

Um nun aber Uebereinstimmung mit den im II. Abschnitt hergeleiteten Entwicklungen für die ungeraden Funktionen zu erhalten, beachte man, dass in der allgemeinen Summenformel $\overset{\lambda-1}{J}(x)\,\overset{\lambda}{J}(x)$ das Produkt der Bessel'schen Funktionen ist und nicht wie hier $\overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x)$. Das ist offenbar gleichbedeutend damit, dass der Entwicklungkoeffizient a_λ dort identisch ist mit dem Koeffizienten $a_{\lambda-1}$ hier. Man ersetze nun in (64.) und (65.) λ durch $\lambda - 1$ und nenne den neuen Entwicklungskoeffizienten a_λ. Ferner hat man früher überall die ungeraden Funktionen in der allgemeinen Darstellung durch die Potenz $(2\nu - 1)$ charakterisiert und nicht wie oben durch die Potenz $(2\nu + 1)$. Man ersetze daher $(\nu + 1)$ durch $(\nu - 1)$. Dann formuliert man den Satz (64.) wie folgt:

„Eine Potenzreihe, $\sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\; b_{\lambda-1}\, x^{2\lambda-1}$, welche eine ungerade Funktion von x ist, kann in eine Reihe entwickelt werden von der Form

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\; a_\lambda \overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \tag{66.}$$

Diese ist gültig im Innern des Konvergenzkreises der Potenzreihe und die Koeffizienten a_λ bestimmen sich durch die Formel:

$$a_\lambda = \sum_1^\lambda {}_\nu\, 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} (2\lambda - 1) \cdot \frac{(\lambda + \nu - 2)!}{(\lambda - \nu)!} \cdot b_{\nu-1};\quad a_0 = b_0 \tag{67.}$$

Die $b_{\nu-1}$ sind darin die Entwicklungskoeffizienten der Potenzreihe.

Im II. Abschnitt hat man von Fall zu Fall den Entwicklungskoeffizienten a_λ bestimmt nach der Formel $a_\lambda = (k_\lambda - k_{\lambda-1})$. Vergleicht man eine der daselbst gefundenen Formeln für a_λ mit (67.), so erkennt man die völlige Uebereinstimmung derselben bis auf den Faktor $2\, b_{\nu-1}$, der dort schon dabei ist, d. h. in der der betreffenden Funktion charakteristischen Form und hier erst noch durch eben diese Form ersetzt werden muss.

Es seien auch hier einige der schon oben hergeleiteten Entwicklungen nach diesem abgekürzten Verfahren bestimmt.

1. Die ungeraden Potenzen von x.

Es sei $b_0 = 1,\ b_1 = b_2 = \ldots = b_\lambda = \ldots = 0$;

dann ist

$$\sum_1^\infty {}_\lambda\, b_{\lambda-1}\, x^{2\lambda-1} = x.$$

$$x = \sum_1^\infty {}_\lambda\, a_\lambda \overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x);\quad a_\lambda = \sum_1^\lambda {}_\nu\, 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} (2\lambda - 1) \frac{(\lambda + \nu - 2)!}{(\lambda - \nu)!}$$

$$a_\lambda = 2 \cdot (2\lambda - 1).$$

$$x = 2 \cdot \sum_1^\infty {}_\lambda\, (2\lambda - 1) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x)\, \overset{\lambda}{J}(x) \tag{68.}$$

Es sei für die allgemeine, ungerade Potenz:

$b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = b_{n-1} = 0\quad b_n = 1,\ b_{n+1} = \ldots b_\lambda = \ldots = 0$;
$\lambda \neq n$; also ist

$$\sum_1^\infty {}_\lambda\, b_\lambda\, x^{2\lambda-1} = x^{2n-1};\qquad x^{2n-1} = \sum_1^\infty {}_\lambda\, a_\lambda \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x)\, \overset{\lambda}{J}(x);$$

$$a_\lambda = \sum_1^\lambda {}_\nu\; 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} (2\lambda - 1) \frac{(\lambda + \nu - 2)!}{(\lambda - \nu)!} b_\nu$$

$$a_\lambda = 2^{2n} \frac{n!\,n!}{(2n)!} (2\lambda - 1) \frac{(\lambda + n - 2)!}{(\lambda - n)!}$$

woraus nunmehr:

$$x^{2n-1} = \frac{n!\,n!}{(2n)!}\, 2^{2n} \sum_n^\infty {}_\lambda\; (2\lambda - 1) \cdot \frac{(\lambda + n - 2)!}{(\lambda - n)!} \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x)\, \overset{\lambda}{J}(x) \qquad (69.)$$

2. Die trigonometrischen Funktionen.

Man hat den sin(x) definiert durch die Potenzreihe

$$\sin(x) = \sum_1^\infty {}_\lambda\; (-1)^{\lambda-1} \frac{x^{2\lambda-1}}{(2\lambda - 1)!} = \sum_1^\infty {}_\lambda\; b_\lambda\, x^{2\lambda-1}, b_\lambda = \frac{(-1)^{\lambda-1}}{(2\lambda - 1)!}$$

