

# Ueber einige wichtige Kurven des Kurbeltriebes

Autor(en): **Crelier, L.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): - **(1916)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-571161>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Ueber einige wichtige Kurven des Kurbeltriebes.

### I.

Wir wissen, dass der Kurbeltrieb oder die Schubkurbel bestimmt ist durch eine bewegliche Strecke  $A B$  von fester Grösse, so dass die Rollbahn (A) von A eine Gerade und diejenige von B ein Kreis (B) ist, dessen Zentrum auf der Geraden liegt.

Wir kennen übrigens auch die fundamentalen Kurven dieses Systems, wie das Rollbett, die rollende Kurve, die Rollbahnen von Punkten der beweglichen Ebene und die Umhüllungskurven der verschiedenen Geraden dieser gleichen Ebene.

Wir wollen in den folgenden Ausführungen eine gewisse Zahl veränderlicher Figuren betrachten, die mit der Bewegung der Koppel  $A B$  in Verbindung stehen und die geometrischen Orte der charakteristischen Punkte dieser Figuren und ihre Eigenheiten studieren.

Wie wir zuerst sehen werden, bilden diese Kurven eine Reihe schöner Beispiele für das Studium der höhern Singularitäten.

Im weitem führt uns das Bestimmen der Tangenten einiger dieser Kurven zu verschiedenen originellen und eleganten Konstruktionen, wie auch zu einigen sehr beachtenswerten geometrischen Eigenartigkeiten.

Schliesslich führt uns diese Studie zu mehreren Resultaten, die zu weitem Entwicklungen Anlass geben, wie wir in Form einiger Beispiele anführen, welche zeigen sollen, wie eine einfache Frage der kinematischen Geometrie den Ausgangspunkt zu verschiedenen interessanten geometrischen Nachforschungen bilden kann.

### II.

Wenn  $A B = l$  die Koppel ist und  $O B = R$  die Kurbel, so beachten wir zuerst, dass  $O B A$  in allen Lagen einem andern Kurbeltrieb  $O B' A$  entspricht, so dass  $O B' = l = R'$  und  $B' A = R = l'$ ;  $O B'$  sei dann Kurbel und  $A B'$  Koppel;  $O B' A$  ist zudem auf  $O A$  und auf der gleichen Seite von  $O A$  symmetrisch zu  $O B A$ . (Fig. 1

u. 2.) Wie wir einen Kurbeltrieb OBA oder OB'A rechts von Oy haben, können wir auch einen solchen links davon annehmen.

Das Momentanzentrum von OBA liegt in C und dasjenige von OB'A in C' und wenn  $R \geq 1$ , so haben wir  $R' \leq 1'$ , und wir sagen, es seien zwei Hauptfälle möglich  $R > 1$  und  $R < 1$ .

Unter den veränderlichen Figuren betrachten wir die Rechtecke OACC'' und OAC'C'', ferner das Rechteck BB'DE auf den Diagonalen des erstern und endlich die Dreiecke ABI, OCII und OCIII. In diesen letztern ist OII  $\perp$  AB und OIII  $\perp$  A<sub>1</sub>B. (Fig. 9, 10, 11 u. 12).

AB und A<sub>1</sub>B sind zwei symmetrische Lagen der gleichen Koppel.

Wir werden nun folgende Gebilde genauer studieren:

1. Den Ort der Punkte D auf der Diagonale OBC.
2. Den Ort der Punkte E auf der Diagonale AB'C''.
3. Den Ort der Projektionen der Eckpunkte des Rechtecks OACC'' auf die Diagonalen, das heisst den Ort von F, H, J und K. (Fig. 3, 4, 5 u. 6).
4. Den Ort der Punkte F<sub>1</sub>, H<sub>1</sub>, J<sub>1</sub> und K<sub>1</sub>, wo OF<sub>1</sub> = 2 OF, C''H<sub>1</sub> = 2 C''H, AJ<sub>1</sub> = 2 AJ und CK<sub>1</sub> = 2 CK sei.
5. Den Ort der Punkte M und M<sub>1</sub>, wenn C''M  $\perp$  OB' und C''M<sub>1</sub> = 2 C''M.
6. Den Ort der Punkte I mit BI  $\perp$  AB und AI  $\perp$  Ox.
7. Den Ort der Punkte II, mit OII  $\perp$  AB und CII  $\perp$  OII.
8. Die Tangente in einem Punkte der rollenden Kurve.
9. Die Tangente in einem Punkte des Rollbettes.
10. Die Tangente in einem Punkte der Kurve D.
11. Die verschiedenen Mechanismen oder kinematischen Systeme, die aus den Tangentenkonstruktionen resultieren.
12. Spezielle Sehnen der Rollbahn (a) von a mit Aa = R auf der Verlängerung der Koppel.

Unter den zu lösenden Fragen sind die direkten und vollständigen Konstruktionen verschiedener Kurven von besonderer Wichtigkeit.

Nur eine solche Konstruktion lässt eine sichere geometrische Besprechung der Resultate zu.

Im allgemeinen haben wir jede Kurve für beide Fälle,  $R > 1$  und  $R < 1$  konstruiert.

Die analytische Besprechung der einfachen Punkte soll hierauf gemäss der allgemeinen Theorie aufgestellt werden. Ueberall da, wo ein neues kinematisches System in ganzer oder teilweiser Bewegung der veränderlichen Figuren auftritt, ist es sehr empfehlenswert, die fundamentalen Kurven davon zu studieren. Nur dann wird es möglich sein, die Theorie der veränderlichen Figuren zu beherrschen und deren Eigenartigkeiten zu verstehen.

### III.

**Rollbett.** (Fig. 1 und 2.) Das Rollbett ist der Ort der Punkte C für den Kurbeltrieb OBA.

Die Gleichung des Rollbettes lautet:

$$(x^2 + y^2) [x^2 + R^2 - l^2]^2 = 4 R^2 x^4 \quad 1)$$

$$\text{oder } \varrho (\varrho \pm 2 R) \cos^2 \varphi + R^2 - l^2 = 0$$

Wenn  $l > R$ , so haben wir zwei Asymptoten. (Fig. 2.)

$$x = \pm \sqrt{l^2 - R^2}$$

Im 1. Fall  $R > l$  haben wir keine Asymptoten. (Fig. 1.) Die Polargleichung kann auch folgendermassen geschrieben werden:

$$\varrho = \mp R \pm \sqrt{\frac{l^2 - R^2 \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}} = \mp R \pm l \frac{\cos \omega}{\cos \varphi};$$

$$\sphericalangle \varphi = \text{AOB} = \text{OAB}' ; \sphericalangle \omega = \text{OAB} = \text{AOB}'.$$

Gibt man sich Rechenschaft über das Zeichen des Winkels, so kann  $\varrho$  immer durch den Ausdruck  $\varrho = R \pm l \frac{\cos \omega}{\cos \varphi}$  dargestellt werden.

Im Falle  $R > l$  sind die Punkte des Kreises mit dem Radius  $R$  die Mittelpunkte der Sehnen  $CC_1$  des Rollbettes, welche auf der gleichen Hälfte durch irgend einen beliebigen Radiusvector bestimmt werden. (Fig. 1.)

Im Falle  $R < l$  sind die Punkte des gleichen Kreises die Mittelpunkte der Sehnen  $CC_1$  auf einem beliebigen Strahle, aber zwischen einem äussern Aste der einen und dem innern Aste der andern Seite. (Fig. 2.)

---

<sup>1)</sup> Siehe: Literaturverzeichnis.

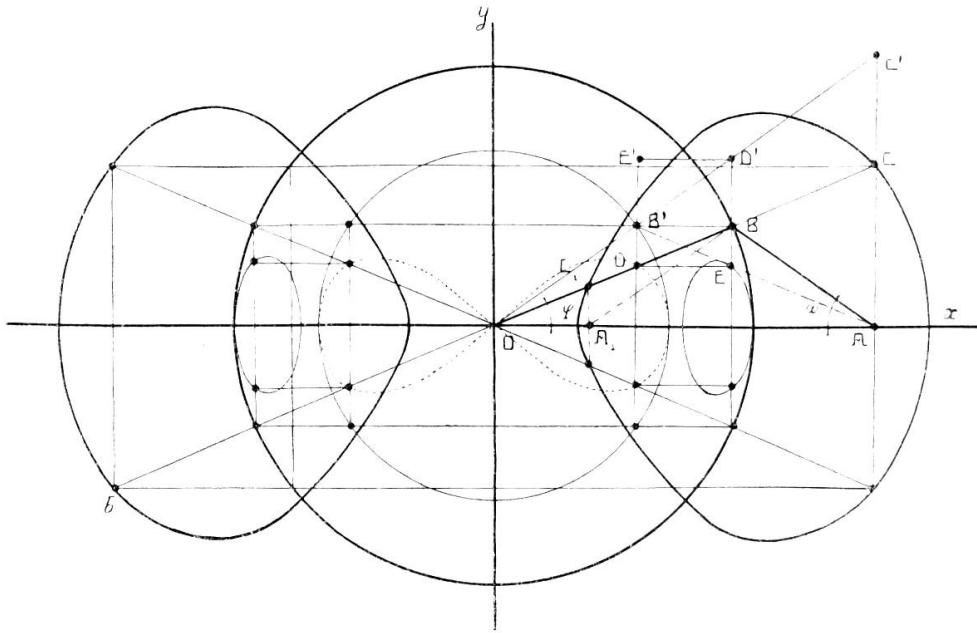


Fig. 1. Kurven C, D, E mit  $R > 1$ .

IV.

**Kurve D.** Wir haben die Kurbel OB und die Koppel AB und fällen ein Perpendikel vom Punkte B' auf die x-Axe, welches die Kurbel OB schneidet.

Der Schnittpunkt wird mit D bezeichnet (Fig. 1 und 2). Die betreffende Kurve ist der Ort der Punkte D. Ihre Gleichung heisst:

$$(x^2 - 1^2) (x^2 + y^2) + R^2 y^2 = 0 \quad ^2)$$

oder 
$$\beta = \frac{1 \cos \omega}{\cos \varphi}$$

Wenn  $R > 1$ , ist die Kurve eine zweiblättrige Rosenkurve, und wenn  $R < 1$ , sind 2 Asymptoten vorhanden, mit den Gleichungen  $x = \pm \sqrt{1^2 - R^2}$ .

Jedem Punkte D der betrachteten Kurve entsprechen zwei Punkte der Kurve C, einer durch Addition, der andere durch Subtraktion der Konstanten R. Unter diesen Bedingungen hat die Gleichung des Ortes der Punkte C als Konchoïde des Ortes der Punkte D folgende Form:

$$\varrho' = \varrho \pm R, \text{ oder einfacher Weise } \varrho' = \varrho + R$$

V.

