I. Abschnitt

I. Abschnitt.

§ 1. Klassifizierung der Reihen.

In der genannten Arbeit teilt Köstler die eigentlichen Entwicklungen nach Bessel'schen Funktionen ganz allgemein in folgende drei Typen ein:

1. Entwicklungen erster Klasse:

Reihenentwicklungen mit gleichbleibendem Parameter und veränderlichem Argument, dessen Änderung sich nach einem durch die Laufzahl λ beherrschten Gesetz vollzieht.

Ihre allgemeine Form ist:

$$\underline{F(x) = \sum_\lambda A_\lambda \, f\left[\overset{a}{J}(\varphi_\lambda(x))\right]}$$

2. Entwicklungen zweiter Klasse:

Reihenentwicklungen mit gleichbleibendem Argument und veränderlichem Parameter, dessen Änderung sich nach einem durch die Laufzahl λ beherrschten Gesetz vollzieht.

Ihre allgemeine Form ist:

$$\underline{F(x) = \sum_\lambda A_\lambda \, f\left[\overset{a_\lambda}{J}(\varphi(x))\right]}$$

3. Entwicklungen dritter Klasse:

Reihenentwicklungen mit veränderlichem Argument und veränderlichem Parameter, deren Änderungen sich jeweilen nach einem durch die Laufzahl λ beherrschten Gesetz vollziehen.

Ihre allgemeine Form ist:

$$\underline{F(x) = \sum_\lambda A_\lambda \, f\left[\overset{a_\lambda}{J}(\varphi_\lambda(x))\right]}$$

Die Entwicklungen der zweiten Klasse im besonderen lassen sich wieder in zwei Gruppen trennen, nämlich:

a. Entwicklungen nach einfachen J-Funktionen. Sie werden nach Niels Nielsen als Neumann'sche Reihen erster Art bezeichnet und sind im Allgemeinen von der Form:

$$\sum_\lambda A_\lambda \overset{\nu\pm\lambda}{J}(x)$$

$$\sum_\lambda A_\lambda \overset{\nu\pm2\lambda}{J}(x)$$

Sie wird besonders zur Darstellung von einfachen analytischen Funktionen, vorteilhaft verwendbar, wie in der genannten Schrift von W. Köstler ausführlich gezeigt wird.

b. Entwicklungen nach einfachen Produkten von J-Funktionen. Sie werden nach Niels Nielsen als Neumann'schen Reihen zweiter Art bezeichnet und sind im allgemeinen von der Form:

$$\sum_\lambda A_\lambda \overset{\nu\pm\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\mu\pm\lambda}{J}(x)$$

$$\sum_\lambda A_\lambda \overset{\frac{\nu\pm\lambda}{2}}{J}(x) \cdot \overset{\frac{\mu\pm\lambda}{2}}{J}(x)$$

speziell

$$\sum_\lambda A_\lambda \overset{\lambda}{J}(x) \; \overset{\lambda\pm\mu}{J}(x)$$

$$\sum_\lambda A_\lambda \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2$$

Die zwei letztgenannten Arten der Entwicklung geben verhältnismässig einfache Darstellungen und sie sollen im Folgenden eingehend untersucht werden.

---

§ 2. Erste Methode von Carl Neumann.

Die von *Carl Neumann* [8] angegebene Methode ist in vielen Teilen analog der von Köstler zitierten zweiten Methode zur Entwicklung nach einfachen J-Funktionen. Die Methode sei hier soweit ausgeführt, als sie für die folgenden Untersuchungen von Bedeutung ist.

An die Spitze der genannten Abhandlung stellt C. Neumann den Satz:

„Versteht man unter n eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, ... ∞, so kann die Potenz x^{2n} in eine nach Quadraten von Bessel'schen Funktionen fortschreitende Reihe entwickelt werden, welche gültig bleibt für jeden endlichen Wert von x".

Definiert man nach *F. W. Bessel*[11], *Carl Neumann*[12], *Hermann Hankel*[13] die allgemeine Bessel'sche Funktion durch die Gleichung:

$$\overset{n}{J}(x) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\lambda} (-1)^{\lambda} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\ \Gamma(n+\lambda+1)}$$

wo n jede beliebige reelle, ganze, positive Zahl sein kann, dann hat die Enwicklung der Potenz x^{2n} nach einfachen Bessel'schen Funktionen die Form:

$$x^{2n} = \alpha_0 \overset{0}{J}(x) + \alpha_2 \overset{2}{J}(x) + \alpha_4 \overset{4}{J}(x) + \alpha_6 \overset{6}{J}(x) + \dots \text{ in inf.}$$

Die nach Quadraten derselben Bessel'schen Funktion fortschreitende Entwicklung lautet dann:

$$x^{2n} = \frac{n!\,n!}{(2n)!} \left\{ \alpha_0 \left[\overset{0}{J}(x)\right]^2 + \alpha_2 \left[\overset{1}{J}(x)\right]^2 + \alpha_4 \left[\overset{2}{J}(x)\right]^2 + + \dots \text{ in inf.} \right\}$$

Die Koeffizienten der letzteren Entwicklung sind also proportional mit denen der ersteren, nämlich von diesen nur verschieden durch den gemeinschaftlichen Faktor $\frac{n!\,n!}{(2n)!}$.

Nun sind die Entwicklungen von x^0, x^2, x^4 .... nach Bessel'schen Funktionen gegeben durch:

$$1 = J(x) + 2 \cdot \sum_{1}^{\infty}{}^{\lambda} \overset{2\lambda}{J}(x)$$

$$x^2 = 2 \cdot \sum_{1}^{\infty}{}^{\lambda} (2\lambda)^2 \cdot \overset{2\lambda}{J}(x)$$

$$x^4 = \qquad 2 \cdot \sum_{2}^{\infty}{}_{\lambda}\, (2\,\lambda)^2 \left[(2\,\lambda)^2 - 2^2\right] \overset{2\lambda}{J}(x)$$

$$x^6 = \qquad 2 \cdot \sum_{3}^{\infty}{}_{\lambda}\, (2\,\lambda)^2 \left[(2\,\lambda)^2 - 2^2\right] \left[(2\,\lambda)^2 - 4^2\right] \overset{2\lambda}{J}(x)$$

$$x^8 = \qquad 2 \cdot \sum_{4}^{\infty}{}_{\lambda}\, (2\,\lambda)^2 \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right] \left[(2\lambda)^2 - 4^2\right] \left[(2\lambda)^2 - 6^2\right] \overset{2\lambda}{J}(x)$$

$$\begin{aligned} x^{2n} = \qquad 2 \cdot \sum_{n}^{\infty}{}_{\lambda}\, & (2\,\lambda)^2 \left[(2\,\lambda)^2 - 2^2\right] \left[(2\,\lambda)^2 - 4^2\right] \ldots. \\ & \left[(2\,\lambda)^2 - (2\,n - 2)^2\right] \cdot \overset{2\lambda}{J}(x) \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich nach dem oben zitierten Neumann'schen Satz die Entwicklungen dieser Potenzen nach den Quadraten der J-Funktionen zu:

$$\left.\begin{aligned}
1 &= \left[\overset{0}{J}(x)\right]^2 + 2 \cdot \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\, \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \\
x^2 &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\, (2\,\lambda)^2 \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \\
x^4 &= \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdot 2 \cdot \sum_{2}^{\infty}{}_{\lambda}\, (2\,\lambda)^2 \left[(2\,\lambda)^2 - 2^2\right] \cdot \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \\
x^6 &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot 2 \cdot \sum_{3}^{\infty}{}_{\lambda}\, (2\lambda)^2 \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right] \left[(2\,\lambda)^2 - 4^2\right] \cdot \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \\
x^8 &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \cdot 2 \cdot \sum_{4}^{\infty}{}_{\lambda}\, (2\lambda)^2 \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right] \left[(2\lambda)^2 - 4^2\right] \left[(2\lambda)^2 - \right. \\
&\qquad\qquad \left. - 6^2\right] \cdot \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \\
x^{2n} &= \frac{n!\; n!}{(2\,n)!} \cdot 2 \sum_{n}^{\infty}{}_{\lambda}\, (2\lambda)^2 \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right] \left[(2\lambda)^2 - 4^2\right] \ldots. \\
&\qquad\qquad \left[(2\lambda)^2 - (2\,n - 2)^2\right] \cdot \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2
\end{aligned}\right\} \quad (1.)$$

Nachdem die Entwicklungen für die geraden Potenzen gegeben sind, ist es möglich, die Entwicklung einer geraden Funktion herzuleiten. Ebenda beweist C. Neumann mit jeder wünschbaren Strenge, dass jede Funktion $f(x)$, welche eindeutig, stetig und gerade ist in einem Gebiet, das vollständig innerhalb eines Kreises um den Nullpunkt mit dem Radius R liegt, in eine Reihe entwickelt werden kann von der Form:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\lambda}\; k_{\lambda} \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \tag{2.}$$

welche gültig ist für alle der Bedingung $|x| < R$ entsprechenden Werte von x. Um nun mit Hilfe der vorhin hergeleiteten Entwicklungen für die geraden Potenzen von x eine einfache Methode zur Bestimmung der Entwicklungskoefizienten k_{λ} zu erhalten, stellt man vorerst eine gerade Funktion durch ein gewisses Integral dar.

Auf der x-Ebene sei um den Punkt $x = 0$ ein Kreis mit dem Radius R beschrieben. Ferner sei $f(x)$ eine gegebene Funktion, welche eindeutig, stetig und gerade ist, solange $|x| < R$ ist. Das Verhalten der Funktion auf der Peripherie des Kreises, d. h. für $|x| = R$, wird als unbekannt betrachtet. Sei ferner $x = c$ ein beliebiger Punkt innerhalb der Kreisfläche (R), d. h. für den $|c| < r < R$ ist. Dann lässt sich nach dem bekannten Satz von Cauchy der Wert der gegebenen Funktion $f(x)$ im Punkte c darstellen durch:

$$f(c) = \frac{1}{2 i \pi} \cdot \int_{(r)} f(x) \frac{dx}{x - c}$$

die Integration erstreckt in positivem Sinne über die Peripherie der Kreisfläche (r). Diese Formel muss gelten für jeden andern innerhalb der Kreisfläche (r) gelegenen Punkt, also auch z. B. für den Punkt $-c$, also:

$$f(-c) = \frac{1}{2 i \pi} \cdot \int_{(l)} f(x) \frac{dx}{x + c}$$

Durch Addition der beiden letzten Formeln folgt sofort:

$$\frac{f(c) + f(-c)}{2} = \frac{1}{2 i \pi} \cdot \int_{(r)} f(x) \frac{x \cdot dx}{x^2 - c^2}$$

Zufolge der Voraussetzung, dass f (x) eine gerade Funktion sein soll, ist f (c) = f (c); daher

$$f(c) = \frac{1}{2\,i\,\pi} \cdot \int_{(r)} f(x) \cdot \frac{x \cdot dx}{x^2 - c^2}. \tag{3.}$$

Damit ist jede gerade Funktion f (c), die endlich, stetig und gerade bleibt für jeden der Bedingung $|x| < R$ genügenden Wert von x, durch ein Integral von der Form der Gleichung (3.) dargestellt.