Daraus bestimmt sich nun:

$$\sin(x) = \sum_1^\infty {}_\lambda\; a_\lambda \overset{\lambda-1}{J}(x)\, \overset{\lambda}{J}(x);$$

$$a_\lambda = \sum_1^\lambda {}_\nu\; 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu!)} (2\lambda - 1) \cdot \frac{(\lambda + \nu - 2)!}{(\lambda - \nu)!} b_\nu$$

$$a_\lambda = \sum_1^\lambda {}_\nu\; (-1)^{\nu-1} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu - 1)!\,(2\nu)!}\, 2^{2\nu} (2\lambda - 1) \frac{(\lambda + \nu - 2)!}{(\lambda - \nu)!}$$

und daher

$$\sin(x) = \sum_1^\infty {}_\lambda\; (2\lambda - 1) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x)\, \overset{\lambda}{J}(x) \sum_1^\lambda {}_\nu\; (-1)^{\nu-1}\, 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu - 1)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{(\lambda + \nu - 2)!}{(\lambda - \nu)!} \qquad (70.)$$

Für tg(x) hat man mit Benützung von Bernoulli'schen Zahlen folgende Potenzreihe:

$$\operatorname{tg}(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} 2^{2\lambda}(2^{2\lambda}-1)\, B_\lambda \cdot \frac{x^{2\lambda-1}}{(2\lambda)!} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} b_\lambda \cdot x^{2\lambda-1}$$

$$\text{wo} \quad b_\lambda = 2^{2\lambda}(2^{2\lambda}-1) \cdot \frac{B_\lambda}{(2\lambda)!}$$

Daher

$$\operatorname{tg}(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda \overset{\lambda-1}{J}(x) \overset{\lambda}{J}(x)$$

$$a_\lambda = \sum_{\nu=1}^{\lambda} 4^{2\nu}(2^{2\nu}-1) \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot (2\lambda-1) \cdot \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!} B_\nu$$

woraus dann

$$\operatorname{tg}(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} (2\lambda-1) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x) \overset{\lambda}{J}(x) \sum_{\nu=1}^{\lambda} 4^{2\nu}(2^{2\nu}-1)$$

$$\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot B_\nu \qquad (71.)$$

Für cotg (x) hat man die Potenzreihe:

$$\operatorname{cotg}(x) = \frac{1}{x} - \sum_{\lambda=1}^{\infty} 2^{2\lambda} B_\lambda \frac{x^{2\lambda-1}}{(2\lambda)!}$$

Es wird dann

$$\operatorname{cotg}(x) = \frac{1}{x} - \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x) \overset{\lambda}{J}(x)$$

$$a_\lambda = \sum_{\nu=1}^{\lambda} 4^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} (2\lambda-1) \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot B_\nu$$

und daher

$$\operatorname{cotg}(x) = \frac{1}{x} - \sum_{\lambda=1}^{\infty} (2\lambda-1) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x) \overset{\lambda}{J}(x) \sum_{\nu=1}^{\lambda} 4^{2\nu}$$

$$\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot B_\nu \qquad (72.)$$

Den arc sin (x) hat man definiert durch:

$$\arc \sin(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} \frac{(2\lambda-2)!}{2^{2\lambda-2}(\lambda-1)!\,(\lambda-1)!} \cdot \frac{x^{2\lambda-1}}{2\lambda-1}$$

Dann wird

$$\arc \sin(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\, a_{\lambda} \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x)\, \overset{\lambda}{J}(x)$$

$$a_{\lambda} = 2 \cdot \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu} \frac{\nu}{(2\nu-1)^2} \cdot (2\lambda-1) \cdot \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}$$

und folglich

$$\arc \sin(x) = 2 \cdot \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} (2\lambda-1) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x)\, \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu} \frac{\nu}{(2\nu-1)^2} \cdot \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!} \tag{73.}$$

Für arc tg (x) hat man

$$\arc \mathrm{tg}(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} (-1)^{\lambda-1} \frac{x^{2\lambda-1}}{2\lambda-1}$$

Dann wird sofort

$$\arc \mathrm{tg}(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} (2\lambda-1) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x)\, \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu} (-1)^{\nu-1} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu-1)\cdot(2\nu)!} \cdot \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!} \tag{74.}$$

§ 3. Methode zur Entwicklung ungerader Funktionen in Reihen, die nach Quadraten Bessel'scher Funktionen fortschreiten, deren Parameter gemischte Zahlen sind.

Man setzt in Formel (52.)