**Kurve E.** Die 3 Punkte B, B' und D bestimmen mit dem 4. Punkte E ein Rechteck. Die neue Kurve ist der Ort der

Punkte E (Fig. 1 und 2). Es seien  $x$  und  $y$  die Koordinaten von E, dann ist:

$$y^2 = OD^2 \sin^2 \varphi = \frac{l^2 - R^2 \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \sin^2 \varphi$$

$$x = R \cos \varphi$$

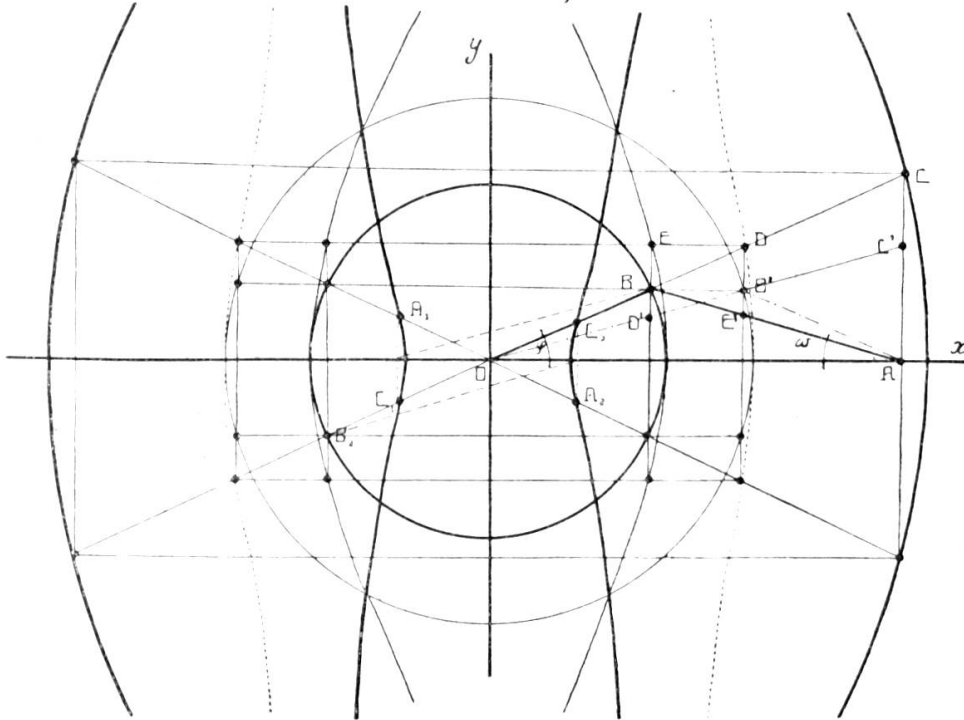


Fig. 2. Kurven C, D, E mit  $R < 1$ .

Wir schaffen in beiden Gleichungen  $\varphi$  weg.

$$y^2 = \frac{l^2 - R^2 \left( \frac{R^2 - x^2}{R^2} \right)}{\frac{x^2}{R^2}} \cdot \frac{R^2 - x^2}{R^2} = \frac{1}{x^2} [l^2 - (R^2 - x^2)] (R^2 - x^2)$$

oder  $x^2 y^2 - [l^2 - (R^2 - x^2)] (R^2 - x^2) = 0$

So lautet die gesuchte Gleichung. Daraus folgt:

$$\varrho^2 \cos^2 \theta (\varrho^2 - 2R^2 + l^2) + R^2 (R^2 - l^2) = 0$$

Wenn  $R > 1$ , so haben wir:

$$y^2 = \frac{1}{x^2} [x^2 - (R^2 - l^2)] (R^2 - x^2). \quad \text{Somit müssen wir haben}$$

$$-R < x < R \text{ und}$$

$$-\sqrt{R^2 - l^2} > x > +\sqrt{R^2 - l^2}.$$

Der Wert von  $x$  liegt also zwischen den beiden Werten von  $-R$  bis  $-\sqrt{R^2 - l^2}$  und  $+\sqrt{R^2 - l^2}$  bis  $R$ .

Die Kurve setzt sich also aus 2 ovalen in Bezug auf die x-Axe symmetrischen Teilen zusammen. (Fig. 1.)

Wenn  $R < 1$ , haben wir

$$y^2 = \frac{1}{x^2} [l^2 - R^2 + x^2] (R^2 - x^2).$$
 Der erste Faktor ist immer positiv. Beim andern müssen wir folgendes haben:  $-R < x < +R$ ;  $x$  muss man sich daher zwischen  $-R$  und  $+R$  vorstellen und für  $x = 0$  ist die Axe eine doppelte Asymptote. Die Koordinatenachsen sind ebenfalls zwei Symmetrieachsen. (Fig. 2.)

*Bemerkung.* Wenn wir von einem System OBA ausgehen mit  $R > 1$ , so gibt uns das System OB'A, das ans erste System gebunden ist, seinerseits ein Rollbett, eine Kurve D und eine Kurve E; es sind dies die zweiten Fälle des Vorausgehenden. Man kann sie durch die nämlichen Gleichungen darstellen, in denen  $R < 1$  sein wird oder die ursprünglichen Werte von  $R$  und  $l$  behalten und sie dann vertauschen und  $\varphi$  durch  $\omega$  ersetzen und umgekehrt.

Die betreffenden Kurven können wir folgenderweise zusammenstellen:

Kurve C: 1.  $(x^2 + y^2)(x^2 + R^2 - l^2) = 4R^2 x^2.$

2.  $\varrho = R + l \frac{\cos \omega}{\cos \varphi}$

Kurve C': 1.  $(x^2 + y^2)(x^2 + l^2 - R^2) = 4l^2 x^2.$

2.  $\varrho = l + R \frac{\cos \varphi}{\cos \omega}$

Kurve D: 1.  $(x^2 + y^2)(x^2 - l^2) + R^2 y^2 = 0.$

2.  $\varrho = l \frac{\cos \omega}{\cos \varphi}$

Kurve D': 1.  $(x^2 + y^2)(x^2 - R^2) + l^2 y^2 = 0.$

2.  $\varrho = R \frac{\cos \varphi}{\cos \omega}$

Kurve E: 1.  $x^2 y^2 - (l^2 - R^2 + x^2)(R^2 - x^2) = 0.$

2.  $\varrho^2 \cos^2 \Theta (\varrho^2 - 2R^2 + l^2) + R^2 (R^2 - l^2) = 0.$

Kurve E': 1.  $x^2 y^2 - (R^2 - l^2 + x^2)(l^2 - x^2) = 0.$

2.  $\varrho^2 \cos^2 \Theta (\varrho^2 - 2l^2 + R^2) + l^2 (l^2 - R^2) = 0.$

Die 6 Kurven haben wir für jeden Fall  $R > 1$  oder  $R < 1$ . Die 1. Figur enthält sie für  $R > 1$  und die 2. für  $R < 1$ . Wie gesagt worden ist, bildet die Kurve  $C'$  der ersten Figur die Kurve  $C$  der andern und umgekehrt und dasselbe haben wir mit den Kurven  $D$  und  $D'$  und dann mit den Kurven  $E$  und  $E'$ .

IV.

**Kurve F.** Der Punkt  $F$  ist der Fusspunkt der Normalen, die vom Ursprung auf die Diagonale  $AB'$  gefällt wird. Die be-

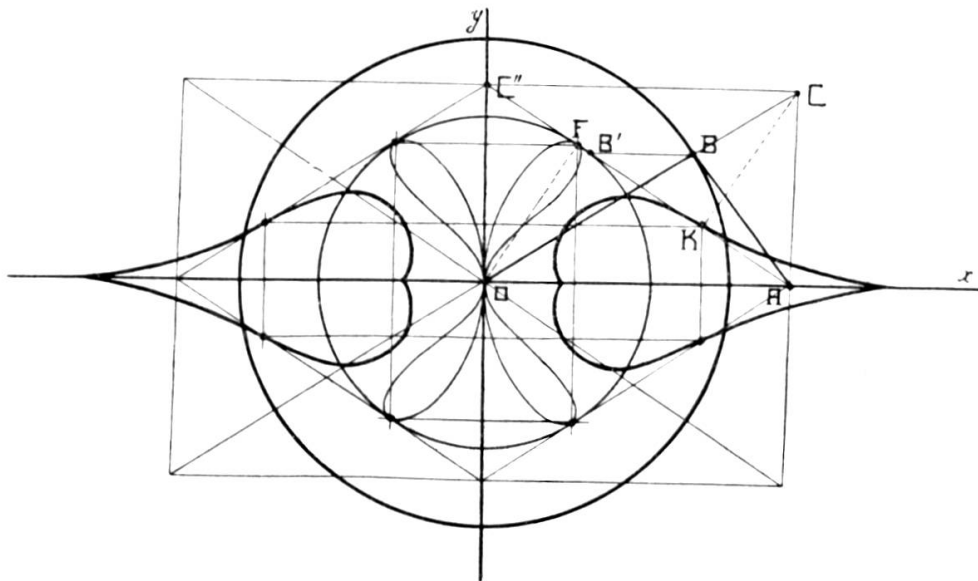


Fig. 3. Kurven F u. K mit  $R > 1$

trachtete Kurve ist daher die Fusspunktskurve der Umhüllungskurve dieser Diagonale inbezug auf den Ursprung. (Fig. 3 und 4.)

Wir können die Gleichung des Ortes der Punkte  $F$  in Polarkoordinaten suchen und wir haben

$$\begin{aligned} \rho &= OF = OB' \sin(\omega + \varphi) = l \sin(\omega + \varphi) \\ &= l \sin \omega \cos \varphi + l \sin \varphi \cos \omega = \sin \varphi \sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \varphi} + R \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned}$$

Das Argument  $\Theta$  heisst auch

$$\Theta = 90^\circ - \varphi$$

d. h.:  $\rho = \cos \Theta \sqrt{l^2 - R^2 \cos^2 \Theta} + R \sin \Theta \cos \Theta.$

oder:  $(\rho - R \sin \Theta \cos \Theta)^2 = \cos^2 \Theta (l^2 - R^2 \cos^2 \Theta).$

Man kann kürzen:

$$\rho^2 - 2R \rho \sin \Theta \cos \Theta - (l^2 - R^2) \cos^2 \Theta = 0.$$



Diese Gleichung ist die gesuchte Gleichung; in orthogonalen Koordinaten heisst sie:

$$\left[ (x^2 + y^2)^2 - (l^2 - R^2) x^2 \right]^2 = 4 R^2 x^2 y^2 (x^2 + y^2).$$

Die Gleichung ist vom 8. Grade. Die Koordinatenachsen sind Symmetrieachsen.