Vermöge der bisherigen Resultate gelingt es nun, den Neumann'schen Ausdruck $\frac{1}{y^2 - x^2} = (y^2 - x^2)^{-1}$ in die gewünschte Entwicklung zu bringen. Seien x und y zwei beliebige, komplexe Grössen, y möge als fest, x als veränderlich betrachtet werden. Der Ausdruck

$$\frac{1}{y^2 - x^2} \tag{4.}$$

stellt allsdann eine Funktion von x dar, welche eindeutig, stetig und gerade ist, solange x der Bedingung genügt $|x| < |y|$. Dann besteht nach dem oben zitierten Neumann'schen Satz eine Entwicklung von der Form:

$$\frac{1}{y^2 - x^2} = \sum_{0}^{\infty}{}^{\lambda}\, k_\lambda \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \tag{5.}$$

die gültig ist für jedes beliebige, der Bedingung $|x| < |y|$ entsprechende x. Die Koeffizienten k_λ der Entwicklung werden abhängig sein vom Parameter λ und von y. Sie seien bezeichnet mit $\varepsilon_\lambda\ \Omega^\lambda(y)$, wo $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots\ldots = \varepsilon_\lambda = \ldots\ldots = 2$.

In dieser Schreibweise wird die Entwicklung (5.) zu:

$$\frac{1}{y^2 - x^2} = \sum_{0}^{\infty}{}^{\lambda}\ \varepsilon_\lambda\ \Omega^\lambda(y) \cdot \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \tag{5a.}$$

oder

$$\frac{1}{y^2 = x^2} = \Omega^0(y) \left[\overset{0}{J}(x)\right]^2 + 2 \cdot \sum_{1}^{\infty}{}^{\lambda}\ \Omega^\lambda(y) \cdot \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2. \tag{5b.}$$

Es sei hier an die Analogie der ebenfalls von *C. Neumann*[12] gegebenen Methode zur Entwicklung nach einfachen J-Funktionen erinnert. Der Weg ist folgender: Der Neumann'sche Ausdruck $\frac{1}{y-x}$ wird in Reihe entwickelt von der Form:

$$\frac{1}{y-x} = \overset{0}{O}(y)\,\overset{0}{J}(x) + 2\cdot\sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\;\overset{\lambda}{O}(y)\,\overset{\lambda}{J}(x) \qquad (6.)$$

wo die darin auftretende Funktion $\overset{\lambda}{O}(y)$ definiert ist durch die Formel:

$$\overset{n}{O}(y) = \sum_{0}^{<\frac{n+1}{2}}{}_{\lambda}\;\frac{n}{4}\cdot\frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}\left(\frac{2}{y}\right)^{n+1-2\lambda} \qquad (6\,a.)$$

nach der von *J. H. Graf*[14] gegebenen Formulierung.

Um die in den Formeln (5a) und (5b) auftretenden unbekannten Funktionen $\Omega^{\lambda}(y)$ zu bestimmen, beachte man, dass vermöge der Bedingung $|x| < |y|$ der Ausdruck (4.) entwickelt werden kann in der Form:

$$\frac{1}{y^2 - x^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{x^2}{y^4} + \frac{x^4}{y^6} + \frac{x^6}{y^8} + + \ldots \quad \text{in inf.} \qquad (7.)$$

multipliziert man

$$1 = [\overset{0}{J}(x)]^2 + 2\cdot\sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\;[\overset{\lambda}{J}(x)]^2$$

$$x^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\;(2\lambda)^2\,[\overset{\lambda}{J}(x)]^2$$

$$x^4 = \frac{1\cdot 2}{3\cdot 4}\cdot 2\cdot\sum_{2}^{\infty}{}_{\lambda}\;(2\lambda)^2[(2\lambda)^2 - 2^2]\,[\overset{\lambda}{J}(x)]^2$$

der Reihe nach mit $\frac{1}{y^2}$; $\frac{1}{y^4}$; $\frac{1}{y^6}$; ..... und addiert, dann erhält man links den Ausdruck (7.). Rechts dagegen kommt:

$$\begin{array}{llll}
\frac{1}{y^2}\,[\overset{0}{J}(x)]^2 + \frac{2}{y^2}\,[\overset{1}{J}(x)]^2 & + \frac{2}{y^2}\,[\overset{2}{J}(x)]^2 & & + \frac{2}{y^2}\,[\overset{3}{J}(x)]^2 + \dots \\
\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{y^4}\cdot 2^2\cdot[\overset{1}{J}(x)]^2 & + \frac{1}{2}\frac{2}{y^4}\,4^2\,[\overset{2}{J}(x)]^2 & & + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{y^4}\cdot 6^2\,[\overset{3}{J}(x)]^2 + \dots \\
 & \frac{1\cdot 2}{3\cdot 4}\cdot\frac{2}{y^6}\cdot 12\cdot 4^2\,[\overset{2}{J}(x)]^2 & & + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 4}\cdot\frac{2}{y^6}\cdot 12\cdot 6^2\,[\overset{3}{J}(x)]^2 + \dots \\
 & & & \frac{1\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6}\cdot\frac{2}{y^8}\cdot 32\cdot 6^2\,[\overset{3}{J}(x)]^2 + \dots
\end{array}$$

Addiert man die Vertikalen, denselben Parametern der J-Funktion enthaltenden Kolonnen, so erhält man eine Reihe, deren Koeffizienten mit $\overset{\lambda}{\Omega}(y)$ bezeichnet sein sollen, von der Form:

$$\Omega^0(y)\,[\overset{0}{J}(x)]^2 + 2\Omega^1(y)\,[\overset{1}{J}(x)]^2 + 2\Omega^2(y)\,[\overset{2}{J}(x)]^2 + 2\Omega^3(y)\,[\overset{3}{J}(x)]^2 +$$
$$+ 2\Omega^4(y)\,[\overset{4}{J}(x)]^2 + \dots + \varepsilon_\lambda\,\Omega^\lambda(y)\,[\overset{\lambda}{J}(x)]^2 + \dots \text{ inf.} \tag{8.}$$

d. h. die Koeffizienten sind identisch mit den Koeffizienten in den Entwicklungen (5a.) und (5b.). Man hat demnach als Definitionsformel dieser von C. Neumann eingeführten Ω-Funktion in der allgemeinen Darstellung:

$$\begin{aligned}\Omega^\lambda(y) = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{2}\frac{(2\lambda)^2}{y^4} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 4}\cdot\frac{(2\lambda)^2\,[(2\lambda)^2 - 2^2]}{y^6} + \\ + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6}\cdot\frac{(2\lambda)^2\,[(2\lambda)^2 - 2^2]\,[(2\lambda)^2 - 4^2]}{y^8} + + \dots\end{aligned} \tag{9.}$$

Die Ω-Funktion ist demnach eine ganze rationale Funktion von $\frac{1}{y^2}$ ganz entsprechend der durch Formel (6a.) definierten $\overset{n}{O}(y)$-Funktion, die bei den Entwicklungen nach einfachen J-Funktionen dieselbe Rolle spielt, wie die Ω-Funktion für die Entwicklungen zweiter Art. Zwecks vorteilhafterer Verwendung der Ω-Funktion bei den späteren Anwendungen, geben wir nachstehend eine allgemeine Summenformel. Der allgemeine Summand der Formel (9.) lautet:

$$\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!}\cdot\frac{(2\lambda)^2[(2\lambda)^2-2^2][(2\lambda)^2-4^2][(2\lambda)^2-6^2]\ldots[(2\lambda)^2-(2\nu-2)^2]}{y^{2\nu+2}}$$

$$=\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!}\cdot\frac{2^{2\nu}\lambda^2[\lambda^2-1^2][\lambda^2-2^2][\lambda^2-3^2]\ldots\quad[\lambda^2-(\nu-1)^2]}{y^{2\nu+2}}$$

$$=2^{2\nu}\cdot\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!}\cdot\frac{(\lambda-\nu+1)(\lambda-\nu+2)\ldots(\lambda-1)\cdot\lambda\cdot\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+\nu-2)\cdot(\lambda+\nu-1)}{y^{2\nu+2}}$$

$$\left[\frac{1}{y^{2\nu+2}}\right]=2^{2\nu}\cdot\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!}\cdot\frac{\lambda\cdot(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}$$

woraus die allgemeine Summenformel lautet:

$$\Omega^\lambda(y)=\sum_0^{\lambda}{}_\nu\; 2^{2\nu}\cdot\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!}\cdot\frac{\lambda\cdot(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}\cdot\frac{1}{y^{2\nu+2}};\quad \Omega^0(y)=\frac{1}{y^2}\qquad(10.)$$

Daraus ergeben sich für einige Werte von λ die folgenden nummerischen Werte für die Ω-Funktion:

$$\left.\begin{aligned}
\Omega^0(y)&=\frac{1}{y^2}\\
\Omega^1(y)&=\frac{1}{y^2}+\frac{2}{y^4}\\
\Omega^2(y)&=\frac{1}{y^2}+\frac{8}{y^4}+\frac{32}{y^6}\\
\Omega^3(y)&=\frac{1}{y^2}+\frac{18}{y^4}+\frac{192}{y^6}+\frac{1152}{y^8}\\
\Omega^4(y)&=\frac{1}{y^2}+\frac{32}{y^4}+\frac{640}{y^6}+\frac{9216}{y^8}+\frac{73728}{y^{10}}\\
\Omega^5(y)&=\frac{1}{y^2}+\frac{50}{y^4}+\frac{1600}{y^6}+\frac{40320}{y^8}+\frac{737280}{y^{10}}+\frac{7372800}{y^{12}}\\
\Omega^6(y)&=\frac{1}{y^2}+\frac{72}{y^4}+\frac{3360}{y^6}+\frac{129024}{y^8}+\frac{3981312}{y^{10}}+\frac{88473600}{y^{12}}+\\
&\qquad+\frac{1061683200}{y^{14}}\\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}\right\}\;(11.)$$

Diese gefundenen Resultate notieren wir in folgendem Satz:

Der aus irgend zwei komplexen Grössen x und y gebildete Bruch $\frac{1}{y^2 - x^2}$ kann unter Anwendung der Bessel'schen Funktionen sowie gewisser anderer Funktionen $\Omega^\lambda(y)$, die durch die Formeln (9.), (10.), (11.) definiert sind, in folgende Reihe entwickelt werden.

$$\frac{1}{y^2 - x^2} = \sum_0^\infty{}^\lambda \; \varepsilon_\lambda \, \Omega^\lambda(y) \, [\overset{\lambda}{J}(x)]^2 \tag{12.}$$

Die Entwicklung ist gültig für jedes der Bedingung $|x| < |y|$ entsprechende Wertsystem von x und y.