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{\varsigma}\; b_\varsigma\, x^{2\varsigma} = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu-\nu} \sum_{0}^{\infty}{}_{\varsigma}\; a_\varsigma \cdot \overset{\mu+\varsigma}{J}(x)\, \overset{\nu+\varsigma}{J}(x)$$

für $\nu = 1 - \mu$. Dann wird

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{\varsigma}\; b_\varsigma\, x^{2\varsigma+1} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\varsigma}\; a_\varsigma \cdot \overset{\varsigma+\mu}{J}(x)\, \overset{\varsigma+1-\mu}{J}(x)$$

$$a_0 = \frac{\pi\,\mu\,(1-\mu)}{\sin(\mu\,\pi)} \cdot b_0$$

$$a_\lambda = (2\lambda+1) \cdot \frac{\pi\,\mu}{\sin(\mu\,\pi)} \left\{ \frac{1-\mu}{1} \cdot 2\, b_0 + \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\; (1^2-\mu^2)(2^2 - \mu^2) \ldots (\nu^2-\mu^2) \cdot (\nu+1-\mu) \cdot \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!\,(2\nu)!\,(2\nu+1)} \cdot 2^{2\nu+1} \cdot b_\nu \right\}$$

Darin setze man weiter $\mu = \frac{\lambda}{2}$; dann wird:

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda}\; b_\lambda\, x^{2\lambda+1} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda}\; a_\lambda \cdot \left[\overset{\lambda+1/2}{J}(x)\right]^2$$

$$a_\lambda = (2\lambda+1)\,\frac{\pi}{2} \cdot \left\{ b_0 + \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\; \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!\,(2\nu)!\,(2\nu+1)} \cdot \left(1^2 - \frac{1}{4}\right) \left(2^2 - \frac{1}{4}\right)\left(3^2 - \frac{1}{4}\right) \ldots \left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right) 2^{2\nu+1}\, b_\nu \right\}$$

$$= (2\lambda+1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left\{ b_0 + \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\; \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!\,(2\nu)!\,(2\nu+1)} \cdot \frac{(2\nu)!\,(2\nu)!}{2^{2\nu}\,\nu!\,\nu!}\,(2\nu+1)\, b_\nu \right\}$$

$$= (2\lambda + 1)\frac{\pi}{2} \cdot \left\{ b_0 + \sum_1^{\lambda}{}_{\nu} \frac{(2\nu)!\,(\lambda+\nu)!}{2^{2\nu}\,\nu!\,\nu!\,(\lambda-\nu)!} \cdot b_\nu \right\}$$

$$= (2\lambda + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sum_0^{\lambda}{}_{\nu} \frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}\,\nu!\,\nu!} \cdot \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot b_\nu$$

Wir fassen diese Resultate in folgenden Satz zusammen:

„Eine Potenzreihe $\sum_0^{\infty}{}_{\lambda}\, b_\lambda\, x^{2\lambda+1}$, die eine ungerade Funktion von x ist, kann in eine Reihe von der Form:

$$\underline{\sum_0^{\infty}{}_{\lambda}\, a_\lambda \left[\overset{\lambda+1/2}{J}(x) \right]^2} \tag{75.}$$

entwickelt werden, die gültig ist für denselben Bereich, für den die Potenzreihe definiert ist. Die Entwicklungskoeffizienten a_λ bestimmen sich einschliesslich a_0 aus der Formel:

$$\underline{a_\lambda = (2\lambda + 1)\frac{\pi}{2} \cdot \sum_0^{\lambda}{}_{\nu} \frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}\,\nu!\,\nu!} \cdot \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot b_\nu} \tag{75a.}$$

Die b_ν sind darin die Entwicklungskoeffizienten der Potenzreihe".

Darin ist $\overset{\lambda+1/2}{J}(x)$ nach der von *J. H. Graf*[20] gegebenen Formel definiert durch

$$\overset{\lambda+1/2}{J}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sum_0^{\lambda}{}_{\nu} \frac{(\lambda+\nu)!}{\nu!\,(\lambda-\nu)!} \left(\frac{1}{2x}\right)^{\nu} \cos\left\{(\lambda+1-\nu)\frac{\pi}{2} - x\right\}$$

und darin ist

$$\cos\left\{(\lambda+1-\nu)\frac{\pi}{2} - x\right\} = \pm \sin(x), \text{ für } \lambda+1-\nu \equiv 1 \pmod 4$$
$$\text{oder } \lambda+1-\nu \equiv 3 \pmod 4$$

$$= \pm \cos(x), \text{ für } \lambda+1-\nu \equiv 0 \pmod 4$$
$$\text{oder } \lambda+1-\nu \equiv 2 \pmod 4$$

In Anwendung dieses Verfahrens und zur weiteren Erläuterung der Methode seien im folgenden einige ungerade Funktionen entwickelt.