Der Ursprung ist ein vierfacher Punkt und die  $y$ -Axe ist eine vierfache Tangente in diesem Punkte.

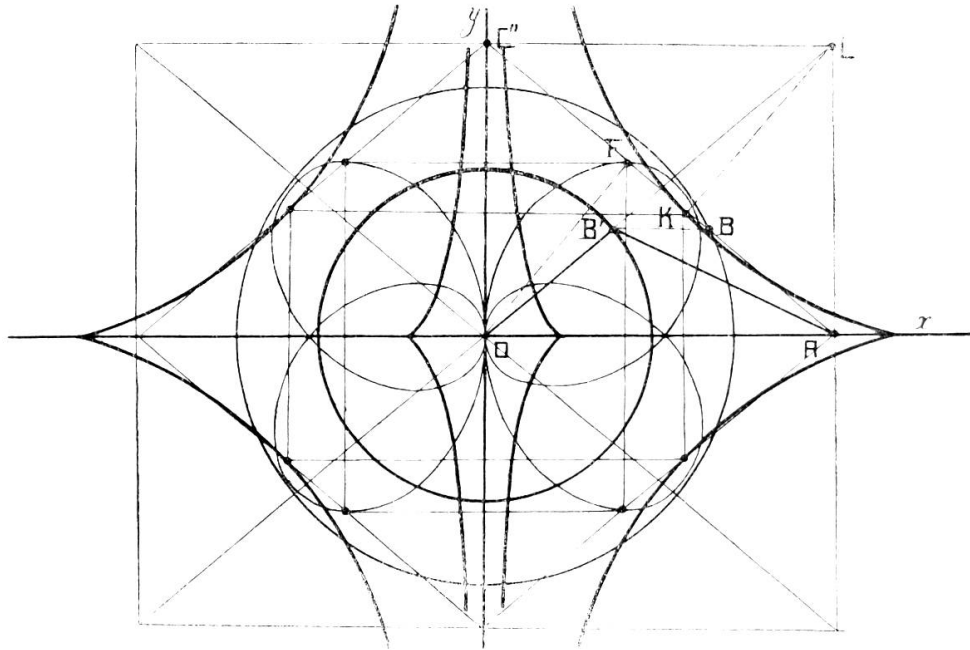


Fig. 4. Kurven F u. K mit  $R < l$ .

Im übrigen sind die Punkte  $(+\sqrt{l^2 - R^2}, 0)$  u.  $(-\sqrt{l^2 - R^2}, 0)$  Doppelpunkte der Kurve. Wenn  $R < l$  ist, werden diese Doppelpunkte der Kurve imaginär.

Für den Fall  $R = l$ , bleibt uns:  $(x^2 + y^2)^3 = 4R^2 x^2 y^2$ , d. h. die Gleichung der vierblättrigen Rosenkurve oder „Vierblatt“, die mit den Astroïden verwandt ist.<sup>3)</sup>

Der Ort der Punkte F ist daher eine Verallgemeinerung des „Vierblattes“. Wir können bemerken, dass vom geometrischen Gesichtspunkt aus betrachtet, die betrachtete Kurve sich auf zwei Bewegungen des Kurbeltriebes bezieht, mit gemeinsamem Zentrum in O und symmetrischer Lage in bezug auf dasselbe.

Das System OBA ergibt nur eine Hälfte der Kurve.

VII.

**Kurve H.** (Fig. 5 u. 6). Es sei  $C''$  der 4. Eckpunkt eines Rechteckes  $OACC''$  und  $OC$  eine Diagonale.

Fällen wir  $C''H \perp$  auf  $OC$ , so sei  $H$  der Fusspunkt des Perpendikels von  $C''$  auf  $OC$ .

Es seien nun  $x$  und  $y$  die Koordinaten von  $H$  und  $x'$  und  $y'$  diejenigen von  $C$ ; dann haben wir:

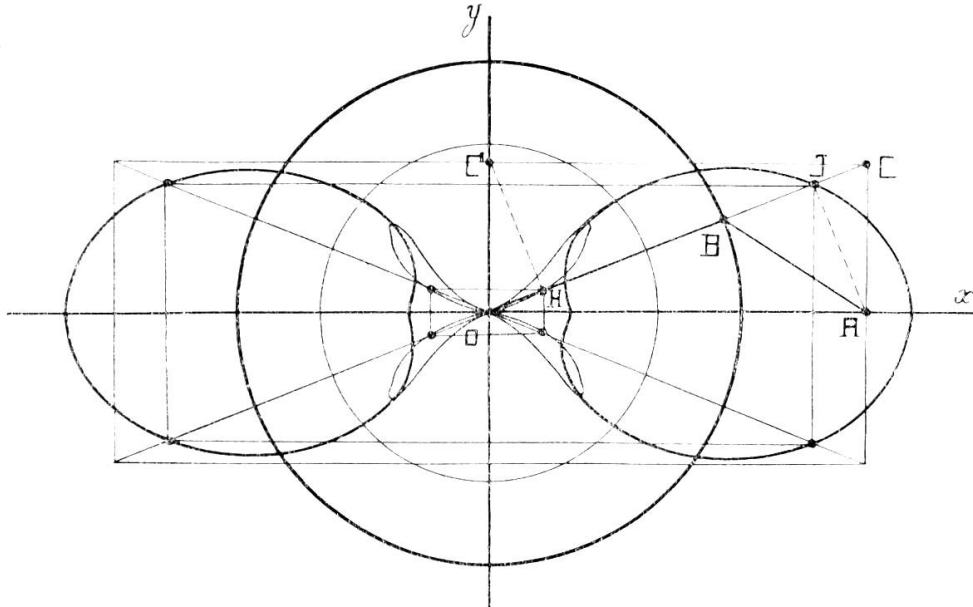


Fig. 5. Kurven J u. H mit  $R > 1$ .

$$x^2 + y^2 = \overline{OH}^2 = yy'; \text{ woraus } y' = \frac{x^2 + y^2}{y}$$

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} \quad \text{woraus } x' = \frac{xy'}{y} = \frac{x(x^2 + y^2)}{y^2}$$

Indem wir diese Werte in die Gleichung für  $C$  einführen, erhalten wir nach Vereinfachungen:

$\left[ x^2 (x^2 + y^2)^2 + (R^2 - 1^2) y^4 \right]^2 = 4 R^2 x^4 y^4 (x^2 + y^2)$ . Es ist also die Gleichung für den Ort der Punkte  $H$ . In Polarkoordinaten werden wir folgendes haben:

$$\varrho^2 \cdot \cos^2 \varphi - (1^2 - R^2) \sin^4 \varphi = \pm 2 R \varrho \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$$

oder:  $\varrho^2 \cos^2 \varphi \mp 2 R \varrho \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - (1^2 - R^2) \sin^4 \varphi = 0$

d. f.  $\varrho = \frac{\pm R \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \pm \sqrt{R^2 \sin^4 \varphi \cos^4 \varphi + (1^2 - R^2) \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi}}{\cos^2 \varphi}$

$$= \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \left[ \pm R \cos \varphi \pm \sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \varphi} \right] \quad 1.$$

Wir können auch den Wert für  $\varrho$  direkt aus  $x$  und  $y$  ableiten:

$$\varrho^2 = yy' = \beta \sin \varphi \cdot \lambda' \tan \varphi$$

Man hat aber:  $\lambda' = \varphi \sin \omega + R \cos \varphi = R \cos \varphi + \sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \varphi}$

$$\text{d. f.:} \quad \varrho = R \sin^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi \sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi} \quad 2.$$

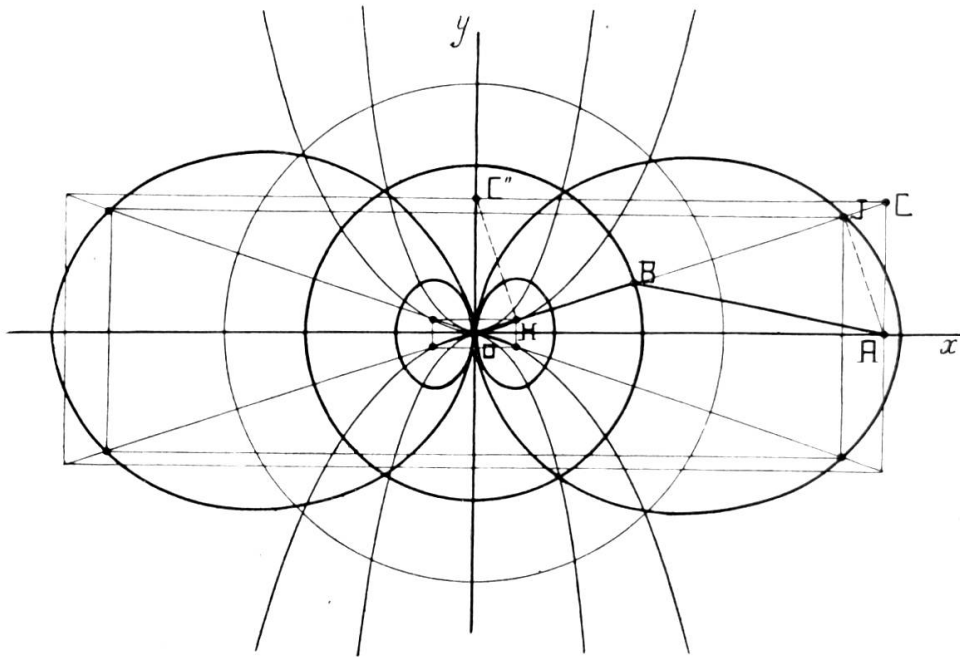


Fig. 6. Kurven J u. H mit  $R < 1$ .

Die Vorzeichen beider Resultate (1.) und (2.) stimmen überein; man hat nur die Vorzeichen der Winkel zu berücksichtigen.

Die Kurve ist von 12. Ordnung, das niedrigste Glied vom 8. Grade, d. h.  $(R^2 - l^2)^2 - y^8 = 0$ .

Zusammenfassend ergibt eine geometrische Besprechung folgende Bemerkungen:

1. Der Ursprung ist ein vielfacher Punkt 8. Ordnung.
2. Er besteht aus 4 symmetrischen Rückkehrpunkten mit der x-Axe als Rückkehrtangente.
3. Mit  $R > 1$  hat die Kurve keine reellen Asymptoten. (Siehe Fig. 5.)