Um eine allgemeine Methode zur Bestimmung der Koeffizienten zu erhalten, beachte man, dass nach Formel (3.) jede gerade Funktion f(x) dargestellt werden kann durch:

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \cdot \int_{(r)} f(y) \frac{y \cdot dy}{y^2 - x^2} \tag{13.}$$

indem man in Formel (3.) x gegen y und c gegen x vertauscht. Dabei ist $|x| < r < R$ und die Integration erstreckt in positivem Sinn längs der Kreisperipherie (r). Es sei nun $|y| = r$, d. h. es sei y ein Punkt der Kreislinie (r). Dann ist $|x| < |y|$ und der in (13.) auftretende Ausdruck $\frac{1}{y^2 - x^2}$ kann nach Satz (12.) in folgende Reihe entwickelt werden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{y^2 - x^2} &= \sum_0^\infty{}^\lambda \; \varepsilon_\lambda \, \Omega^\lambda(y) \, [\overset{\lambda}{J}(x)]^2 \\ &= \sum_0^\infty{}^\lambda \; k_\lambda \, [\overset{\lambda}{J}(x)]^2 \\ \text{wo } k_\lambda &= \frac{\varepsilon_\lambda}{2i\pi} \cdot \int_{(\nu)} f(y) \, \Omega^\lambda(y) \cdot y \cdot dy \end{aligned}\right\} \tag{14.}$$

Der Integrationsweg des zur Bestimmung der Koeffizienten $k\lambda$ dienenden Integrals (14.) ist, irgendwelcher Deformationen fähig, ohne dass der Wert des Integrals sich ändert, solange die Peripherie (r) nicht mit den Randpunkten R, für welche das Verhalten der Funktion als unbekannt vorausgesetzt worden ist, noch mit dem Mittelpunkt der Kreisfläche in unmittelbare Berührung kommt.

Nun ist der Bruch $\frac{1}{y^2 - x^2}$ eine gerade Funktion von x. Man kann somit jede beliebige gerade Funktion f(x) nach der durch (14.) dargestellten Weise in Reihe entwickeln. Diese Resultate notieren wir in dem folgenden Satz:

„Stellt R eine reelle, endliche Konstante und f(x) eine gegebene Funktion dar, welche eindeutig, stetig und gerade ist, so lange $|x| < R$ bleibt, dann existiert jederzeit eine Entwicklung:

$$\underline{f(x) = k_0 [\overset{0}{J}(x)]^2 + k_1 [\overset{1}{J}(x)]^0 + k_2 [\overset{2}{J}(x)]^2 + k_3 [\overset{3}{J}(x)]^2 \ldots \text{ in inf.}}$$

oder (15.)

$$\underline{f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda}\ k_\lambda\ [\overset{\lambda}{J}(x)]^2}, \text{ wo } \underline{k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2 i \pi} \cdot \int_{(r)} f(y) \cdot \Omega^\lambda(y) \cdot y \cdot dx}$$

welche gültig ist für jeden der Bedingung $|x| < R$ entsprechenden Wert von x. Die Integration ist zu erstrecken längs irgend einer Kreislinie (r), deren Mittelpunkt in $x = 0$ liegt und deren Radius $r < R$ ist.

Dabei ist $\underline{\varepsilon_0 = 1;\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots = \varepsilon_\lambda = \ldots = 2.}$

Analog lässt sich eine Funktion f(x) behandeln, welche eindeutig, stetig und gerade ist auf einer ringförmigen Fläche, die begrenzt ist von zwei konzentrischen um den Punkt $x = 0$ beschriebenen Kreisen (Laurent'scher Kranz). Sind $R_1 < R$ zwei reelle Konstanten und stellt f(x) eine gegebene Funktion dar, welche eindeutig, stetig und gerade ist, so lange $R_1 < |x| < R$ bleibt, dann existiert jeder Zeit eine Entwicklung von der Form:

$$f(x) = \frac{1}{2 i \pi} \cdot \int_{(R)} f(y) \frac{y \cdot dy}{y^2 - x^2} + \frac{1}{2 i \pi} \cdot \int_{(R_1)} f(y) \frac{y \cdot dy}{x^2 - y^2}$$

Für $|x| < |y|$ gilt nach obigem die konvergente Reihenentwicklung:

$$\frac{1}{y^2 - x^2} = \sum_0^{\infty}{}^{\lambda}\ \varepsilon_\lambda\ \Omega^\lambda(y)\,[\overset{\lambda}{J}(x)]^2$$

für $|y| < |x|$ gilt analog

$$\frac{1}{x^2 - y^2} = \sum_0^{\infty}{}^{\lambda}\ \varepsilon_\lambda \cdot \Omega^\lambda(x)\,[\overset{\lambda}{J}(y)]^2$$

Demnach lässt sich die den oben genannten Bedingungen genügende, willkürliche Funktion f (x) darstellen durch:

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \cdot \int_{(R)} \left\{ \sum_0^{\infty}{}^{\lambda}\ \varepsilon_\lambda\ \Omega^\lambda(y)\ [\overset{\lambda}{J}(x)]^2 \right\} f(y) \cdot y \cdot dy$$
$$+ \frac{1}{2i\pi} \cdot \int_{(R_1)} \left\{ \sum_0^{\infty}{}^{\lambda}\ \varepsilon_\lambda\ \Omega^\lambda(x)\ [\overset{\lambda}{J}(y)]^2 \cdot f(y)\, y \cdot dy. \right.$$

$$\underline{f(x) = \sum_0^{\infty}{}^{\lambda}\ \varepsilon_\lambda\ [\overset{\lambda}{J}(x)]^2 \cdot \frac{1}{2i\pi} \cdot \int_{(R)} \cdot\, \Omega^\lambda(y) \cdot f(y) \cdot y \cdot dy +}$$

$$\underline{+ \sum_0^{\infty}{}^{\lambda}\ \varepsilon_\lambda\ \Omega^\lambda(x) \cdot \frac{1}{2i\pi} \cdot \int_{(R_1)} [\overset{\lambda}{J}(y)]^2 \cdot f(y) \cdot y \cdot dy}$$

$$\underline{f(x) = \sum_0^{\infty}{}^{\lambda}\ k_\lambda\ [\overset{\lambda}{J}(x)]^2 + \sum_0^{\infty}{}^{\lambda} \cdot \mu_\lambda\ \Omega^\lambda(x)} \qquad (16.)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} &\underline{k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2i\pi} \cdot \int_{(R)} \Omega^\lambda(y) \cdot f(y) \cdot y \cdot dy} \\ &\underline{\mu = \frac{\varepsilon_\lambda}{2i\pi} \cdot \int_{(R_1)} [\overset{\lambda}{J}(y)]^2 \cdot f(y) \cdot y \cdot dy.} \end{aligned}\right\} \qquad (16a.)$$

Die Methode, nach welcher man zu dieser allgemeinen Darstellung kommt, ist ganz analog der durch (13.) und (14.) gegebenen und zudem in hohem Masse übereinstimmend mit der von *Graf* und *Gubler* [14] gegebenen allgemeinen Herleitung einer Methode zur Entwicklung nach einfachen J-Funktionen. Ist nämlich die Funktion f(x) in einem Laurent'schen Kranz definiert, dann gilt für $R_1 < |x| < R$

$$\underline{f(x) = \frac{1}{2i\pi} \cdot \int_{(R)} f(y) \frac{dy}{y-x} + \frac{1}{2i\pi} \cdot \int_{(R_1)} f(y) \frac{dy}{x-y}}$$

Nun ist nach (6.)

$$\frac{1}{y-x} = \overset{0}{O}(y)\,\overset{0}{J}(x) + 2\sum_{1}^{\infty}\lambda\ \overset{\lambda}{O}(y)\,\overset{\lambda}{J}(x) \qquad |x| < |y|$$

$$\frac{1}{x-y} = \overset{0}{O}(x)\,\overset{0}{J}(y) + 2 \cdot \sum_{1}^{\infty}\lambda\ \overset{\lambda}{O}(x)\,\overset{\lambda}{J}(y) \qquad |y| < |x|$$

Daher ist auch den oben genannten Bedingungen genügende, willkürliche Funktion f(x) darstellbar durch:

$$\underline{f(x) = \sum_{0}^{\infty}\lambda \left\{ k_\lambda\ \overset{\lambda}{J}(x) + \mu_\lambda\ \overset{\lambda}{O}(x) \right\}}$$

$$\text{wo} \quad \underline{k_\lambda = \frac{\varepsilon\lambda}{2i\pi} \cdot \int_{(R_1)} \overset{\lambda}{O}(y)\, f(y) \cdot dy}$$

$$\underline{\mu_\lambda = \frac{\varepsilon\lambda}{2i\pi} \cdot \int_{(R)} \overset{\lambda}{J}(y)\, f(y) \cdot dy}$$

woraus die vollkommene Analogie ersichtlich ist.