1. Reihen für die ungeraden Potenzen.

Man setze $b_0 = 1$; $b_\lambda = 0$ $\lambda \neq 0$

Dann ist $$\sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda}\, b_\lambda\, x^{2\lambda+1} = x$$

$$x = \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda}\, a_\lambda \cdot \left[\overset{\lambda+1/2}{J}(x)\right]^2$$

$$a_\lambda = \pi\,(2\lambda+1) \cdot \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu}\, \frac{(2\nu)!}{2^{2\nu+1}\,\nu!\,\nu!} \cdot \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot b_\nu$$

$$= (2\lambda+1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$a_0 = \frac{\pi}{2}$$

Daher wird:

$$x = \frac{\pi}{2}\left[\overset{1/2}{J}(x)\right]^2 + \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda}\,(2\lambda+1) \cdot \left[\overset{\lambda+1/2}{J}(x)\right]^2 \qquad (76.)$$

$$\frac{x}{\pi} = \frac{1}{2}\left[\overset{1/2}{J}(x)\right]^2 + \frac{3}{2}\left[\overset{3/2}{J}(x)\right]^2 + \frac{5}{2}\left[\overset{5/2}{J}(x)\right]^2 + \frac{7}{2}\left[\overset{7/2}{J}(x)\right]^2 + + \ldots \text{inf.} \qquad (76\text{a.})$$

In dieser letzteren Darstellung stimmt die Formel genau überein mit der von *E. Lommel*[20] auf ganz anderem Weg hergeleiteten Entwicklung.

Um noch die Formel für die allgemeine ungerade Potenz herzuleiten, setzt man $b_n = 1$ $b_\lambda = 0$ $\lambda \neq n$. Dann ist

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda}\, b_\lambda\, x^{2\lambda+1} = x^{2n+1}$$

$$x^{2n+1} = \sum_{0}^{\infty} {}_{\lambda}\; a_{\lambda} \left[\overset{\lambda+1/2}{J}(x) \right]^2$$

$$a_{\lambda} = \pi\,(2\,\lambda + 1) \cdot \sum_{0}^{\lambda} {}_{\nu}\; \frac{(2\,\nu)!}{2^{2\nu+1}\,\nu!\;\nu!} \cdot \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot b_{\nu}$$

$$a_{\lambda} = \pi \cdot (2\lambda+1) \cdot \frac{(2\,n)!}{2^{2n+1}\;\nu!\,\nu!} \cdot \frac{(\lambda+n)!}{(\lambda-n)!}$$

Dann wird

$$\left.\begin{aligned} & \underline{x^{2n+1} = \pi \cdot \frac{(2\,n)!}{2^{2n+1}\;n!\;n!} \cdot \sum_{n}^{\infty} {}_{\lambda}\; (2\lambda+1) \cdot \frac{(\lambda+n)!}{(\lambda-n)!} \left[\overset{\lambda+1/2}{J}(x) \right]^2} \\ & \underline{\frac{x^{2n+1}}{\pi} = \frac{(2\,n)!}{2^{2n+1}\;n!\,n!} \sum_{n}^{\infty} {}_{\lambda}\; (2\,\lambda+1) \cdot \frac{(\lambda+n)!}{(\lambda-n)!} \left[\overset{\lambda+1/2}{J}(x) \right]^2} \end{aligned}\right\} \quad (77.)$$

2. Reihen für die trigonometrischen Funktionen.

Man definiert hier sin (x) durch

$$\sin(x) = \sum_{0}^{\infty} {}_{\lambda}\; (-1)^{\lambda} \frac{x^{2\lambda+1}}{(2\,\lambda+1)!} = \sum_{0}^{\infty} {}_{\lambda}\; b_{\lambda}\, x^{2\lambda+1};$$

$$\text{wo } b_{\lambda} = \frac{(-1)^{\lambda}}{(2\,\lambda+1)!}$$

Dann wird

$$\sin(x) = \sum_{0}^{\infty} {}_{\lambda}\; a_{\lambda} \left[\overset{\lambda+1/2}{J}(x) \right]^2$$

$$a_{\lambda} = \pi\,(2\,\lambda+1) \sum_{0}^{\lambda} {}_{\nu}\; \frac{(2\,\nu)!}{2^{2\nu+1}\;\nu!\;\nu!} \cdot \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot b_{\nu}$$

$$= \pi\,(2\,\lambda+1) \sum_{0}^{\lambda} {}_{\nu}\; (-1)^{\nu} \frac{(2\,\nu)!}{2^{2\nu+1}\,\nu!\,\nu!\,(2\,\nu+1)!} \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!}$$

$$a_0 = \frac{\pi}{2}$$

Damit erhält man:

$$\sin(x) = \pi \cdot \sum_0^\infty {}_\lambda (2\lambda+1) \left[\overset{\lambda+1/2}{J}(x)\right]^2 \cdot \sum_0^\lambda {}_\nu \frac{(-1)^\nu}{2^{2\nu+1} \nu!\,\nu!\,(2\nu+1)!} \cdot \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin(x) &= \frac{\pi}{2}\left[\overset{1/2}{J}(x)\right]^2 + \frac{5\pi}{4}\left[\overset{3/2}{J}(x)\right]^2 + \frac{23}{16}\pi \cdot \left[\overset{5/2}{J}(x)\right]^2 + \\ &\quad + \frac{74}{64} \cdot \pi \left[\overset{7/2}{J}(x)\right]^2 + \frac{193}{256}\left[\overset{9/2}{J}(x)\right]^2 + \ldots \text{inf.} \\ \frac{\sin(x)}{\pi} &= \frac{1}{2}\left[\overset{1/2}{J}(x)\right]^2 + \frac{5}{4}\left[\overset{3/2}{J}(x)\right]^2 + \frac{23}{16}\left[\overset{5/2}{J}(x)\right]^2 + \\ &\quad + \frac{74}{64}\left[\overset{7/2}{J}(x)\right]^2 + \frac{193}{256}\left[\overset{9/2}{J}(x)\right]^2 + + \ldots \text{inf.} \\ &\text{gültig für } -\infty < x < +\infty \end{aligned}\right\} \quad (78.)$$

Analog leitet man ab mit

$$\operatorname{tg}(x) = \sum_0^\infty {}_\lambda 4^{\lambda+1}(4^{\lambda+1}-1) B_{\lambda+1} \frac{x^{2\lambda+1}}{(2\lambda+2)!} \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg}(x)}{\pi} &= \sum_0^\infty {}_\lambda (2\lambda+1) \cdot \left[\overset{\lambda+1/2}{J}(x)\right]^2 \cdot \\ &\cdot \sum_0^\lambda {}_\nu \frac{(4^{\nu+1}-1)}{\nu!\,(\nu+1)!\,(2\nu+1)} \cdot \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot B_{\nu+1} \end{aligned} \quad (79.)$$

mit $\operatorname{cotg}(x) = \frac{1}{x} - \sum_0^\infty {}_\lambda 4^{\lambda+1} \cdot B_{\lambda+1} \frac{x^{2\lambda+1}}{(2\lambda+2)!} \qquad -\pi < x < +\pi$

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{cotg}(x)}{\pi} &= \frac{1}{\pi \cdot x} - \sum_0^\infty {}_\lambda (2\lambda+1) \cdot \left[\overset{\lambda+1/2}{J}(x)\right]^2 \cdot \\ &\cdot \sum_0^\lambda {}_\nu \frac{B_{\nu+1}}{\nu!\,(\nu+1)!\,(2\nu+1)} \cdot \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!} \end{aligned} \quad (80.)$$

mit $$\arcsin(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda} \frac{(2\lambda)!}{4^{\lambda}\,\lambda!\,\lambda!} \cdot \frac{x^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)} \quad -1 \lesseqgtr x \lesseqgtr +1$$

$$\frac{\arcsin(x)}{\pi} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda} (2\lambda+1) \cdot \left[\overset{\lambda+1/2}{J}(x)\right]^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu} \frac{1}{2\nu+1} \left[\frac{(2\nu)!}{4^{\nu}\,\nu!\,\nu!}\right]^2 \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!} \tag{81.}$$

mit $$\operatorname{arc\,tg}(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} (-1)^{\lambda} \frac{x^{2\lambda+1}}{2\lambda+1} \quad -1 \lesseqgtr x \lesseqgtr +1.$$

$$\frac{\operatorname{arc\,tg}(x)}{\pi} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda} (2\lambda+1) \left[\overset{\lambda+1/2}{J}(x)\right]^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu} (-1)^{\nu} \cdot \frac{1}{2\nu+1} \cdot \frac{(2\nu)!}{4^{\nu}\,\nu!\,\nu!} \cdot \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!} \tag{82.}$$

Als Konvergenzbereich hat man nach dem Nielsen'schen Satz jeweilen den Konvergenzbereich der entsprechenden Potenzreihenentwicklung.

---

§ 4. Entwicklung einer Reihe mit negativen Potenzen.

Man ersetzt nach dem Vorgehen von *N. Nielsen* [21] in der Formel:

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu}}{\Gamma(\mu+1)\cdot\Gamma(\nu+1)} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda} \frac{(\mu+\nu+2\lambda)}{(\mu+\nu)} \binom{\mu+\nu+\lambda-1}{\lambda} \overset{\mu+\lambda}{J}(x)\,\overset{\nu+\lambda}{J}(x)$$