4. Mit  $R < 1$  sind die Geraden  $x = \pm \sqrt{R^2 - l^2}$  doppelte Asymptoten. (Siehe Fig. 6.)

### VIII.

**Kurve J.** (Fig. 5 u. 6.) Der Punkt J sei der Fusspunkt des Perpendikels vom Eckpunkt A des Rechteckes OACC' auf die Diagonale OC.

Wir haben:

$$\begin{aligned} e_J = e_C - e_H &= R + \frac{\sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi} - \sin^2 \omega \left[ \frac{R + \sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi} \right] \\ &= e_C \cos^2 \varphi = R \cos^2 \varphi + \cos \varphi \sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \varphi} \end{aligned}$$

d. h.  $(\varrho - R \cos^2 \varphi)^2 = \cos^2 \varphi (l^2 - R^2 \sin^2 \varphi)$

In orthogonalen Koordinaten erhalten wir nach Vereinfachungen:

$$\left[ (x^2 + y^2)^2 + (R^2 - l^2) x^2 \right]^2 = 4 R^2 x^4 (x^2 + y^2)$$

Wir können diese Gleichung auch direkt aus derjenigen von C ableiten.

Wir setzen: C ( $x'$ ,  $y'$ ) und J ( $x$ ,  $y$ ); dann ist:

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} \text{ und } x' = \frac{x y'}{y}; \text{ ferner:}$$

$$y^2 = x (x' - x) = \frac{(x y' - x y)}{y} \cdot x, \text{ woraus:}$$

$$y' = \frac{y}{x^2} (x^2 + y^2) \text{ und } x' = \frac{x^2 + y^2}{x}$$

Eingeführt in die Gleichung von C und vereinfacht, erhalten wir:

$$\left[ (x^2 + y^2)^2 + (R^2 - l^2) x^2 \right]^2 = 4 R^2 x^4 (x^2 + y^2)$$

Wir finden folgende geometrischen Eigenheiten:

1. Die Koordinatenachsen sind die Symmetrieachsen.
2. Die Kurve ist von 8. Ordnung und der Ursprung ist ein vierfacher Punkt.
3. Die andern Schnittpunkte mit der x-Axe sind bestimmt durch  $x = R \pm 1$  und  $x = -R \pm 1$ .
4. Die Kurve hat in der Unendlichkeit keine reellen Punkte.

5. Für  $R < 1$  haben wir 4 Kurvenäste, die im Ursprung tangieren und die  $y$ -Axe als gemeinschaftliche Tangente haben.
6. Für  $R > 1$  ist der Ursprung ein isolierter Punkt und die Kurve setzt sich aus 2 geschlossenen Aesten zusammen, die getrennt und symmetrisch inbezug auf die  $y$ -Axe sind.

### IX.

**Kurve K.** (Fig. 3 u. 4.) Der Punkt K ist der Fusspunkt des Perpendikels von C auf die Diagonale AB'. Der Ort der Punkte K ist die gesuchte Kurve.

Wir setzen:  $K(x, y)$ ;  $C(x_C, y_C)$ ;  $F(x_F, y_F)$  und wir haben:

$$x = x_C - x_F = \frac{x_F^2 + y_F^2}{x_F} - x_F = \frac{y_F^2}{x_F}$$

$$y = y_C - y_F = \frac{x_F^2 + y_F^2}{y_F} - y_F = \frac{x_F^2}{y_F}; \text{ ferner}$$

$$x_F = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} \text{ und } y_F = x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$$

Eingeführt in die Gleichung von F, erhalten wir:

$$\left[ x^{\frac{2}{3}} \left( x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \right)^2 + R^2 - l^2 \right]^2 = 4 R^2 x^{\frac{4}{3}} \left( x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \right)$$

Vom geometrischen Gesichtspunkte aus betrachtet, finden wir: die Koordinatenachsen sind auch die Symmetrieachsen, die Kurve hat 4 Doppelpunkte auf der  $x$ -Axe, sie sind bestimmt durch  $x = \pm (R + 1)$  und  $x = \pm (1 - R)$ ; es sind einfache Rückkehrpunkte.

Für  $R < 1$  sind die Geraden  $x = \pm \sqrt{l^2 - R^2}$  doppelte Asymptoten, die den Rückkehrpunkten zweiter Ordnung entsprechen.

Für  $R > 1$  sind diese Asymptoten imaginär und die Kurve setzt sich aus 2 geschlossenen Aesten zusammen, die inbezug auf die  $y$ -Axe symmetrisch liegen.

### X.

#### Grenzfälle der Kurven F, H, J und K.

1. Wir haben schon bemerkt, dass der Grenzfall der Kurve F,  $l = R$ , ein Vierblatt ist.

$(x^2 + y^2)^3 = 4 R^2 x^2 y^2$ . Die Kurvenäste liegen symmetrisch zwischen den Koordinatenachsen.

2. Der Grenzfall von H gibt:  $R = 1$  und

$$(x^4 + y^2)^3 = 4 R^2 y^4 \text{ oder} \\ \varrho^2 = 2 R \sin^2 \omega$$

Es ist dies die Doppeleilinie von Münger.<sup>4)</sup>

Die Kurve wird von der y-Axe symmetrisch geschnitten.

Die Kurve J gibt einen analogen Grenzfall:

$$(x^2 + y^2)^3 = 4 R^2 x^4 \\ \text{oder} \quad \varrho = 2 R \cos^2 \omega.$$

Es ist dies die gleiche Kurve, aber diesmal durch die x-Axe geschnitten.

3. Der Grenzfall der Kurve K ist eine reguläre Astroide mit dem Parameter  $2 R$ :

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \left(2 R\right)^{\frac{2}{3}}$$

## XI.

### Andere Bemerkungen über die Kurven F, H, J und K.

Die Vektoren haben ergeben:

$$\varrho_F = \varrho_C \sin \omega \cos \omega; \quad \varrho_H = \varrho_C \sin^2 \omega; \quad \varrho_J = \varrho_C \cos^2 \omega.$$

Wir können ebenfalls das Argument  $\gamma$  in bezug auf den Vektor von K ableiten:

$$x_K = OJ \cos \varphi = \varrho_C \cos^2 \varphi \cos \varphi \\ y_K = OH \sin \varphi = \varrho_C \sin^2 \varphi \cdot \sin \varphi \\ \operatorname{tg} \gamma = \frac{y_K}{x_K} = \frac{\varrho_J \sin^3 \varphi}{\varrho_J \cos^3 \varphi} = \operatorname{tg}^3 \varphi \\ \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}^3 \varphi \text{ oder } \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}^{\frac{1}{3}} \gamma.$$

Die Koordinaten des laufenden Punktes jeder Kurve können abgeleitet werden von denjenigen des korrespondierenden Punktes von irgend einer andern unter ihnen.

Aus den schon abgeleiteten Resultaten lässt sich folgende Tabelle zusammenstellen:

C		F		H		J		K	
$x$	$y$	$\frac{xy^2}{x^2+y^2}$	$\frac{x^2y}{x^2+y^2}$	$\frac{xy^2}{x^2+y^2}$	$\frac{y^3}{x^2+y^2}$	$\frac{x^3}{x^2+y^2}$	$\frac{x^2y}{x^2+y^2}$	$\frac{x^3}{x^2+y^2}$	$\frac{y^3}{x^2+y^2}$
$\frac{x^2+y^2}{x}$	$\frac{x^2+y^2}{y}$	$x$	$y$	$x$	$\frac{x^2}{y}$	$\frac{y^2}{x}$	$y$	$\frac{y^2}{x}$	$\frac{x^2}{y}$
$\frac{x(x^2+y^2)}{y^2}$	$\frac{x^2+y^2}{y}$	$x$	$\frac{x^2}{y}$	$x$	$y$	$\frac{x^2}{y}$	$\frac{x^3}{y^2}$	$\frac{x^3}{y^2}$	$y$
$\frac{x^2+y^2}{x}$	$\frac{y(x^2+y^2)}{x^2}$	$\frac{y^2}{x}$	$y$	$\frac{y^2}{x}$	$\frac{y^3}{x^2}$	$x$	$y$	$x$	$\frac{y^3}{x^2}$
$\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$	$\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}}$	$x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$	$x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$	$x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$	$y$	$x$	$x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$	$x$	$y$

Bemerkung: Im Rechteck  $OAC'C''$  können wir ebenfalls 4 analoge Kurven aufstellen, nämlich je die zweiten Fälle der vorangehenden. Ihre Gleichungen kann man direkt aufstellen, indem man  $OB' = 1$  und  $B'A = R$  einsetzt oder indem man in den ersten Gleichungen  $R$  und  $1$  vertauscht und  $\varrho$  durch  $\omega$  ersetzt.

Die neue Kurve  $F$  beispielsweise ist die Fusspunktkurve der Umhüllungskurve der Koppel inbezug auf den Ursprung, weil man den Ursprung auf  $AB$  projiziert.

Die neuen Kurven werden wir als Kurven von  $F'$ ,  $H'$ ,  $J'$  und  $K'$  bezeichnen; ihre Gleichungen liefern mit den vorhergehenden die folgende Zusammenstellung:

Kurve  $F$ : 1.  $\left[ (x^2 + y^2)^2 - (l^2 - R^2) x^2 \right]^2 = 4 R^2 x^2 y^2 (x^2 + y^2)$   
 2.  $\varrho^2 - 2 R \varrho \sin \Theta \cos \Theta - (l^2 - R^2) \cos^2 \Theta = 0$

Kurve  $F'$ : 1.  $\left[ (x^2 + y^2) - (R^2 - l^2) x^2 \right]^2 = 4 l^2 x^2 y^2 (x^2 + y^2)$   
 2.  $\varrho^2 - 2 l \varrho \sin \Theta \cos \Theta - (R^2 - l^2) \cos^2 \Theta = 0$

Kurve H: 1.  $\left[ x^2 (x^2 + y^2)^2 + (R^2 - l^2) y^4 \right]^2 = 4 R^2 x^4 y^4 (x^2 + y^2)$   
 2.  $\varrho^2 \cos^2 \omega + 2 R \varrho \sin^2 \omega \cos^2 \omega - (l^2 - R^2) \sin^4 \omega = 0$

Kurve H': 1.  $\left[ x^2 + (x^2 + y^2)^2 + (l^2 - R^2) y^4 \right]^2 = 4 l^2 x^4 y^4 (x^2 + y^2)$   
 2.  $\varrho^2 \cos^2 \varphi + 2 l \varrho \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - (R^2 - l^2) \sin^4 \varphi = 0$

Kurve J: 1.  $\left[ (x^2 + y^2)^2 + (R^2 - l^2) x^2 \right]^2 = 4 R^2 x^4 (x^2 + y^2)$   
 2.  $(\varrho - R \cos^2 \varphi)^2 = \cos^2 \varphi (l^2 - R^2 \sin^2 \varphi)$

Kurve J': 1.  $\left[ x^2 + y^2 + (l^2 - R^2) x^2 \right]^2 = 4 l^2 x^4 (x^2 + y^2)$   
 2.  $(\varrho - l \cos^2 \omega)^2 = \cos^2 \omega (R^2 - l^2 \sin^2 \omega)$

Kurve K:  $\left[ x^{\frac{2}{3}} \left( x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \right)^2 + R^2 - l^2 \right]^2 = 4 R^2 x^{\frac{4}{3}} \left( x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \right)$

Kurve K':  $\left[ x^{\frac{2}{3}} \left( x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \right)^2 + l^2 - R^2 \right]^2 = 4 l^2 x^{\frac{4}{3}} \left( x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \right)$

## XII.

Die Kurven  $F_1$ ,  $H_1$ ,  $J_1$ ,  $K_1$ . Tragen wir nun  $OF_1 = 2 OF$ ;  $C'H_1 = 2 C'H$ ;  $AJ_1 = 2 AJ$  und  $CK_1 = 2 CK$  ab, so wird der Ort der Punkte  $F_1$ ,  $H_1$ ,  $J_1$  und  $K_1$  die Kurven bilden, die wir näher betrachten wollen.