Man erkennt unschwer die vielfache Verwendbarkeit dieser Methode. Es sind ihr nur Grenzen gesetzt durch die mögliche oder unmögliche Lösung der Integralausdrücke, die zur Bestimmung der konstanten Koeffizienten dienen. Sie wird ferner dadurch beschränkt, dass die prinzipielle Bedingung erfüllt sein muss, d. h. dass f(x) eine gerade Funktion sein soll. Bei der entsprechenden Methode zur Entwicklung nach Neumann'schen Reihen erster Art hat man nur die erstere Beschränkung, indem die zu entwickelnden Funktionen gerade oder ungerade sein können. Es sei speziell nochmals hervorgehoben, dass diese Reihenentwicklungen für gerade Funktionen nach Quadraten, d. h. nach Produkten Bessel'scher Funktionen desselben Parameters fortschreiten. Nach einem später zu betrachtenden Postulat von *E. Lommel*[8] können auch ungerade Funktionen in Reihen entwickelt werden, die nach Quadraten von Bessel'schen Funktionen fortschreiten, deren Parameter aber gemischte Zahlen sind, während in den Formeln (15.) λ nur ganzzahlige, positive Werte annehmen kann.

Noch auf einen Punkt möchten wir aufmerksam machen, der in gewissem Widerspruch steht zu einer später zu besprechenden Forderung. Die Neumann'sche Entwicklungsmethode gibt konvergente Reihen für alle Werte von x, die der Bedingung genügen: $|x| < R$, wo R eine reelle, positive, endliche Grösse ist. In einer von Niels Nielsen gegebenen Methode, die zu genau denselben Reihenentwicklungen führt wie die Neumann'sche Methode, wird mit jeder wünschbaren Strenge bewiesen, dass die nach den Quadraten und Produkten Bessel'scher Funktionen fortschreitenden Reihen in demselben Bereich konvergent sind, wie die, die entwickelte Funktion darstellende Potenzreihe. Für die Entwicklung des trigonometrischen Cosinus hätte man demnach, da seine Potenzreihenentwicklung konvergent ist für alle Werte $-\infty < x < \infty$; $|x| < \infty$, ebenfalls eine konvergente Reihenentwicklung nach Neumann'schen Reihen II. Art für alle Werte $|x| < \infty$, was mit der Neumann'schen Forderung, dass R endlich sein soll, nicht so ohne weiteres vereinbar ist. Den Grund dieser Unstimmigkeit haben wir bis jetzt nicht ermittelt.

Im übrigen wird diese erste, von Carl Neumann gegebene Methode immer dann zu einem Resultat führen, wenn die zu entwickelnde gerade Funktion f (x) in eine Potenzreihe entwickelt werden kann. Dadurch werden die zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten k_λ dienenden Integralausdrücke leicht lösbar. Zur Anwendung und weiteren Erläuterung der Methode geben wir im folgendenden Paragraphen die Entwicklungen für einige gerade Funtionen.

§ 3. Anwendungen.

1. Aufstellung der Reihe für 1.

Nach (15.) ist dann zu setzen: $f(x) = x^0 = 1$
somit: $f(y) = y^0 = 1$

Daher hat man

$$f(x) = 1 = \sum_0^\infty \lambda \; k_\lambda \; [\overset{\lambda}{J}(x)]^2, \text{ wo } k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2 i \pi} \cdot \int_{(r)} \Omega^\lambda(y) \cdot y \cdot dy.$$

Die Integration ist in rechtläufigem Sinn längs einer Kreisperipherie um den Nullpunkt zu erstrecken, was wir jetzt und in allen folgenden Untersuchungen durch $\int$ andeuten. Unter Benützung der in (11.) gegebenen Summenausdrücke für $\Omega^\lambda(y)$ hat man sofort:

$$k_0 = \frac{\varepsilon_0}{2 i \pi} \cdot \int \Omega^0(y) \cdot y \cdot dy = \frac{1}{2 i \pi} \cdot \int \frac{1}{y^2} \cdot y \cdot dy = 1.$$

$$k_1 = \frac{\varepsilon_1}{2 i \pi} \cdot \int \Omega^1(y) \cdot y \cdot dy = \frac{2}{2 i \pi} \cdot \int \cdot \left\{\frac{1}{y^2} + \frac{2}{y^4}\right\} \cdot y \, dy = 2.$$

$$k_2 = \frac{\varepsilon_2}{2 i \pi} \cdot \int \Omega^2(y) \cdot y \cdot dy = \frac{2}{2 i \pi} \cdot \int \left\{\frac{1}{y^2} + \frac{8}{y^4} + \frac{3^2}{y^6}\right\} y \cdot dy = 2.$$

Analog bestimmen sich $k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = \ldots = k_\lambda = \ldots = 2.$

Unter Benützung der allgemeinen Summenformel für $\Omega^\lambda(y)$ (10.) leitet sich der allgemeine Koeffizient leicht ab.

$$k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2 i \pi} \cdot \int \sum_0^\infty \nu \; 2^{2\nu} \frac{\nu! \, \nu!}{(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda \cdot (\lambda + \nu - 1)!}{(\lambda - \nu)!} \cdot \frac{1}{y^{2\nu+2}} \cdot y \cdot dy.$$

Um das Integral auszuwerten, hat man vom Integranden denjenigen Summanden zu entnehmen, der die Potenz $y^{-1} = \frac{1}{y}$ liefert. Alle andern Potenzen von y geben zu diesem Cauchy'schen Integral keinen Beitrag. Man erkennt sofort, dass man diesen Summanden erhält durch die Setzung $-2\nu - 2 + 1 = -1$; $\nu = 0$.

Dann ist der Koeffizient von $\frac{1}{y}$, also $\left[\frac{1}{y}\right] = 1.$

Diese Bestimmungen enthalten keine Beschränkung für die Laufzahl λ, welche, wie ursprünglich definiert worden ist, alle ganzzahligen positiven Werte von 0 bis ∞ durchlaufen kann. Daher werden auch alle k_λ auftreten, und sie sind allgemein bestimmt durch:

$$k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2 i \pi} \cdot \int \frac{dy}{y} = \varepsilon_\lambda = 2; \; k_0 = 1.$$

Man hat daher die Entwicklung:

$$\underline{1 = [\overset{0}{J}(x)]^2 + 2\,[\overset{1}{J}(x)]^2 + 2\,[\overset{2}{J}(x)]^2 + 2\,[\overset{3}{J}(x)]^2 + \ldots \quad \text{in inf.}}$$

$$= [\overset{0}{J}(x)]^2 + 2 \cdot \sum_{1}^{\infty}{}^{\lambda} \; [\overset{\lambda}{J}(x)]^2 \quad \text{gültig für } |x| < R. \qquad (17.)$$

2. Aufstellung der Reihen für die geraden Potenzen.

Reihe für x^2. $\qquad f(x) = x^2; \; f(y) = y^2$

$$\text{daher ist } f(x) = x^2 = \sum_{0}^{\infty}{}^{\lambda} \; k_\lambda \; [\overset{\lambda}{J}(x)]^2,$$

$$k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2 i \pi} \cdot \int \Omega^\lambda(y) \cdot y^3 \cdot dy$$

Man findet im besonderen:

$$k_0 = \frac{\varepsilon_0}{2 i \pi} \cdot \int \Omega^0(y) \cdot y^3 \cdot dy = \frac{1}{2 i \pi} \cdot \int \frac{1}{y^2} \cdot y^3 \cdot dy = 0.$$

$$k_1 = \frac{\varepsilon_1}{2 i \pi} \cdot \int \Omega^1(y) \cdot y^3 \cdot dy = \frac{2}{2 i \pi} \cdot \int \left\{ \frac{1}{y^2} + \frac{2}{y^4} \right\} \cdot y^3 \cdot dy = 4.$$

$$k_2 = \frac{\varepsilon_2}{2 i \pi} \cdot \int \Omega^2(y) \cdot y^3 \cdot dy = \frac{2}{2 i \pi} \cdot$$

$$\cdot \int \left\{ \frac{1}{y^2} + \frac{8}{y^4} + \frac{32}{y^6} \right\} \cdot y^3 \cdot dy = 16.$$

im allgemeinen:

$$k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2 i \pi} \cdot \int \cdot \sum_{0}^{\lambda}{}^{\nu} \; 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda(\lambda+\nu-1!}{(\lambda-\nu)!} \cdot \frac{1}{y^{2\nu+2}} \cdot y^3 \cdot dy$$

die allgemeine Potenz im Integranden ist $y^{-2\nu-2+3}$. Die einzig in betracht fallende Potenz $\frac{1}{y}$ erhält man durch die Setzung $-2\nu - 2 + 3 = -1$, $\nu = 1$. Es wird dann:

$$\left[\frac{1}{y}\right] = 2^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda \cdot \lambda!}{(\lambda - 1)!} = 2\lambda^2, \qquad \text{woraus dann}$$

$$k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2 i \pi} \cdot \int 2\lambda^2 \frac{1}{y} \cdot dy = (2\lambda)^2.$$

In der Bestimmung des Koeffizienten von $\frac{1}{y}$ sind keinerlei Beschränkungen für die Laufzahl λ enthalten. Sie kann somit alle ganzzahligen, positiven Werte von 1 bis ∞ durchlaufen. Man hat demnach die Entwicklung:

$$x^2 = 4\left[\overset{1}{J}(x)\right]^2 + 16\left[\overset{2}{J}(x)\right]^2 + 36\left[\overset{3}{J}(x)\right]^2 + 64\left[\overset{4}{J}(x)\right]^2 + \ldots \text{ in inf.}$$

$$x^2 = \sum_{1}^{\infty}{}^{\lambda}\; (2\lambda)^2 \cdot \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2, \text{ gültig für } |x| < R. \qquad (18.)$$

Ganz entsprechend werden die Reihen für die folgenden geraden Potenzen von x hergeleitet.

Reihe für die allgemeine gerade Potenz x^{2n}.

Man hat zu setzen $f(x) = x^{2n}$; $f(y) = y^{2n}$

$$f(x) = x^{2n} = \sum_{0}^{\infty}{}^{\lambda}\; k_\lambda \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2$$

$$\text{wo } k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2 i \pi} \cdot \int \Omega^\lambda(y) \cdot y^{2n+1} \cdot dy.$$

$$k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2 i \pi} \cdot \int \sum_{0}^{\lambda}{}^{\nu}\; 2^{2\nu} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda(\lambda + \nu - 1)!}{(\lambda - \nu)!} \cdot \frac{1}{y^{2\nu+2}} \cdot y^{2n+1} \cdot dy.$$

$$= \frac{2}{2 i \pi} \cdot \sum_{0}^{\lambda}{}^{\nu}\; 2^{2\nu} \cdot \frac{\nu!\,\nu!\,\lambda(\lambda + \nu - 1)!}{(2\nu)!\,(\lambda - \nu)!} \cdot \int y^{-2\nu-2+2n+1} \cdot dy.$$

Die Potenz y^{-1} findet man durch die Setzung $2n + 1 - 2\nu - - 2 = -1$, $\nu = n$.