μ durch $\mu - n$; ferner ν durch $-\mu - n$, wobei n eine ganze, positive Zahl sein soll. Die Formel wird dann nach entsprechender Reduktion:

$$\frac{1}{x^{2n}} = \frac{\left(\frac{\pi}{\sin \mu \pi}\right)^2 2^{-2n}}{\Gamma(n+\mu) \cdot \Gamma(n-\mu)} \cdot \sum_{0}^{n-1} \lambda \, (-1)^\lambda \frac{n-\lambda}{n} \binom{2n}{\lambda}$$

$$\left\{ \overset{n-\lambda+1/2}{J}(x) \cdot \overset{n-\lambda-1/2}{J}(x) - \overset{\lambda-n+1/2}{J}(x) \cdot \overset{\lambda-n-1/2}{J}(x) \right\} \qquad (84.)$$

Darin darf μ jeden beliebigen Wert annehmen mit Ausnahme der negativen ganzen Zahlen. Setzt man in (87.) $\mu = \frac{1}{2}$ dann erhält man weiter:

$$\frac{1}{x^{2n}} = \frac{\pi^2 \cdot 2^{-2n}}{\Gamma(n+1/2) \cdot \Gamma(n-1/2)} \cdot \sum_{0}^{n-1} \lambda \, (-1)^\lambda \cdot \frac{(n-\lambda)}{n} \cdot \frac{(2n)!}{\lambda! \, (2n-\lambda)!} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \overset{n-\lambda+1/2}{J}(x) \cdot \overset{n-\lambda-1/2}{J}(x) - \overset{\lambda-n+1/2}{J}(x) \, \overset{\lambda-n-1/2}{J}(x) \right\} \qquad (85.)$$

Nun ist

$$\Gamma(n+1/2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \left(n - \frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma(1/2) =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (2n-1) \cdot 2n}{n! \, 2^{2n}} \cdot \sqrt{\pi}$$

$$= \frac{(2n)!}{n! \, 2^{2n}} \cdot \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(n-1/2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \left(n - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(n - \frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma(1/2) =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (2n-3) \cdot (2n-2)}{(n-1)! \, 2^{2n-2}} \cdot \sqrt{\pi}$$

$$= \frac{(2n-2)!}{(n-1)! \, 2^{2n-2}} \cdot \sqrt{\pi}$$

Daraus wird

$$\frac{\pi^2 \cdot 2^{-2n}}{\Gamma(n+1/2) \cdot \Gamma(n-1/2)} = \frac{\pi^2 \cdot 2^{-2n} \cdot n! \, 2^{2n} \cdot (n-1)! \, 2^{2n-2}}{(2n)! \, (2n-2)! \, \pi} =$$

$$= \frac{n! \, (n-1)!}{(2n)! \, (2n-2)!} \cdot 2^{2n-2} \cdot \pi = \frac{2^{2n-1} \, n! \, n!}{(2n)! \, (2n)!} (2n-1) \cdot \pi$$

Mit Berücksichtigung dieser Reduktionen wird die Formel (85.)

$$\frac{1}{x^{2n}} = \frac{2^{2n-1}\, n!\, n!}{(2n)!\,(2n)!} \cdot (2n-1) \cdot \pi \cdot \sum_{0}^{n-1}{}_{\lambda} (-1)^{\lambda} \cdot$$

$$\cdot \frac{n-\lambda}{n} \cdot \frac{(2n)!}{\lambda!\,(2n-\lambda)!} \left\{ \overset{n-\lambda+1/2}{J}(x)\, \overset{n-\lambda-1/2}{J}(x) - \overset{\lambda-n+1/2}{J}(x) \cdot \overset{\lambda-n-1/2}{J}(x) \right\}$$

$$= \frac{(n-1)!\,(n-1)!}{(2n-2)!} \cdot 2^{2n-2} \cdot \pi \cdot \sum_{0}^{n-1}{}_{\lambda} (-1)^{\lambda} \cdot \qquad (86.)$$

$$\cdot \frac{(n-\lambda)}{\lambda!\,(2n-\lambda)!} \left\{ \overset{n-\lambda+1/2}{J}(x) \cdot \overset{n-\lambda-1/2}{J}(x) - \overset{\lambda-n+1/2}{J}(x) \cdot \overset{\lambda-n-1/2}{J}(x) \right\}$$

Man hat in der Formel (86.) vorerst eine Entwicklung für die negativen geraden Potenzen. Die Reihe ist zum wesentlichen Unterschied gegenüber der Reihe für positive gerade Potenzen erstmals eine endliche Reihe und ferner eine nach Produkten der Bessel'schen Funktion fortschreitende Reihe. Zür Prüfung auf ihre Richtigkeit führt man den folgenden Identitätsnachweis durch:

Die Zahl n kann jede beliebige, ganze, positive Zahl sein, also auch $n = 1$. Dann reduziert sich die Formel (86.) zu:

$$\frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2} \left\{ \overset{3/2}{J}(x)\, \overset{1/2}{J}(x) - \overset{-1/2}{J}(x)\, \overset{-3/2}{J}(x) \right\}$$