Für die erste *Kurve* haben wir:

$$\varrho_{F_1} = 2 \varrho_F = 2 \varrho_C \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\varrho_{F_1} = 2 R \sin \varphi \cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{4 l^2 - 4 R^2 \sin^2 \varphi}$$

Es ist die gleiche Kurve wie der Ort der Punkte F. Der fundamentale Kurbeltrieb aber ist von doppelter Dimension. Die Kurbel ist  $= 2 R$  und die Koppel  $= 2 l$ . In orthogonalen Koordinaten lautet die Gleichung:

$$\left[ (x^2 + y^2)^2 - 4 (l^2 - R^2) x^2 \right]^2 = 16 R^2 x^2 y^2 (x^2 + y^2)$$

Die 2. *Kurve* gibt uns:

$$\varrho_{H_1} = y_C; H \text{ ist so gelegen, dass}$$

$$\widehat{HOH_1} = \widehat{HOC'} = \frac{\pi}{2} - \varphi \text{ und } \widehat{XOH_1} = \frac{\pi}{2} - 2 \varphi$$



$$\Theta = 2\pi - \frac{\pi}{2} + 2\varphi = \frac{3\pi}{2} + 2\varphi$$

$$\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \sin \Theta$$

$$\sin \varphi = \pm \sqrt{\frac{1 - \sin \Theta}{2}} \text{ und } \cos \varphi = \pm \sqrt{\frac{1 + \sin \Theta}{2}};$$

Daraus folgt:

$$e_{H_1} = e_C \sin \varphi = \pm \left( R + \sqrt{\frac{2l^2 - R^2(1 - \sin \Theta)}{1 + \sin \Theta}} \right) \sqrt{\frac{1 - \sin \Theta}{2}}$$

Die Gleichung in orthogonalen Koordinaten würde man durch direkte Transformation erhalten oder davon ausgehend, dass:

$$x_{H_1} = 2x_H \text{ und } y_{H_1} = 2y_H - y_C$$

oder 
$$x_H = \frac{1}{2} x_{H_1}$$

$$y_H = \frac{1}{2} \left( y_{H_1} \pm \sqrt{x_{H_1}^2 + y_{H_1}^2} \right)$$

Es würde dann genügen, diese Werte in die Gleichung für den Ort der Punkte H einzusetzen.

Die Entwicklung dieser letzten Kurve, sowie auch deren geometrische Besprechung bildet ein Uebungsbeispiel.

*Uebungen.* 1. Es sei die Gleichung des Ortes der Punkte  $H_1$  in orthogonalen Koordinaten auf die 2 angegebenen Arten abzuleiten.

2. Es sei die Kurve für die beiden Fälle  $R > l$  und  $R < l$  zu konstruieren.

3. Geometrische Besprechung von Ursprung, Schnittpunkte mit den Axen und Asymptoten.

Die 3. Kurve ist der Ort der Punkte  $J_1$ .

Das entsprechende Argument  $\Theta = 2\varphi$  gibt;

$$\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos \Theta$$

$$\sin \varphi = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \Theta}{2}}$$

$$\cos \varphi = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \Theta}{2}} \text{ daraus folgt:}$$

$$e_{J_1} = \pm \left( R + \sqrt{\frac{2l^2 - R^2(1 - \cos \Theta)}{1 + \cos \Theta}} \right) \sqrt{\frac{1 + \cos \Theta}{2}}$$

Die Gleichung in cartesischen Koordinaten kann wie vorher auf 2 Arten gefunden werden, entweder durch direkte Transformation oder durch:

$$y_{J_1} = 2 y_J \quad \text{und} \quad x_{J_1} = x_C - 2 (x_C - x_J) = 2 x_J - x_C$$

*Uebungen:*

1. Es sei nach den 2 angegebenen Methoden die Gleichung des Ortes der Punkte  $J_1$  in orthogonalen Koordinaten abzuleiten.
2. Es sei die Kurve  $J_1$  für die 2 Fälle  $R > 1$  und  $R < 1$  zu konstruieren.
3. Geometrische Diskussion über Ursprung, Schnittpunkte mit den Axen und Asymptoten.

Die 4. Kurve, der Ort der Punkte  $K_1$ , gibt:

$$OK_1 \perp CK_1 \quad \text{und} \\ \rho_{K_1} = \rho_C \cos 2\varphi$$

Das entsprechende Argument:  $\Theta = 2\pi - \varphi$

$$\sin \Theta = -\sin \varphi \quad \text{und} \quad \cos \Theta = \cos \varphi$$

Die Polargleichung heisst dann:

$$\rho_{K_1} = \left( R + \sqrt{\frac{l^2 - R^2 \sin^2 \Theta}{\cos \Theta}} \right) (\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta)$$

Man erhält die Gleichung in carthesischen Koordinaten durch direkte Transformation oder durch folgende Beziehungen:

$$x_{K_1} = 2 x_K - x_C \quad \text{und} \quad y_{K_1} = 2 y_K - y_C$$

Die Gleichung, die etwas einfacher ist, als die vorhergehende, lautet:

$$\left[ (x^2 - y^2)^2 (l^2 - R^2) - x^2 (x^2 + y^2) \right]^2 = 4 R^2 x^4 (x^2 - y^2) (x^2 + y^2)$$

*Uebungen:*

1. Ableitung der vorstehenden Gleichung durch die angegebenen Substitutionen.
2. Konstruktion der Kurve  $K_1$  für die 2 Fälle.
3. Geometrische Besprechung des Ursprunges, der Schnittpunkte mit den Axen und der Asymptoten.

### XIII.

**Kurven M und  $M_1$ .** (Fig. 7 u. 8). Wenn wir vom Eckpunkt  $C''$  des Rechteckes  $OACC''$  ein Perpendikel auf die Diagonale  $OC'$  des Rechteckes  $OAC'C''$  fällen, so finden wir M auf  $OC'$

und  $OM_1$ ; mit  $OM_1 = 2 OM$  auf der Verlängerung dieses Perpendikels.

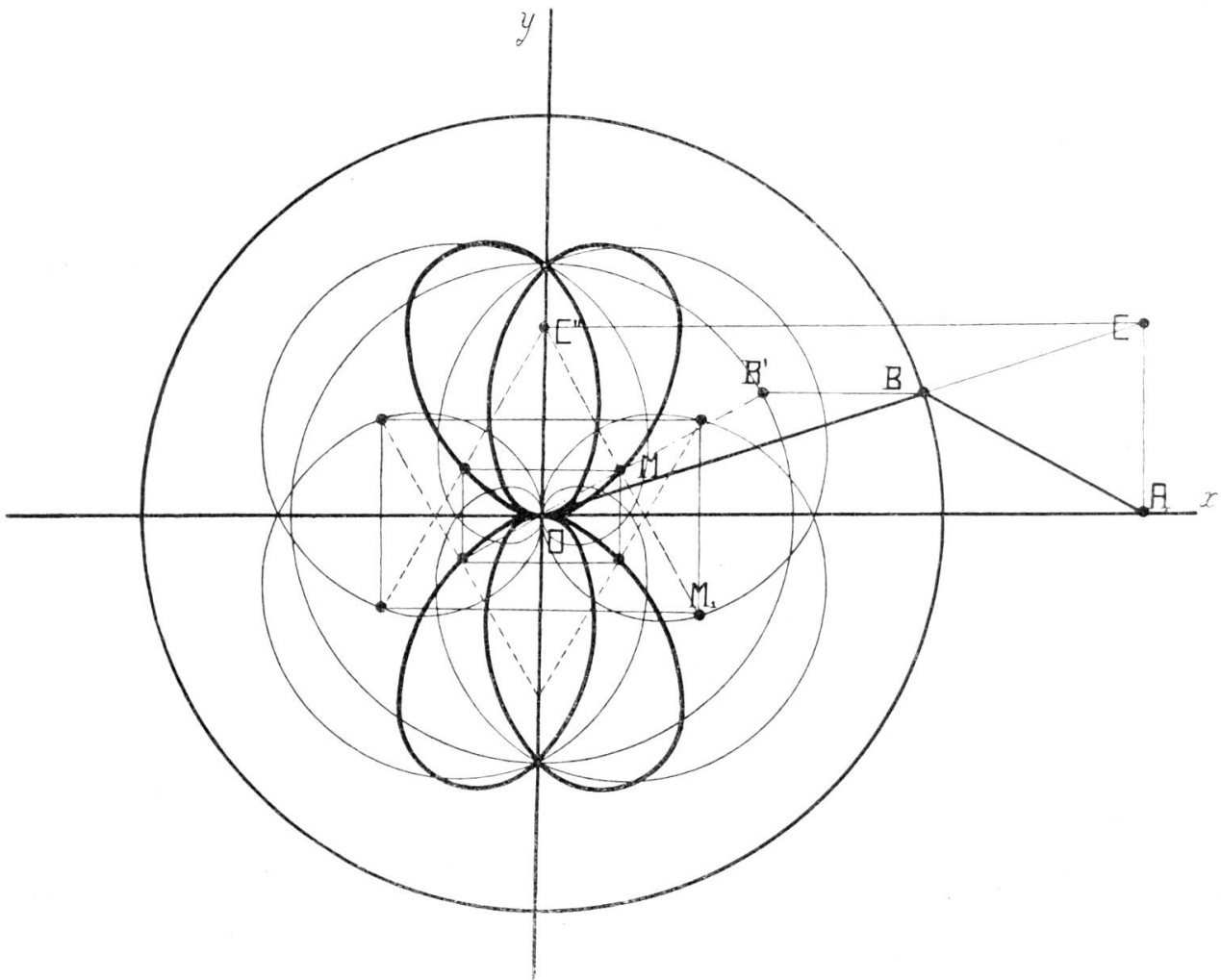


Fig. 7. Kurven M u.  $M_1$  mit  $R > 1$ .