Es fallen alle Koeffizienten des Integrals weg mit Ausnahme des einzigen, in welchem man $n = \nu$ setzt. Es wird daher:

$$k_\lambda = 2 \cdot 2^{2n} \cdot \frac{n!\, n!}{(2n)!} \cdot \frac{\lambda \cdot (\lambda + n - 1)!}{(\lambda - n)!}$$

Aus dieser Bestimmungsgleichung für k_λ geht hervor, dass $\lambda \geqq n$ sein muss, indem für $\lambda < n$ der Nenner unendlich gross wird, die entspr. Koeffizienten also verschwinden. Daraus ergibt sich die Entwicklung für die allgemeine Potenz x^{2n} zu:

$$x^{2n} = \frac{n!\, n!}{(2n)!} 2 \cdot \sum_n^\infty \lambda \; \frac{(2\lambda)^2 \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right] \ldots\ldots \left[(2\lambda)^2 - -(2n-(2)^2\right] \cdot \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2}{} \qquad (19.)$$

$$= \frac{n!\, n!}{(2n)!} \cdot 2^{2n+1} \cdot \sum_n^\infty \lambda \; \frac{\lambda \cdot (\lambda + n - 1)!}{(\lambda - n)!} \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \cdot |x| < R.$$

Nach den bei der Herleitung der Methode gemachten Voraussetzungen sollen diese Reihenentwicklungen konvergent sein für jedes der Bedingung $|x| < R$ genügende x, wenn R eine reelle, endliche Konstante bedeutet. Dass zufolge dieser Bedingung die gefundenen Reihen wirklich konvergent sind, soll gezeigt werden, dadurch, dass für alle Reihen ein bestimmter Grenzwert

$$\lim \frac{|n_{n+1}|}{|n_n|} < 1$$

existiert. Damit ist dann gleichzeitig nachgewiesen, dass die Reihen unbedingt konvergieren.

Der allgemeine Term der Formel (19.) lautet, abgesehen von dem für ein und dieselbe Potenz konstanten Faktor $2^{2n+1} \cdot \frac{n!\, n!}{(2n)!}$ folgendermassen:

$$\frac{\lambda \cdot (\lambda + n - 1)!}{(\lambda - n)!} \cdot \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2$$

Die durch die unendliche Reihe

$$\overset{n}{J}(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu} \; (-1)^{\mu} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\mu}}{\mu!\; \Gamma(n+\mu+1)}$$

definierte Bessel'sche Funktion ist in dieser Darstellung absolut konvergent für jeden endlichen Wert von x. Nach einer von J. J. Schönholzer[15] gegebenen Formel bestimmt sich das Produkt zweier Bessel'scher Funktionen durch die Formel:

$$\overset{a}{J}(x) \cdot \overset{b}{J}(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu} \; (-1)^{\mu} \frac{\Gamma(a+b+2\mu+1)}{\Gamma(a+\mu+1)\,\Gamma(b+\mu+1)} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+b+2\mu}}{\Gamma(a+b+\mu+1)!\,\mu!} \qquad (20.)$$

was wegen der absoluten Konvergenz jeder einzelnen unendlichen Reihe von $\overset{a}{J}(x)$ und $\overset{b}{J}(x)$ wieder eine absolut konvergente Entwicklung ist für jeden endlichen Wert von x. Da es sich oben um das Quadrat einer Bessel'schen Funktion handelt, wo also $a = b = \lambda$ ist, so wird die Formel zu:

$$[\overset{\lambda}{J}(x)]^2 = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu} \; (-1)^{\mu} \cdot \frac{\Gamma(2\lambda+2\mu+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+1) \cdot \Gamma(\lambda+\mu+1)} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+2\mu}}{\Gamma(2\lambda+\mu+1) \cdot \mu!}$$

was unter der Annahme, dass die Laufzahl μ nur positive ganzzahlige Werte durchlaufen soll, auch geschrieben werden kann:

$$[\overset{\lambda}{J}(x)]^2 = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu} \; (-1)^{\mu} \cdot \frac{(2\lambda+2\mu)!}{(\lambda+\mu)!\;(\lambda+\mu)!} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+2\mu}}{(2\lambda+\mu)!\;\mu!} \qquad (20a.)$$

Sowohl in der Summenformel für $\overset{n}{J}(x)$ als auch in der Summenformel für $[\overset{\lambda}{J}(x)]^2$ ist der erste Summand; d. h. wenn

$\mu = 0$ ist, der grösste. Da man es hier und dort mit unendlichen Reihen zu tun hat, die bei wechselndem Vorzeichen monoton abnehmen, so ist offenbar der absolute Betrag des ersten Summanden grösser als der absolute Betrag der Summe aller Summanden. Wenn man daher bei den folgenden Konvergenzuntersuchungen den absoluten Betrag des ersten Summanden in Rechnung bringt, so führt man einen zu grossen Wert ein, indem eben:

$$\left| \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}}{\lambda!\,\lambda!} \right| > \left| \sum_{\lambda}^{\infty}{}^{\mu} \; (-1)^{\mu} \cdot \frac{(2\lambda+2\mu)!}{(\lambda+\mu)!\,(\lambda+\mu)!} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+2\mu}}{(2\lambda+\mu)!\;\mu!} \right|$$

Setzt man den Wert links statt $\left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2$ in der allgemeinen Form der Formel (19.) ein, dann kommt:

$$n_\lambda < \frac{\lambda(\lambda+n-1)!}{(\lambda-n)!} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}}{\lambda!\,\lambda!}$$

analog $$n_{\lambda+1} < \frac{(\lambda+1)\cdot(\lambda+n)!}{(\lambda-n+1)!} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+2}}{(\lambda+1)!\,(\lambda+1)!}$$

Demnach: $$\frac{n_{\lambda+1}}{n_\lambda} < \frac{(\lambda+n)}{(\lambda-n+1)} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2}}{\lambda\cdot(\lambda+1)}$$

was für gegenüber n einigermassen grosse λ zu

$$\frac{n_{\lambda+1}}{n_\lambda} < \frac{x^2}{4\cdot\lambda(\lambda+1)} < 1 \text{ für } |x| < R \qquad \text{wird.}$$

Unter der Bedingung, dass $|x| < R$, wo R eine reelle, endliche, positive Zahl sei, was unbedingt notwendig ist für die Konvergenz der die Bessel'sche Funktion definierenden unendlichen Reihe, sind die in (17.) bis (19.) hergeleiteten unendlichen Reihen unbedingt konvergent.

3. Aufstellung der Reihen für die geraden trigonometrischen Funktionen.

Reihe für cos (x).

$$f(x) = \cos(x);\ f(y) = \cos(y)$$

$$\cos(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda}\ k_{\lambda}\ [\overset{\lambda}{J}(x)]^2;\ \text{wo}\ k_{\lambda} = \frac{\varepsilon_{\lambda}}{2i\pi}\cdot$$

$$\int \cos(y)\cdot \Omega^{\lambda}(y)\cdot y\cdot dy.$$

Das Integral lässt sich am einfachsten auswerten, wenn man für cos (y) seine Potenzreihenentwicklung einsetzt:

$$\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} - + \ldots \text{inf.} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\ (-1)^{\mu}\ \frac{y^{2\mu}}{(2\mu)!}$$

Dann wird:

$$k_{\lambda} = \frac{\varepsilon_{\lambda}}{2i\pi}\cdot \int \left\{1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} - + \ldots\right\} \Omega^{\lambda}(y)\cdot y\cdot dy$$

$$= \frac{\varepsilon_{\lambda}}{2i\pi}\cdot \int \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu}\ 2^{2\nu}\ \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!}\cdot \frac{\lambda\cdot(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}\cdot \frac{1}{y^{2\nu+2}}$$

$$\cdot \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\ (-1)^{\mu}\cdot \frac{y^{2\mu}}{(2\mu)!}\cdot y\cdot dy.$$

Man erhält im einzelnen:

$$k_0 = \frac{\varepsilon_0}{2i\pi}\cdot \int \Omega^0(y) \left\{1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + - \ldots\right\}\cdot y\cdot dy = 1$$

$$k_1 = \frac{\varepsilon_1}{2i\pi}\cdot \int \Omega^1(y) \left\{1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + - \ldots\right\} y\, dy = 0$$

$$k_2 = \frac{2}{2i\pi}\cdot \int \Omega^2(y)\cdot \left\{1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + - \ldots\right\} y\cdot dy = -\frac{10}{3}$$

$$k_3 = \frac{2}{2i\pi}\cdot \int \Omega^3(y) \left\{1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} - + \ldots\right\} y\cdot dy$$

$$= -\frac{48}{1\cdot 3\cdot 5}$$

im allgemeinen:

$$k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2\,i\,\pi} \cdot \int \Omega^\lambda(y) \cos y \cdot y \cdot dy$$

$$= \frac{2}{2\,i\,\pi} \cdot \int \sum_0^\lambda{}_\nu \; 2^{2\nu} \, \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot \frac{1}{y^{2\nu+2}} \cdot$$

$$\cdot \sum_0^\infty{}_\mu \; (-1)^\mu \, \frac{y^{2\mu}}{(2\mu)!} \cdot y \cdot dy$$

Die allgemeine Potenz im Integranden ist $y^{2\mu+1-2\nu-2}$. Von allen Gliedern geben nur die einen Beitrag zum Integral, die die Potenz y^{-1} enthalten. Man erhält diese Potenz durch die Setzung $2\mu + 1 - 2\nu - 2 = -1$; $\mu = \nu$.