Nun ist nach *J. H. Graf*[20]

$$\overset{m+1/2}{J}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sum_{0}^{m}{}_{\lambda} \frac{(m+\lambda)!}{\lambda!\,(m-\lambda)!} \left(\frac{1}{2x}\right)^{\lambda} \cos\left\{(m+1-\lambda)\frac{\pi}{2} - x\right\}$$

$$\overset{-m-1/2}{J}(x) = (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sum_{0}^{m}{}_{\lambda} \frac{(m+\lambda)!}{\lambda!\,(m-\lambda)!} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^{\lambda} \sin\left\{(m+1-\lambda)\frac{\pi}{2} - x\right\}$$

in Sonderheit

$$\overset{1/2}{J}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi\cdot x}}\cdot\sin(x);\quad \overset{-1/2}{J}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\cos(x)$$

Demnach bestimmen sich:

$$\overset{3/2}{J}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\sum_{0}^{1}\lambda\ \frac{(\lambda+1)!}{\lambda!\,(1-\lambda)!}\cdot\left(\frac{1}{2x}\right)^{\lambda}\cos\left\{(2+\lambda)\frac{\pi}{2}-x\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\left\{-\cos(x)+\frac{1}{x}\sin x\right\}$$

$$\overset{1/2}{J}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\sin x$$

$$\overset{1/2}{J}(x)\cdot\overset{3/2}{J}(x)=\frac{2}{\pi x}\cdot\left\{\frac{\sin^2 x}{x}-\sin x\cdot\cos x\right\}$$

$$\overset{-3/2}{J}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{0}^{1}\lambda\ \frac{(\lambda+1)!}{\lambda!\,(1-\lambda)!}\left(\frac{1}{2x}\right)^{\lambda}\sin\left\{(2-\lambda)\frac{\pi}{2}-x\right\}$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\left\{\sin x+\frac{1}{x}\cos x\right\}$$

$$\overset{-1/2}{J}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

$$\underline{\overset{-1/2}{J}(x)\cdot\overset{-3/2}{J}(x)=-\frac{2}{\pi x}\cdot\left\{\frac{\cos^2 x}{x}+\sin x\cos x\right\}}$$

$$\frac{\pi}{2}\left\{\overset{1/2}{J}(x)\,\overset{3/2}{J}(x)-\overset{-1/2}{J}(x)\,\overset{-3/2}{J}(x)\right\}=\frac{1}{x}\cdot\left\{\frac{1}{x}(\sin^2 x+\cos^2 x)\right\}=\frac{1}{x^2}$$

q. e. d.

Für die ungeraden negativen Potenzen erhält man, von derselben Formel ausgehend:

$$\frac{1}{x^{2n+1}}=\frac{\left[\frac{\pi}{\sin\mu\pi}\right]^2 2^{-2n-1}}{\Gamma(n+\mu)\cdot\Gamma(n-\mu+1)}.$$

$$\cdot \sum_{0}^{n} \lambda \, (-1)^{\lambda} \frac{(2n - 2\lambda + 1)}{(2n+1)} \cdot \frac{(2n+1)!}{\lambda!\,(2n+1-\lambda)!} \cdot$$

$$\left\{ \overset{\mu+n-\lambda}{J}(x) \overset{-\mu+n-\lambda+1}{J}(x) + \overset{\mu-n+\lambda-1}{J}(x) \overset{-\mu-n+\lambda}{J}(x) \right\}$$

Setzt man hierin wieder $\mu = \frac{1}{2}$, dann wird:

$$\frac{1}{x^{2n+1}} = \frac{\pi^2 \, 2^{-2n-1}}{\Gamma(n + {}^1\!/_2) \cdot \Gamma(n + {}^1\!/_2)} \cdot$$

$$\cdot \sum_{0}^{n} \lambda \, (-1)^{\lambda} \frac{(2n - 2\lambda + 1)\,(2n)!}{\lambda!\,(2n - \lambda + 1)!} \left\{ \ldots - \ldots \right\}$$

unter analogen Reduktionen wie oben, erhält man die endgültige Formel:

$$\frac{1}{x^{2n+1}} = \frac{2^{2n-1}\, n!\, n!}{(2n)!} \cdot \pi \cdot$$

$$\cdot \sum_{0}^{n} \lambda \, (-1)^{\lambda} \frac{(2n - 2\lambda + 1)}{\lambda!\,(2n - \lambda + 1)!} \left\{ \left[\overset{n-\lambda+{}^1\!/_2}{J}(x) \right]^2 - \left[\overset{-n+\lambda-{}^1\!/_2}{J}(x) \right]^2 \right\} \tag{87.}$$

In Formel (87.) hat man eine Entwicklung für die ungeraden negativen Potenzen, die nach Quadraten Bessel'scher Funktionen fortschreitet. Auch hier ist Bedingung, dass n nur ganzzahlige, positive Werte annehmen kann. Setzt man $n = 0$, so hat man wieder den Identitätsnachweis für die Formel (87.) indem