Die Polargleichung von M gibt uns:

$$\varrho^2 = OM^2 = y_M \cdot y_C = \varrho \sin \omega y_C$$

$$y_C = \varrho_C \sin \varphi = \varrho_C \cdot \frac{1}{R} \sin \omega, \text{ woraus:}$$

$$\varrho = \varrho_C \frac{1}{R} \sin^2 \omega = \left( R + \frac{1 \cos \omega}{\cos \varphi} \right) \frac{1}{R} \sin^2 \omega$$

$$\varrho = 1 \sin^2 \omega + \frac{l^2 \sin^2 \omega \cos \omega}{\sqrt{R^2 - l^2 \sin^2 \omega}}$$

$\varrho$  ist das Argument von M; daraus folgt:

$$(\varrho - 1 \sin^2 \omega)^2 (R^2 - l^2 \sin^2 \omega) = l^4 \sin^4 \omega \cos^2 \omega.$$

So lautet die Polargleichung von M. Man kann sie auch folgendermassen schreiben:

$$\rho(\rho - 2l \sin^2 \omega) (R^2 - l^2 \sin^2 \omega) = l^2 \sin^4 \omega (l^2 - R^2)$$

In orthogonalen Koordinaten erhalten wir:

$$\rho(\rho^3 - 2l^2 y^2) (R^2 \rho^2 - l^2 y^2) = l^2 y^4 (l^2 - R^2)$$

$$\left[ \rho^4 (R^2 \rho^2 - l^2 y^2) - l^2 y^4 (l^2 - R^2) \right]^2 = 4 \rho^2 l^2 y^4 (R^2 \rho^2 - l^2 y^2)^2$$

oder

$$\left\{ (x^2 + y^2)^2 \left[ R^2 (x^2 + y^2) - l^2 y^2 \right] - l^2 y^4 (l^2 - R^2) \right\}^2 = 4 l^2 y^4 (x^2 + y^2) \left[ R^2 (x^2 + y^2) - l^2 y^2 \right]^2$$

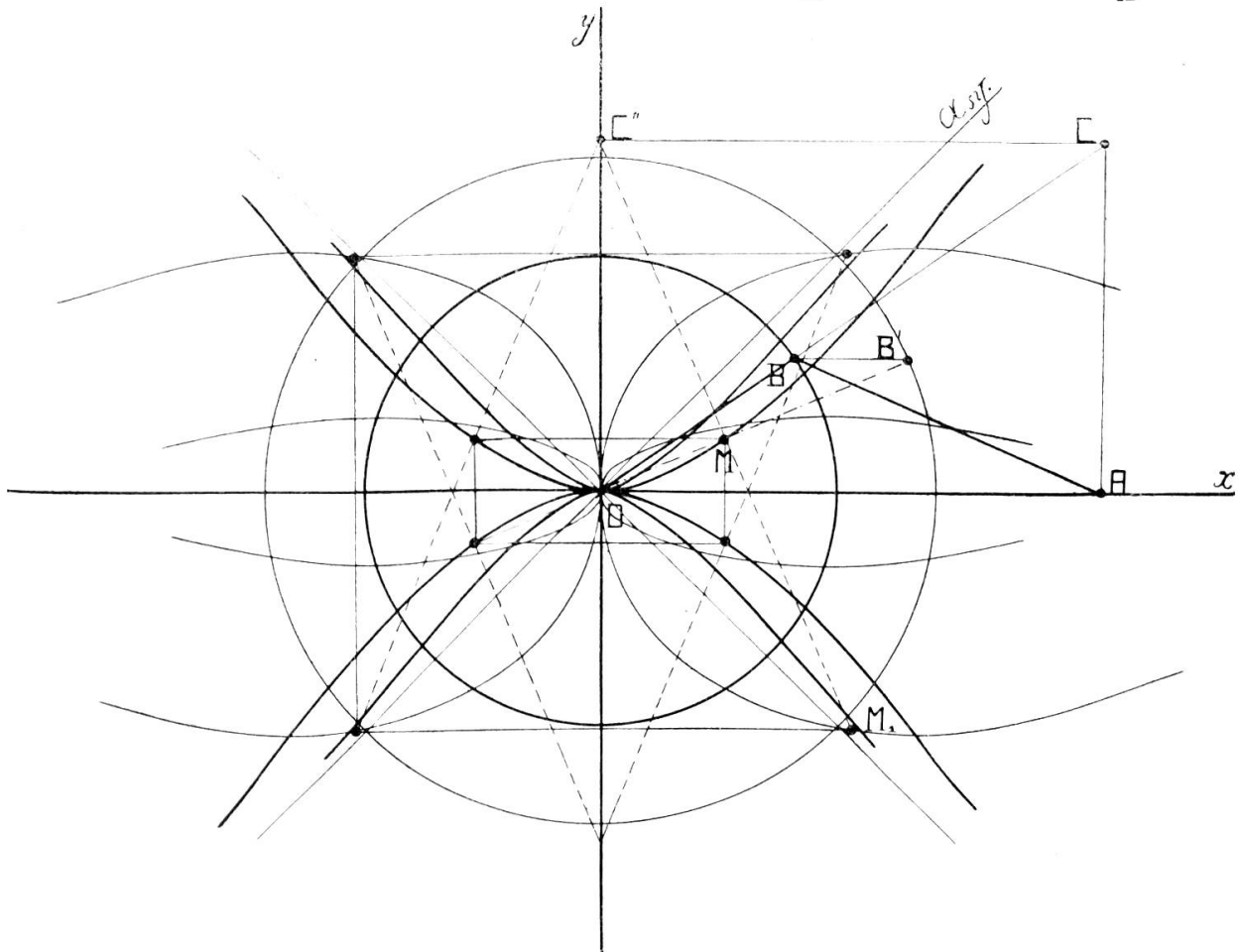


Fig. 8. Kurven M. u. M<sub>1</sub> mit R < 1.

Die Kurve ist von 12. Ordnung und der Ursprung ein vielfacher Punkt 8. Ordnung. Die Koordinatenachsen sind Symmetrieachsen. Die x-Axe ist eine vierfache Tangente.

Die Kurve hat keine andern reellen Schnittpunkte mit der x-Axe.

Im Falle  $R > 1$  sind die Punkte  $y = \pm 1$  der y-Axe doppelte Punkte der Kurve und die Kurve gleicht 4 geschlossenen Ovalen, die im Ursprung tangieren. (Fig. 7.)

Mit  $R < 1$  (Fig. 8) sind die Schnittpunkte mit der y-Axe imaginär und die Kurve lässt die beiden Geraden  $y = \pm (\sqrt{l^2 - R^2}) x$  als doppelte Asymptoten zu.

Wenn wir nur den ursprünglichen Kurbeltrieb betrachten, so erhält man die Kurve des 2. Falles (Fig. 7) auch durch Projektion von  $C'''$  auf die Diagonale OC.

Ihre Gleichung würde man erhalten durch Austauschen von  $l$  gegen  $R$  und umgekehrt in den vorangehenden Gleichungen. Betrachten wir nun die Kurve  $M_1$ . Wir haben:

$$\varrho_{M_1} = y_C = \varrho_C \sin \varphi$$

Das Argument ist:  $\Theta = \frac{3\pi}{2} + 2\omega$  und wir haben:

$$\sin \omega = \pm \sqrt{\frac{1 - \sin \Theta}{2}} \quad \text{und} \quad \cos \omega = \pm \sqrt{\frac{1 + \sin \Theta}{2}}$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \varrho_{M_1} &= \left( R + \frac{l \cos \omega}{\cos \varphi} \right) \frac{l \sin \omega}{R} = \left( R + \frac{\cos \omega}{\sqrt{R^2 - l^2 \sin^2 \omega}} \right) \cdot \frac{l \sin \omega}{R} \\ &= \pm \frac{l}{R} \left( R + \sqrt{\frac{1 + \sin \Theta}{2R^2 - l^2(1 - \sin \Theta)}} \right) \sqrt{\frac{1 - \sin \Theta}{2}} \end{aligned}$$

Die Gleichung in orthogonalen Koordinaten kann gleich wie bei den Kurven  $H_1$ ,  $J_1$  und  $K_1$  behandelt werden und wie vorher können wir folgende Uebungen anschliessen:

*Uebungen:*

1. Konstruktion der Kurve  $M_1$  in 2 Fällen.
2. Geometrische Diskussion über Ursprung, Schnittpunkte mit den Axen und Asymptoten der Kurve.

**Bemerkung:** Die gleichen Kurven  $F_1$ ,  $H_1$ ,  $J_1$ ,  $K_1$ ,  $M$  und  $M_1$  können auf gleiche Weise wie vorher mit dem Rechteck  $OAC'C'''$  erhalten werden.

XIV.

**Kurve I.** (Fig. 9 u. 10.) Diese Kurve ist der Ort der Punkte I, die man erhält, indem man vom Endpunkte B der Kurbel auf die Koppel ein Perpendikel errichtet und verlängert bis zum Schnittpunkt mit der Normalen von (A) in A.