Dann wird $\left[\frac{1}{y}\right] = (-1)^\nu \cdot 2^{2\nu} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda \cdot (\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}$

und daher auch

$$k_\lambda = \sum_0^\lambda{}_\nu \; (-1)^\nu \cdot 2^{2\nu+1} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda \cdot (\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}; \; k_0 = 1.$$

Demnach lautet die Entwicklung für cos (x):

$$\cos(x) = [\overset{0}{J}(x)]^2 + \sum_1^\infty{}_\lambda \; 2\lambda \cdot [\overset{\lambda}{J}(x)]^2 \cdot \sum_0^\lambda{}_\nu \; (-1)^\nu \cdot 2^{2\nu} \cdot$$

$$\cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \qquad |x| < R.$$

oder

$$\cos(x) = [\overset{0}{J}(x)]^2 + 2 \cdot \sum_1^\infty{}_\lambda \; k_\lambda \cdot [\overset{\lambda}{J}(x)]^2 \tag{21.}$$

$$k_\lambda = \sum_0^\lambda{}_\nu \; (-1)^\nu 2^{2\nu} \, \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda \cdot (\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}$$

Nach Ausmittelung einiger numerischer Werte für k_λ erhält man:

$$\cos(x) = [\overset{0}{J}(x)]^2 - \frac{10}{1\cdot 3}\cdot[\overset{2}{J}(x)]^2 - \frac{48}{1\cdot 3\cdot 5}\cdot[\overset{3}{J}(x)]^2 +$$

$$+ \frac{146}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\cdot[\overset{4}{J}(x)]^2 + \frac{5520}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}[\overset{5}{J}(x)]^2 \ldots\ldots$$

Die Reihe zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten k_λ ist eine endliche, von selbst abbrechende Reihe mit alternierendem Vorzeichen. Die einzelnen Summanden werden mit zunehmenden Werten der Laufzahl ν grösser, um bei einem bestimmten Werte ν ein Maximum zu erreichen und nachher wieder abzunehmen. Wir behaupten, dass bei geraden λ der Summand der grösste wird, für den man ν ersetzt durch $\frac{\lambda}{2}$; bei ungeraden λ jedoch der, in welchem man ν ersetzt durch $\frac{\lambda - 1}{2}$. Dabei soll es sich jedesmal nur um den absoluten Wert handeln.

Wir betrachten den ersten Fall: λ gerade; $\lambda = 2\,n$, wo $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$ Der allgemeine, absolut genommene Term der Summenformel für k_λ lautet:

$$2^{2\nu}\cdot\frac{\nu!\;\nu!}{(2\,\nu)!\;(2\,\nu)!}\cdot\frac{\lambda\cdot(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}$$

Setze $\nu = \frac{\lambda}{2}$:

$$2^{\lambda}\,\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)!\left(\frac{\lambda}{2}\right)!}{\left(2\frac{\lambda}{2}\right)!\left(2\frac{\lambda}{2}\right)!}\cdot\frac{\lambda\cdot\left\{\lambda+\frac{\lambda}{2}-1\right\}!}{\left\{\lambda-\frac{\lambda}{2}\right\}!}$$

Setze $\lambda = 2\,n$:

$$2^{2n}\,\frac{n!\;n!}{(2n)!\;(2n)!}\cdot\frac{2\,n\cdot(3\,n-1)!}{n!} = 2^{2n}\cdot\frac{n!}{(2n)!\;(2n)!}\,2n\cdot(3n-1)! \quad \text{(A.)}$$

Den unmittelbar vorausgehenden Term erhält man durch die Setzung

$$\nu = \frac{\lambda}{2} - 1 = \frac{\lambda - 2}{2}$$

dann kommt

$$2^{\lambda - 2} \frac{\left(\frac{\lambda - 2}{2}\right)! \left(\frac{\lambda - 2}{2}\right)!}{(\lambda - 2)! \; (\lambda - 2)!} \; \frac{\lambda \cdot \left\{\lambda + \frac{\lambda - 2}{2} - 1\right\}!}{\left\{\lambda - \frac{\lambda - 2}{2}\right\}!}$$

Setze $\lambda = 2\,n$

$$2^{2n-2} \frac{(n-1)! \; (n-1)!}{(2\,n - 2)! \; (2\,n - 2)!} \cdot \frac{2\,n \cdot (3\,n - 2)!}{(n+1)!} \qquad \text{(B.)}$$

Den unmittelbar nachfolgenden Summand erhält man durch die Setzung:

$$\nu = \frac{\lambda}{2} + 1 = \frac{\lambda + 2}{2}$$

dann wird

$$2^{\lambda + 2} \frac{\left(\frac{\lambda + 2}{2}\right)! \left(\frac{\lambda + 2}{2}\right)!}{(\lambda + 2)! \; (\lambda + 2)!} \cdot \frac{\lambda \cdot \left\{\lambda + \frac{\lambda + 2}{2} - 1\right\}!}{\left\{\lambda - \frac{\lambda + 2}{2}\right\}!}$$

Setze $\lambda = 2\,n$

$$2^{2n+2} \frac{(n+1)! \; (n+1)!}{(2\,n + 2)! \; (2\,n + 2)!} \cdot \frac{2\,n \cdot (3\,n)!}{(n-1)!} \qquad \text{(C.)}$$

Der Quotient aus (C.) und (A.) wird, wenn man für $2\,n$ wieder λ setzt, zu:

$$\frac{(C)}{(A)} = \frac{3 \cdot \lambda^2}{4 \cdot (\lambda + 1)^2}$$

was für alle Werte von λ kleiner als eins ist; daher ist $|A| > |C|$.

Der Quotient aus (B) und (A) wird, wenn man für $2\,n$ wieder λ setzt:

$$\frac{(B)}{(A)} = \frac{4\,(\lambda - 1)\,(\lambda - 1)}{(\lambda + 2)\,(3\,\lambda - 2)}; \text{ d. h. } |A| > |B|.$$

Es ist nun interessant, dass diese letztere Ungleichung von der Grösse der Laufzahl λ abhängig ist, während die Bedingungsgleichung für die Ungleichung $|A| > |C|$ für jedes λ gilt. Mit andern Worten:

Welches auch der Wert von λ sei, unter allen Umständen sind in der Summenformel für k_λ alle Summanden, deren Laufzahl $\nu > \frac{\lambda}{2}$ ist, kleiner als der Summand, für den $\nu = \frac{\lambda}{2}$ ist.

Was die zweite Ungleichung $|A| > |B|$ anbetrifft, so kann man sich leicht überzeugen, dass der Quotient $\frac{B}{A}$ nur bis und mit $\lambda = 10$ kleiner als eins ist. Für $\lambda = 10$ erhält man:

$$\frac{(B)}{(A)} = \frac{4 \cdot 9 \cdot 9}{12 \cdot 28} = \frac{27}{28} < 1; \; |A| > |B|.$$

Für $\lambda = 12$

$$\frac{(B)}{(A)} = \frac{4 \cdot 11 \cdot 11}{14 \cdot 34} = \frac{121}{119} > 1; \; |B| > |A|.$$

d. h. bis zur Laufzahl $\lambda = 10$ wachsen die Glieder der Summe bis zum Glied mit der Laufzahl $\nu = \frac{\lambda}{2}$, welches Glied grösser ist als alle vorhergehenden und grösser ist als alle nachfolgenden. Für $\lambda > 10$ ist nicht mehr das Glied, für welches $\nu = \frac{\lambda}{2}$ ist, das grösste. Wir setzen jetzt $\nu = \frac{\lambda}{2} - 2 = \frac{\lambda - 4}{2}$; dann wird der allgemeine, absolut genommene Term:

$$2^{2n-4} \frac{(n-2)! \, (n-2)!}{(2n-4)! \, (2n-4)!} \cdot \frac{2n \cdot (3n-3)!}{(n+2)!} \qquad (B_1)$$

Bildet man den Quotienten aus (B) und (B_1), dann kommt

$$\frac{(B_1)}{(B)} = \frac{4(\lambda-3)(\lambda-3)}{(\lambda+4)(3\lambda-4)}$$

Für alle Werte von λ ist das Glied B_1, für welches $\nu = \frac{\lambda - 4}{2}$ ist, kleiner als das unmittelbar nachfolgende Glied B, für welches

$\nu = \frac{\lambda - 2}{2}$ ist. Diese Ungleichung $|B| > |B_1|$ geht bis zu $\lambda = 30$; man erhält für:

$$\lambda = 30: \frac{(B_1)}{(B)} = \frac{4 \cdot 27 \cdot 27}{34 \cdot 86} = \frac{729}{731} < 1; \; |B| > |B_1|$$

$$\text{für } \lambda = 32: \frac{(B_1)}{(B)} = \frac{4 \cdot 29 \cdot 29}{36 \cdot 92} = \frac{841}{828} > 1 \; |B_1| > |B|$$

d. h. bis zu der Laufzahl $\lambda = 30$ ist in der Summenformel für k_λ das Glied, für welches $\nu = \frac{\lambda - 2}{2}$ ist, grösser als alle vorangehenden Glieder, und was aus dem obigen folgt, grösser als alle nachfolgenden Glieder für $12 \lesseqgtr 2n \lesseqgtr 30$, wo statt λ $2n$ gesetzt ist.

Für $\lambda > 30$ trifft dies nicht mehr zu.

Wir setzen $\nu = \frac{\lambda - 4}{2} - 1 = \frac{\lambda - 6}{2}$, dann wird der allgemeine, absolut genommene Term:

$$2^{2n-6} \cdot \frac{(n-3)!\,(n-3)!}{(2n-6)!\,(2n-6)!} \cdot \frac{2n \cdot (3n-4)!}{(n+3)!} \qquad (B_2)$$

Der Quotient aus (B_2) und (B_1) wird dann, wenn $n = \frac{\lambda}{2}$ gesetzt wird:

$$\frac{(B_2)}{(B_1)} = \frac{4 \cdot (\lambda - 5) \cdot (\lambda - 5)}{(\lambda + 6) \cdot (3\lambda - 6)}$$

Für alle Werte von λ ist das Glied B_2, für welches $\nu = \frac{\lambda - 6}{2}$ ist, kleiner als das unmittelbar nachfolgende Glied B_1, für welches $\nu = \frac{\lambda - 4}{2}$ ist. Diese Ungleichung geht bis zu $\lambda = 50$; man erhält für:

$$\lambda = 50: \frac{(B_2)}{(B_1)} = \frac{4 \cdot 45 \cdot 45}{56 \cdot 144} = \frac{135}{256} < 1; \text{ d. h. } |B_1| > |B_2|$$

$$\text{für } \lambda = 52: \frac{(B_2)}{(B_1)} = \frac{4 \cdot 47 \cdot 47}{58 \cdot 150} = \frac{2209}{2175} > 1; \text{ d. h. } |B_2| > |B_1|$$

d. h. in der Summenformel für k_λ ist das Glied, für welches

$\nu = \frac{\lambda - 4}{2}$ gesetzt wird, bis zur Laufzahl $\lambda = 50$ grösser als alle vorangehenden Glieder, und für alle Werte von $\lambda = 2\,n$, für die $32 \lesseqgtr 2\,n \lesseqgtr 50$ ist, ist dieses Glied gleichzeitig grösser als alle nachfolgenden.