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{\pi}{2} \left\{ \left[\overset{{}^1\!/_2}{J}(x) \right]^2 + \left[\overset{-{}^1\!/_2}{J}(x) \right]^2 \right\} \\ &= \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{2}{\pi x} \sin^2 x + \frac{2}{\pi x} \cos^2 x \right\} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Nachdem nun die Summenformeln für die geraden und ungeraden Potenzen aufgestellt sind, ist es nicht schwierig, aus ihnen die Entwicklungen für Potenzreihen, die entweder nach negativen geraden oder negativen ungeraden Potenzen des Argumentes fortschreiten, aufzustellen. Durch Addition der Produkte Bessel'scher Funktionen mit jeweilen gleichen Parametern erhält man, wenn die zu entwickelnde, gerade Funktion die Potenzreihe hat:

$$f(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} b_\lambda \, x^{-2}$$

für dieselbe eine nach Produkten von Bessel'schen Funktionen fortschreitende Reihe von der Form:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \, x^{-2n} = \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left\{ \overset{n+1/2}{J}(x) \overset{n-1/2}{J}(x) - \overset{-n+1/2}{J}(x) \overset{-n-1/2}{J}(x) \right\} \tag{88.}$$

$$a_n = \sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^\lambda \, 2^{2n+2\lambda-2} \frac{(n+\lambda-1)! \, (n+\lambda-1)!}{(2n+2\lambda-2)!} \cdot \frac{n}{\lambda! \, (2n+\lambda)!} \cdot b_{n+\lambda}$$

Die Reihe (88.) ist für denselben Bereich definiert, für den die Potenzreihe definiert ist.

Ganz analog erhält man für Potenzreihen, die nach ungeraden negativen Potenzen des Argumentes fortschreiten, eine Entwicklung von der Form:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} b_n \, x^{-2n-1} = \pi \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\{ \left[\overset{n+1/2}{J}(x)\right]^2 + \left[\overset{-n-1/2}{J}(x)\right]^2 \right\} \\ &a_n = \sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^\lambda \, 2^{2n+2\lambda-1} \frac{(n+\lambda)! \, (n+\lambda)!}{(2n+2\lambda)!} \cdot \frac{(2n+1)}{\lambda! \, (2n+2\lambda+1)!} \cdot b_{n+\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{89.}$$

definiert für denselben Bereich wie die ursprüngliche Potenzreihe.

Literaturverzeichnis.

Die Ziffern bei Autorennamen im Text beziehen sich auf folgende Angaben:

[1]) *W. Köstler:* Beiträge zu Reihenentwicklungen nach Bessel'schen Zylinder-Funktionen. Bern, Dissertation 1907.

[2]) Vor allem: *A. Gray* und *G. B. Mathews*: A treatise on Bessel Functions and their application to Physics. London 1895.

[3]) *E. Lommel:* Studien über Bessel'sche Funktionen. Leipzig 1868.

[4]) *N. Nielsen:* Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. Leipzig 1904.

[5]) *H. Weber:* Ueber die stationären Strömungen der Elektrizität in Zylindern. Crelle Bd. 76.

[6]) *N. Nielsen:* genannten Ortes pag. 292 ff.; idem: Math. Ann. Bd. 52, 1899, pag. 228 ff.

[7]) *E. Lommel:* Studien . . . pag. 31 ff., idem: Math. Ann. Bd. II, 1870, pag. 624 ff.

[8]) *Carl Neumann:* Math. Ann. Bd. III, 1871, pag. 581 ff.

[9]) *Hansen:* Ermittlung der absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Exzentrizität und Neigung. 1. Teil. Schriften der Sternwarte Seeberg, pag. 101.

[10]) *Gegenbauer:* Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften Wien. Math. Natw. Klasse. Bd. 70, II, pag. 14 ff.

[11]) *F. W. Bessel:* Untersuchungen . . Ges. Werk I, pag. 92. idem: Berliner Abhandlungen 1824, pag. 22 ff.

[12]) *Carl Neumann:* Theorie der Bessel'schen Funktionen. Leipzig 1867.

[13]) *H. Hankel:* Math. Ann. Bd. I, 1869, pag. 467.

[14]) *J. H. Graf:* Bessel'sche Funktionen Bd. II. Bern 1900.

[15]) *J. J. Schönholzer:* Ueber die Auswertung bestimmter Integrale. Bern 1877.

[16]) *Carl Neumann:* Math. Ann. Bd. III, 1871, pag. 602 ff.

[17]) *N. Nielsen:* Math. Ann. Bd. 52, pag. 228 ff.

[18]) *E. Lommel:* Zur Theorie der Bessel'schen Funktionen. Math. Ann. Bd. II, 1870, pag. 633 ff.

[19]) *E. Lommel:* Studien über Bessel'sche Funktionen.

[20]) *J. H. Graf:* Bessel'sche Funktionen. Bd. I, pag. 32.