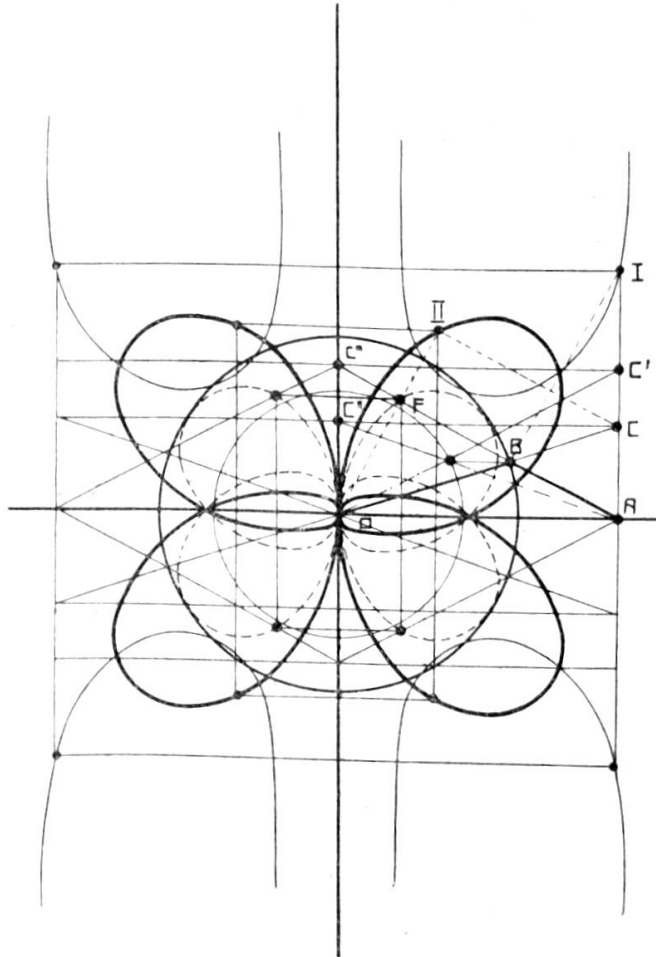


Fig. 9. Kurven I, F' u. II mit  $> 1$ .

Wir bezeichnen die Koordinaten von I mit  $x$  und  $y$  und diejenigen des Momentanzentrums C mit  $x_c$  und  $y_c$ . Wir haben:

$$x = x_c \text{ und } y = \frac{l}{\sin \omega} = \frac{l^2}{R \sin \varphi}$$

da aber  $\sin \varphi = \frac{y_c}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2}}$ , so erhält man:

$$y = \frac{l^2 \sqrt{x_c^2 + y_c^2}}{R y_c} \text{ und } R^2 y^2 y_c^2 = l^4 (x_c^2 + y_c^2)$$

$$y_c^2 = \frac{l^4 x_c^2}{R y_c^2 - l^4} \text{ ferner } x_c = x$$

Man setzt diese letztern Werte in die Gleichung des Rollbettes, welches der Ort der Punkte C ist, ein und man erhält:

$$y^2 (x^2 + R^2 - l^2)^2 = 4 x^2 (R^2 y^2 - l^4)$$

Die Kurve ist von 6. Ordnung; die Koordinatenachsen sind die Symmetrieachsen. Der Ursprung ist ein isolierter Punkt. Ferner hat man:

$$-R - l < x < -R + l$$

$$R - l < x < R + l. \text{ Man hat ferner 4 Asymptoten:}$$

$$x = \pm (R + l) \text{ und}$$

$$x = \pm (R - l).$$

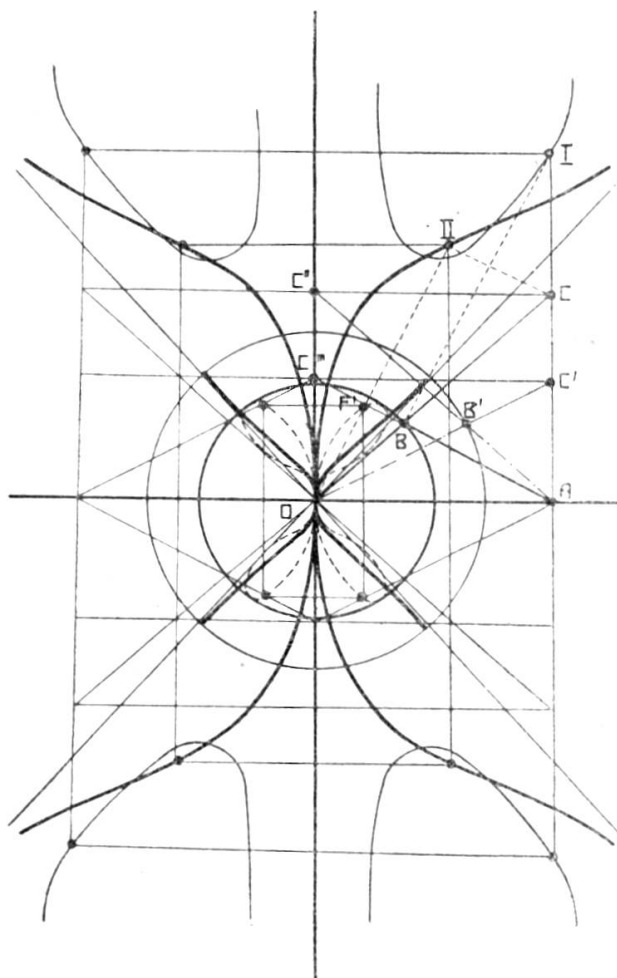


Fig. 10. Kurven I, F' u. II. mit  $R < l$ .

Die Polargleichung der Kurve heisst:

$$(e^2 \cos^2 \psi + R^2 - l^2)^2 \sin^2 \psi = \cos \psi (R^2 e^2 \sin^2 \psi - l^4)$$





Die Gleichung in orthogonalen Koordinaten bietet nichts von besonderem Interesse.

Die geometrische Diskussion der Kurve zeigt uns:

1. Die Koordinatenachsen sind Symmetrieachsen.
2. Der Ursprung ist ein vierfacher Punkt der Kurve.
3. Die y-Axe ist eine 4-fache Tangente der Kurve. Für  $R > 1$  ist sie viermal einfache Tangente und für  $R < 1$  ist sie viermal Krümmungstangente.
4. Für  $R < 1$  verschwinden diese doppelten Punkte, aber die Kurve lässt folgende Geraden zu:

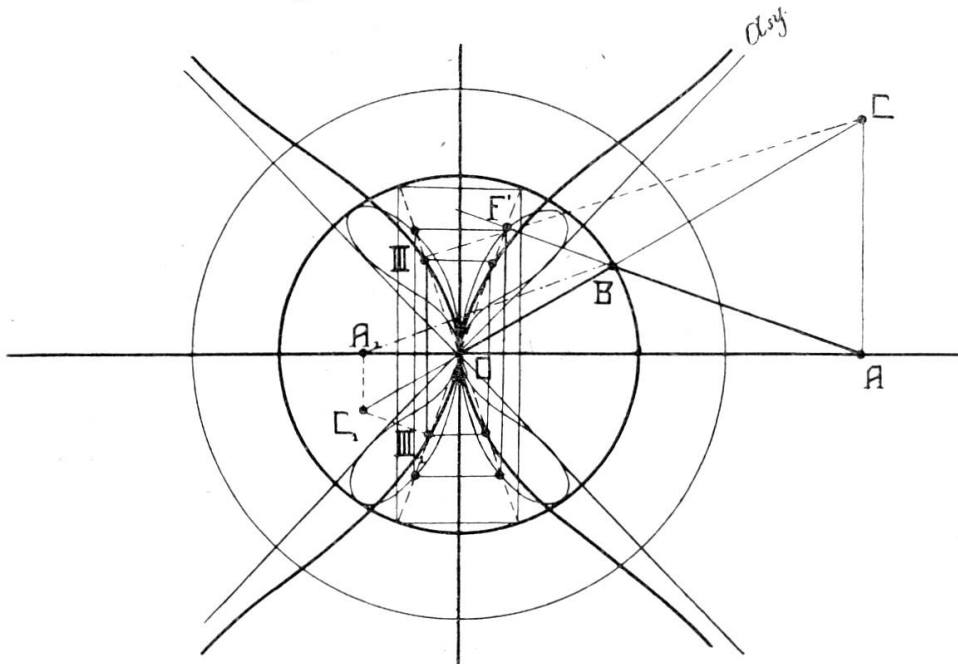


Fig. 12. Kurven F' u. III. mit  $R < 1$ .

$$y = +\sqrt{\frac{l'^2 - R'^2}{R}} \cdot x \text{ und } y = -\sqrt{\frac{l'^2 - R'^2}{R}} \cdot x$$

als doppelte Asymptoten. Die Asymptoten stehen senkrecht zu den Lagen von AB, für welche B auf der y-Axe und das Momentanzentrum C im Unendlichen liegt.

Betrachten wir nun die Kurve III näher (Fig. 11 u. 12), so finden wir, dass sie bedeutend einfacher ist, dass sie aber andere nicht weniger wichtige Eigenschaften aufweist. Wir haben zuerst:

$$\varrho = OC_1 \sin(\omega + \varphi) = \left( R - \frac{l \cos \omega}{\cos \varphi} \right) \sin(\omega + \varphi)$$

$$\varrho = \left( R - \frac{l \cos \omega}{\cos \varphi} \right) (\sin \omega \cos \varphi + \sin \varphi \cos \omega)$$

$$= \sin \omega \sqrt{R^2 - l^2 \sin^2 \omega} - \frac{l^2 \sin \omega \cos^2 \omega}{\sqrt{R^2 - l^2 \sin^2 \omega}}$$

$$\varrho = \frac{\sin \omega (R^2 - l^2 \sin^2 \omega - l^2 \cos^2 \omega)}{\sqrt{R^2 - l^2 \sin^2 \omega}} = \frac{\sin \omega (R^2 - l^2)}{\sqrt{R^2 - l^2 \sin^2 \omega}}$$

oder 
$$\varrho^2 = \frac{\cos^2 \Theta (R^2 - l^2)^2}{R^2 - l^2 \cos^2 \Theta}$$

In orthogonalen Koordinaten haben wir:

$$(x^2 + y^2) \left[ R^2(x^2 + y^2) - l^2 x^2 \right] = (R^2 - l^2)^2 x^2$$

Die Kurve ist vom 4. Grade. Die Koordinatenachsen sind Symmetrieachsen; der Ursprung ist ein Doppelpunkt und die y-Axe ist eine doppelte Tangente. Infolge der Symmetrie setzt sich der Doppelpunkt aus zwei entgegengesetzten Rückkehrpunkten zusammen.

Im Falle  $R > l$  besitzt die Kurve zwei einfache und symmetrische Schnittpunkte auf der x-Axe, mit

$$x = \pm \sqrt{R^2 - l^2}$$

Der Ursprung ist der Berührungspunkt zweier geschlossenen, symmetrischen Kurvenäste.

Im Falle  $R < l$  sind die andern Schnittpunkte mit der x-Axe imaginär und die Kurve lässt zwei einfache Asymptoten zu:

$$y = + \frac{\sqrt{l^2 - R^2}}{R} \cdot x \text{ und } y = - \frac{\sqrt{l^2 - R^2}}{R} \cdot x.$$

Diese Geraden sind die gleichen wie im vorangehenden Falle. Der Ursprung wird durch zwei Inflexionspunkte gebildet, die beide die y-Axe als Inflexionstangente zulassen.