Wir setzen $\nu = \frac{\lambda - 6}{2} - 1 = \frac{\lambda - 8}{2}$. Der allgemeine, absolut genommene Term wird dann:

$$2^{2n-8} \frac{(n-4)!\,(n-4)!}{(2\,n-8)!\,(2\,n-8)!} \cdot \frac{2\,n \cdot (3\,n-5)!}{(n+4)!} \qquad (B_3)$$

Der Quotient aus dem Gliede B_3 und dem unmittelbar nachfolgenden B_2 wird dann, wenn statt n wieder $\frac{\lambda}{2}$ gesetzt wird:

$$\frac{(B_3)}{(B_2)} = \frac{4 \cdot (\lambda - 7)\,(\lambda - 7)}{(\lambda + 8)\,(3\,\lambda - 8)}$$

Für alle Werte von λ ist das Glied B_3, für welches $\nu = \frac{\lambda - 8}{2}$ ist, kleiner als das unmittelbar nachfolgende Glied B_2, für welches $\nu = \frac{\lambda - 6}{2}$ ist. Diese Ungleichheit besteht bis zu $\lambda = 68$; man erhält für:

$$\lambda = 68{:}\ \frac{(B_3)}{(B_2)} = \frac{4 \cdot 61 \cdot 61}{76 \cdot 196} = \frac{3721}{3724} < 1;\ |B_2| > |B_3|$$

$$\lambda = 70{:}\ \frac{(B_2)}{(B_3)} = \frac{4 \cdot 63 \cdot 63}{78 \cdot 202} = \frac{3969}{3939} > 1;\ |B_3| > |B_2|$$

d. h. in der Summenformel für k_λ ist das Glied, für welches $\nu = \frac{\lambda - 6}{2}$ gesetzt wird, bis zur Laufzahl $\lambda = 68$ grösser als alle vorangehenden Glieder, und gleichzeitig für alle Werte von $\lambda = 2\,n$, für die $52 \lesseqgtr 2\,n \lesseqgtr 68$ ist, ist dieses Glied grösser als alle nachfolgenden.

Das nächste Intervall geht von $70 \lesseqgtr 2\,n \lesseqgtr 86$.
das folgende $88 \lesseqgtr 2\,n \lesseqgtr 102$.
u. s. w. $104 \lesseqgtr 2\,n \lesseqgtr 118$.

Wir betrachten nunmehr den zweiten Fall: λ ungerade, $\lambda = 2n + 1$, $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$ Der allgemeine, absolut genommene Term der Summenformel für k_λ wird dann; wenn man wie angegeben ν ersetzt durch $\frac{\lambda - 1}{2}$ zu:

$$2^{\lambda-1} \frac{\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)! \left(\frac{\lambda-1}{2}\right)!}{(\lambda-1)!\,(\lambda-1)!} \cdot \frac{\lambda \cdot \left\{\lambda + \frac{\lambda-1}{2} - 1\right\}!}{\left\{\lambda - \frac{\lambda-1}{2}\right\}!}$$

Setze $\lambda = 2n + 1$:

$$2^{2n} \cdot \frac{n!\; n!}{(2n)!\,(2n)!} \cdot \frac{(2n+1) \cdot (3n)!}{(n+1)!} \qquad (Q^1)$$

Das unmittelbar vorausgehende Glied der Reihe erhält man, wenn man $\nu = \frac{\lambda - 1}{2} - 1 = \frac{\lambda - 3}{2}$ setzt. Dann wird der absolut genommene Term:

$$2^{\lambda-3} \frac{\left(\frac{\lambda-3}{2}\right)! \left(\frac{\lambda-3}{2}\right)!}{(\lambda-3)!\,(\lambda-3)!} \cdot \frac{\lambda \cdot \left\{\lambda + \frac{\lambda-3}{2} - 1\right\}!}{\left\{\lambda - \frac{\lambda-3}{2}\right\}!}$$

Setze $\lambda = 2n + 1$:

$$2^{2n-2} \frac{(n-1)!\,(n-1)!}{(2n-2)!\,(2n-2)!} \cdot \frac{(2n+1) \cdot (3n-1)!}{(n+2)!} \qquad (B^1)$$

Das unmittelbar nachfolgende Glied der Reihe erhält man durch die Setzung $\nu = \frac{\lambda - 1}{2} + 1 = \frac{\lambda - 1}{2}$; dann wird dieser Term:

$$2^{\lambda+1} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)! \left(\frac{\lambda+1}{2}\right)!}{(\lambda+1)!\,(\lambda+1)!} \cdot \frac{\lambda \cdot \left\{\lambda + \frac{\lambda+1}{2} - 1\right\}!}{\left\{\lambda - \frac{\lambda+1}{2}\right\}!}$$

Setze $\lambda = 2n + 1$:

$$2^{2n+2}\,\frac{(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)!\,(2n+2)!}\cdot\frac{(2n+1)\cdot(3n+1)!}{n!} \qquad (C^1)$$

Man bildet den Quotienten:

$$\frac{(C^1)}{(A^1)} = \frac{(\lambda+1)\cdot(3\lambda-1)}{4\lambda^2}$$

Dieser Quotient ist für alle Werte von $\lambda = 2n+1$, wo $n = 0, 1, 2, 3 \ldots.$ kleiner als eins, mit Ausnahme für $\lambda = 1$, $n = 0$, wo er zu eins wird. Mit andern Worten:

Für alle Werte von $\lambda = 2n+1$ ist in der Summenformel für k_λ das Glied, in welchem ν ersetzt ist durch $\frac{\lambda+1}{2}$, kleiner als alle vorangehenden. Man bildet nunmehr den Quotienten:

$$\frac{(B^1)}{(A^1)} = \frac{4(\lambda-2)(\lambda-2)}{(\lambda+3)\cdot 3(\lambda-1)}$$

Der Quotient ist für alle $\lambda = 2n+1$ kleiner als eins bis zu $\lambda = 19$; man erhält für $\lambda = 19$:

$$\frac{(B^1)}{(A^1)} = \frac{4\cdot 17\cdot 17}{22\cdot 54} = \frac{289}{297} < 1;\ |A^1| > |B^1|$$

für $\lambda = 21$:

$$\frac{(B^1)}{(A^1)} = \frac{4\cdot 19\cdot 19}{24\cdot 60} = \frac{361}{360} > 1;\ |B^1| > |A^1|$$

d. h. für alle ungeraden Zahlen $3 \gtreqless 2n+1 \gtreqless 19$, ist das Glied in der Summenformel für k_λ, in welchen ν ersetzt ist durch $\frac{\lambda-1}{2}$, grösser als alle vorangehenden und, wie oben gezeigt wurde, gleichzeitig grösser als alle nachfolgenden. Für $\lambda = 2n+1 > 19$ gilt dies nicht mehr.

Wir setzen $\nu = \frac{\lambda-3}{2} - 1 = \frac{\lambda-5}{2}$; dann wird der allgemeine Term absolut genommen:

$$2^{\lambda-5}\cdot\frac{\left(\frac{\lambda-5}{2}\right)!\left(\frac{\lambda-5}{2}\right)!}{(\lambda-5)!\,(\lambda-5)!}\cdot\frac{\lambda\cdot\left\{\lambda+\frac{\lambda-5}{2}-1\right\}!}{\left\{\lambda-\frac{\lambda-5}{2}\right\}!}$$

setze für $\lambda = 2n + 1$:

$$2^{2n-4} \cdot \frac{(n-2)!\,(n-2)!}{(2n-4)!\,(2n-4)!} \cdot \frac{(2n+1) \cdot \{3n-2\}!}{(n+3)!} \qquad (B_1^1)$$

Man bilde den Quotienten:

$$\frac{(B_1^1)}{(B^1)} \cdot \frac{4 \cdot (\lambda - 4)(\lambda - 4)}{(\lambda + 5) \cdot (3\lambda - 5)}$$

Für $\lambda = 39$ erhält man:

$$\frac{(B_1^1)}{(B^1)} = \frac{4 \cdot 35 \cdot 35}{44 \cdot 112} = \frac{175}{176} < 1;\ |B^1| > |B_1^1|$$

Für $\lambda = 41$ erhält man:

$$\frac{(B_1^1)}{(B^1)} = \frac{4 \cdot 37 \cdot 37}{46 \cdot 118} = \frac{1369}{1357} > 1;\ |B_1^1| > |B^1|$$

d. h. für alle Werte von $\lambda = 2n + 1$, $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$, ist das Glied, in welchem die Laufzahl ν ersetzt ist durch $\nu = \frac{\lambda - 3}{2}$, grösser als alle vorangehenden und alle nachfolgenden Glieder, wenn λ, resp. n im Intervall $21 \gtreqless 2n + 1 \gtreqless 39$ liegt.

Das folgende Intervall wird: $41 \gtreqless 2n + 1 \gtreqless 57$.

Das folgende Intervall wird $59 \gtreqless 2n + 1 \gtreqless 77$.

das nächste wird $79 \gtreqless 2n + 1 \gtreqless 95$.

u. s. w.

Die gefundenen Resultate sollen kurz zusammengestellt werden.

1. λ gerade, $\lambda = 2n$.

Für	$0 \gtreqless 2n \gtreqless 10$	ist das Glied mit	$\nu = \frac{\lambda}{2}$	das grösste
„	$12 \gtreqless 2n \gtreqless 30$	„ „ „ „	$\nu = \frac{\lambda - 2}{2}$	„ „
„	$32 \gtreqless 2n \gtreqless 50$	„ „ „ „	$\nu = \frac{\lambda - 4}{2}$	„ „
„	$52 \gtreqless 2n \gtreqless 68$	„ „ „ „	$\nu = \frac{\lambda - 6}{2}$	„ „

Für $70 \leqq 2\,n \leqq 86$ ist das Glied mit $\nu = \frac{\lambda - 8}{2}$ das grösste

„ $88 \leqq 2\,n \leqq 102$ „ „ „ „ $\nu = \frac{\lambda - 10}{2}$ „ „

„ $104 \leqq 2\,n \leqq 118$ „ „ „ „ $\nu = \frac{\lambda - 12}{2}$ „ „

2. λ ungerade, $\lambda = 2\,n + 1$.

Für $3 \leqq 2n + 1 \leqq 19$ ist das Glied mit $\nu = \frac{\lambda - 1}{2}$ das grösste

„ $21 \leqq 2n + 1 \leqq 39$ „ „ „ „ $\nu = \frac{\lambda - 3}{2}$ „ „

„ $41 \leqq 2n + 1 \leqq 57$ „ „ „ „ $\nu = \frac{\lambda - 5}{2}$ „ „

„ $59 \leqq 2n + 1 \leqq 77$ „ „ „ „ $\nu = \frac{\lambda - 7}{2}$ „ „

„ $79 \leqq 2n + 1 \leqq 95$ „ „ „ „ $\nu = \frac{\lambda - 9}{2}$ „ „

„ $97 \leqq 2n + 1 \leqq 115$ „ „ „ „ $\nu = \frac{\lambda - 11}{2}$ „ „

„ $117 \leqq 2n + 1 \leqq 133$ „ „ „ „ $\nu = \frac{\lambda - 13}{2}$ „ „

Die Anzahl der Werte, die λ in den verschiedenen Intervallen annehmen kann, sind für

gerade λ resp. 5, 10, 10, 9, 9, 8, 8, 6, 6

ungerade λ resp. 9, 10, 9, 10, 9, 10, 9, 10, 9.

Für die geraden λ hat man nicht die periodische Regelmässigkeit, wie für die ungeraden λ, indem erstere in der Folge wieder viel grössere Intervalle zeigen.

Wenn man nun zur Untersuchung der Konvergenz der Reihe (21.) zurückkehrt, denn zu diesem Zwecke ist die Summenformel für k_λ etwas genauer betrachtet worden, so fragt es sich, welchen Wert man in der Formel:

$$k_\lambda = \sum_0^\lambda{}^{\nu} (-1)^\nu \cdot 2^{2\nu} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\,\nu)!\,(2\,\nu)!} \cdot \frac{\lambda \cdot (\lambda + \nu - 1)!}{(\lambda - \nu)!}$$

dem ν erteilen muss, um in der Konvergenzbetrachtung der Reihe:

$$\cos(x) = [\overset{0}{J}(x)]^2 + 2 \cdot \sum_1^\infty \lambda \; k_\lambda \; [\overset{\lambda}{J}(x)]^2$$

keinen zu kleinen Wert einzuführen. Unserer Ansicht nach kann hier nicht genau gesagt werden, für einen unendlich grossen Wert von λ habe man, um in k_λ das grösste Glied herauszunehmen, für ν den oder jenen Wert einzusetzen, sondern es kann sich nur um eine angenäherte Schätzung für sehr grosse Werte von λ handeln. Man kommt mit der Setzung für gerade λ: $\nu = \frac{\lambda - 1000}{2}$, für ungerade λ: $\nu = \frac{\lambda - 1001}{2}$ jeden Fall schon zu sehr grossen Werten der Laufzahl λ. Im ersteren Fall wird dann der allgemeine Term von k_λ zu:

$$(-1)^{\frac{\lambda - 1000}{2}} \cdot 2^{\lambda - 1000} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda - 1000}{2}\right)! \left(\frac{\lambda - 1000}{2}\right)!}{(\lambda - 1000)! \; (\lambda - 1000)!} \cdot \frac{\lambda \cdot \left\{\lambda + \frac{\lambda - 1000}{2} - 1\right\}!}{\left\{\lambda - \frac{\lambda - 1000}{2}\right\}!}$$

Setze für $\lambda = 2\,n$, so wird, da

$$(-1)^{n - 500} = (-1)^n$$

$$(-1)^n \cdot 2^{2n - 1000} \frac{(n - 500)! \; (n - 500)!}{(2n - 1000)! \, (2n - 1000)!} \cdot \frac{2\,n \cdot (3\,n - 501!}{(n + 500)!}$$

Dieser Wert ist für das sehr grosse gerade λ der grösste von allen Summanden der Summenformel für k_λ. Da diese wechselndes Vorzeichen hat, ist der obige Wert absolut genommen gleichzeitig grösser als der absolute Wert der ganzen Summe. Für diesen sehr grossen Wert $\lambda = 2\,n$ wird dann der zugehörige grösste Wert des Quadrates der J-Funktion, also von

$$[\overset{\lambda}{J}(x)]^2, \text{ zu: } \left| \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\lambda}{\lambda! \; \lambda!} \right| = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(2\,n)! \; (2\,n)!}$$

Das Produkt $k_\lambda \cdot [\overset{\lambda}{J}(x)]^2$ für $\lambda = 2n$ wird dann:

$$\left| k_\lambda \cdot [\overset{\lambda}{J}(x)]^2 \right| = \left| k_{2n} \cdot [\overset{2n}{J}(x)]^2 \right| <$$

$$< \left| 2^{2n-1000} \cdot \frac{(n-500)!\,(n-500)!}{(2n-1000)!\,(2n-1000)!} \cdot \frac{2n \cdot (3n-501)!}{(n+500)!} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(2n)!\,(2n)!} \right|$$

Analog wird für ungerades λ: $\lambda = 2n + 1$:

$$\left| k_{\lambda+1} \cdot [\overset{\lambda+1}{J}(x)]^2 \right| = \left| k_{2n+1} [\overset{2n+1}{J}(x)]^2 \right| <$$

$$< \left| 2^{2n-1000} \cdot \frac{(n-500)!\,(n-500)!}{(2n-1000)!\,(2n-1000)!} \cdot \frac{(2n+1) \cdot (3n-500)!}{(n+500)!} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)!} \right|$$

Der Quotient wird dann:

$$\frac{\left| k_{\lambda+1} \cdot [\overset{\lambda+1}{J}(x)]^2 \right|}{\left| k_\lambda \cdot [\overset{\lambda}{J}(x)]^2 \right|} < \frac{(3n-500)\left(\frac{x}{2}\right)}{(n+501)(2n+1) \cdot 2n} = \frac{(3\lambda - 1003) \cdot x}{2\lambda \cdot (\lambda+1) \cdot (\lambda+1002)}$$

Für $\lambda = 400$ erhält man annähernd einen Quotienten von $1:2.10^6$. Da die absoluten Werte untersucht worden sind, so ist die Reihe:

$$\cos(x) = [\overset{0}{J}(x)]^2 + 2 \cdot \sum_{1}^{\infty}{}_\lambda \; k_\lambda \cdot [\overset{\lambda}{J}(x)]^2$$

wo $$k_\lambda = \sum_{0}^{\infty}{}_\nu \; (-1)^\nu \cdot 2^{2\nu} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda \cdot (\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}$$

auf Grund dieser angenäherten Schätzung absolut konvergent für alle endlichen Werte von x.

Im Anschluss an diese Beweisführung möchten wir nicht unterlassen zuzugeben, dass sie weit entfernt davon ist, einen streng gültigen Beweis zu erbringen und rein empirischen Charakters ist. Da wir bis jetzt nicht Mittel und Wege gefunden haben, einen solchen zu leisten, behalten wir uns vor, darauf zurückzukommen.

Reihe für den hyperpolischen Cosinus. $\text{coſ}\,(x)$.

$$f(x) = \text{coſ}\,(x); \; f(y) = \text{coſ}\,(y)$$

$$\text{coſ}\,(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda}\; k_\lambda \,.\, [\overset{\lambda}{J}(x)]^2, \text{ wo } k_\lambda =$$

$$= \frac{\varepsilon_\lambda}{2\,i\,\pi} \cdot \int \Omega^\lambda (y) \cdot \text{coſ}\,(y) \cdot y \cdot d\,y.$$

Bekanntlich ist der hyperbolische Cosinus definiert durch:

$$\text{coſ}\,(y) = \frac{1}{2}\,(e^y + e^{-y}) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\; \frac{y^{2\mu}}{(2\,\mu)\,!}$$

Die Koefizienten bestimmen sich ganz analog wie beim trigonometrischen Cosinus, so dass wir uns auf die Bestimmung des allgemeinen Koefizienten k_λ beschränken können.

$$k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2\,i\,\pi} \cdot \int \Omega^\lambda (y)\, \text{coſ}\,(y) \cdot y \cdot d\,y$$

$$= \frac{2}{2\,i\,\pi} \cdot \int \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu}\; 2^{2\nu} \cdot \frac{\nu\,!\;\nu\,!}{(2\,\nu);} \cdot \frac{\lambda\,(\lambda + \nu - 1)\,!}{(\lambda - \nu)\,!}\; \frac{1}{y^{2\nu+2}}$$

$$\cdot \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\; \frac{y^2}{(2\,\mu)\,!} \cdot y \cdot d\,y$$

Mit Ausnahme des hier fehlenden Faktors (-1) hat man genau den obigen Fall, daher wird:

$$k_\lambda = 2\,\lambda \cdot \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu}\; 2^{2\nu} \cdot \frac{\nu\,!\;\nu\,!}{(2\,\nu)\,!\;(2\,\nu)\,!} \cdot \frac{(\lambda + \nu - 1)\,!}{(\lambda - \nu)\,!};\; k_0 = 1.$$

Man erhält dann die Reihe:

$$\cos(x) = [\overset{0}{J}(x)]^2 + \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\ k_{\lambda} \cdot [\overset{\lambda}{J}(x)]^2 \qquad |x| < R.$$

$$= [\overset{0}{J}(x)]^2 + \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\ 2\lambda \cdot [\overset{\lambda}{J}(x)]^2 \cdot \sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu}\ 2^{2\nu} \cdot$$

$$\cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \tag{22.}$$

$$\cos(x) = [\overset{0}{J}(x)]^2 + 3\,[\overset{1}{J}(x)]^2 + \frac{38}{1\cdot 3} \cdot [\overset{2}{J}(x)]^2 + \frac{588}{1\cdot 3\cdot 5} \cdot [\overset{3}{J}(x)]^2 +$$

$$+ \frac{6121}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\,[\overset{4}{J}(x)]^2 + \ldots \text{ inf.}$$

Die Konvergenz der Reihe lässt sich ähnlich wie oben nachweisen.

Damit sind die geraden Funktionen, die in Potenzreihe entwickelt werden können erschöpft, und man betrachtet im folgenden eine neue Methode zur Entwicklung von ungeraden Funktionen.