Betrachten wir nun (Fig. 11) zwei Punkte C und C<sub>1</sub> des Rollbettes, die auf dem gleichen Strahle liegen und suchen wir die Lage von zwei korrespondierenden Punkten III und III<sub>1</sub>.

Die Koppeln AB und A<sub>1</sub>B sind symmetrisch, folglich werden die Normalen dieser Richtungen symmetrisch sein in bezug auf

die x-Axe. Es seien ferner die bezüglichen Winkel der Koppeln

$$\text{BAO} = \text{BA}_1\text{A} = \omega, \quad \text{dann haben wir:}$$

$$\text{BC} = \lambda = \frac{l \cos \omega}{\cos \varphi}$$

$$\text{OIII} = (\text{R} + \lambda) \cos \left( \frac{\pi}{2} - \omega + \varphi \right) = (\text{R} + \lambda) \sin (\omega - \varphi)$$

$$\text{OIII}_1 = (\text{R} - \lambda) \cos \left( \frac{\pi}{2} - \omega - \varphi \right) = (\text{R} - \lambda) \sin (\omega + \varphi)$$

daraus folgt:  $\text{OIII} = -\text{OIII}_1$ .

Da wir nur die absoluten Werte der Vektoren betrachten, und da wir wissen, dass sie ferner symmetrische Argumente bilden, können wir daraus schliessen, dass die Punkte III und III<sub>1</sub> symmetrische Punkte seien.

Einen ähnlichen Schluss können wir im Falle  $\text{R} < 1$  ziehen und wir finden auf symmetrischen Strahlen zwei symmetrische Punkte inbezug auf den Ursprung.

Unter diesen Bedingungen wird die Kurve III die totale Bewegung der Koppeln, die symmetrisch auf jeder Seite der y-Axe liegen, doppelt durchlaufen. Mit  $\text{R} > 1$  erzeugt die vollständige Bewegung der Koppel rechts zweimal die rechte Seite der Kurve; mit  $\text{R} < 1$  erzeugt die gleiche Bewegung die zwei Aeste der Kurve aber nur einmal; wenn wir die Koppel links haben, so erzeugt sie dieselben noch einmal. Im ersten Falle durchläuft die linksstehende Koppel zweimal die linke Seite der Kurve.

## XVI.

**Tangenten:** Wir wissen, dass die rollende Kurve des betrachteten Kurbeltriebes eine Konchoïde eines Kegelschnittes ist, inbezug auf einen Brennpunkt dieses letztern; die Konstante R der Konchoïde ist gleich der halben Axe a derselben.<sup>5)</sup> Die Rollende ist die Kurve von Jerabek<sup>6)</sup>. Es sei C der Kegelschnitt; die Brennpunkte sind F<sub>1</sub> und F<sub>2</sub> und das Zentrum O. Wir bezeichnen die rollende Kurve mit K<sub>1</sub> (Fig. 13). Es ist eine Konchoïde von C inbezug auf F<sub>2</sub>.

Wenn wir die Tangente in einem beliebigen Punkte M von K<sub>1</sub> bestimmen wollen, so ziehen wir F<sub>2</sub> M bis a' auf dem Leit-

kreis von C inbezug auf  $F_2$ . In der Mitte von  $a'F_1$  errichten wir ein Perpendikel, welches  $a$  gibt und die Tangente in  $a$  ist.

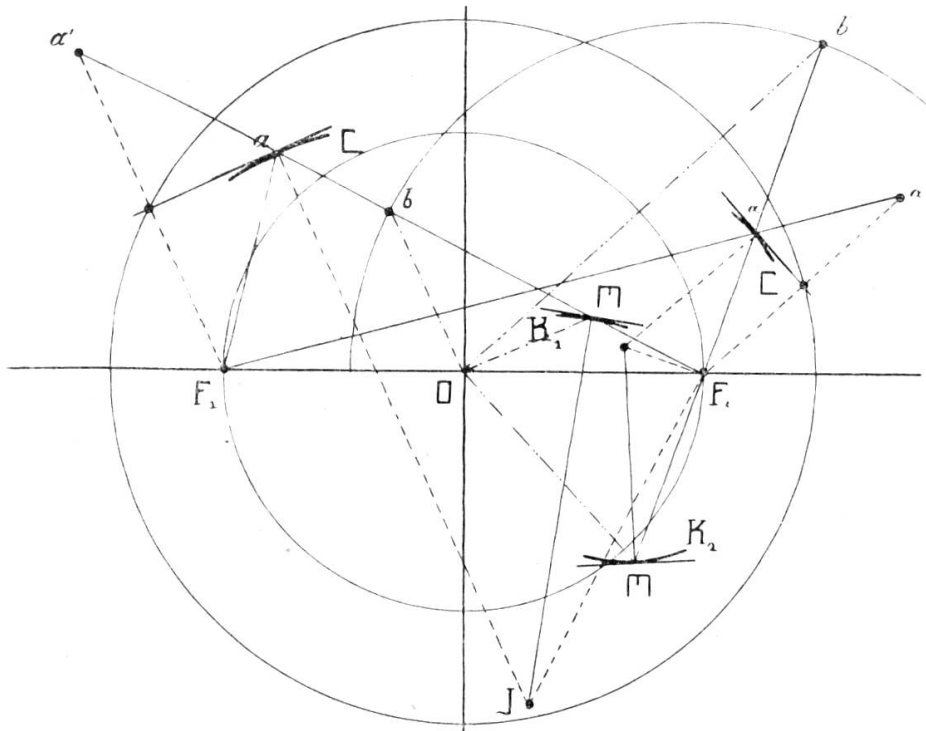


Fig. 13. Tangente der rollenden Kurve.

Ein Perpendikel zu dieser Tangente in  $a$  liefert die Normale von C. Sie schneidet die durch  $F_2$  gehende Senkrechte von  $MF_2$  in J. J ist dann das Momentanzentrum des Mechanismus, welcher aus der um  $F_2$  drehbaren Geraden  $MF_2$  besteht, und wovon ein bestimmter Punkt  $a$  der Geraden  $MF_2$  den Kegelschnitt C beschreibt. Die Bahn von M, mit  $aM = R = \text{konstant}$ , ist die rollende Kurve des ursprünglichen Kurbeltriebes. JM ist ihre Normale von M und das betreffende korrespondierende Perpendikel in M ist die gesuchte Tangente.

Wenn wir von  $K_1$  ausgehen, ohne dass wir C kennen, so suchen wir zuerst die konstante R mit  $Ob \perp OM$  und  $b$  auf  $F_2M$ .  $\overline{F_2b}$  stellt R dar.<sup>5)</sup> Wir können ferner  $a'$  auf dem Leitkreise bestimmen mit  $\overline{F_2a'} = 2R$ . Man erhält dann  $a$  des Kegelschnittes, dann J und endlich die Tangente in M.

Der betrachtete Mechanismus, der durch eine Gerade, welche sich um  $F_2$  dreht, gebildet wird, während ein bestimmter Punkt dieser Geraden auf einem Kegelschnitte gleitet, kann zu folgenden Uebungen führen.

1. Es sei das betreffende Rollbett graphisch und analytisch zu bestimmen.
2. Es sei davon die rollende Kurve zu bestimmen.
3. Es sei die Umhüllungskurve einer Parallelen oder einer Senkrechten der beweglichen Geraden zu bestimmen.

Aus dem Vorangehenden können wir die Konstruktion der Tangente in einem Punkte des Rollbettes des Kurbeltriebes OBA ableiten. Wir suchen die Tangente des Rollbettes für den Punkt C (Fig. 14). Wir wissen, dass das Rollbett und die Rollende in jedem Punkte C eine gemeinschaftliche Tangente besitzen und dass jeder Punkt C einer bestimmten Lage der Kurve  $K_1$  entspricht.

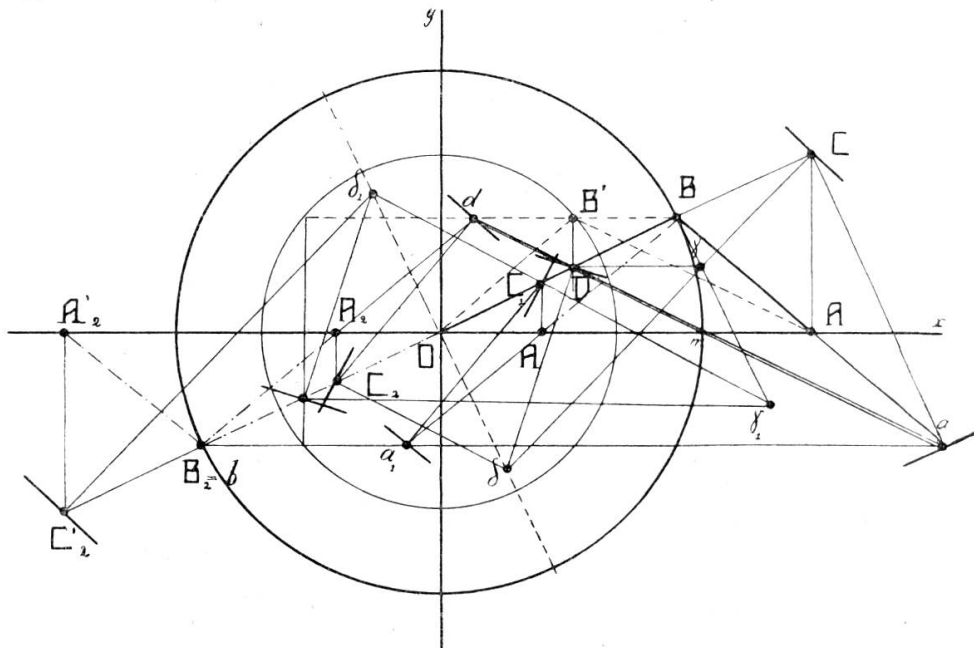


Fig. 14. Tangenten der Kurven C, D und (a).

Für unsern Punkt ist die rollende Kurve auf AB als Axe konstruiert. A ist der Mittelpunkt des Hilfskegelschnittes und B sein Brennpunkt, der als Fundamentalpunkt für die Konchoïde dient.

Unter diesen Bedingungen können wir die Tangente in C auf AB wie vorher konstruieren und wir finden so die Tangente des Rollbettes in C.

Die bezügliche Konstante der Rollenden ist die Kurbel  $R = OB$ . Wir erhalten den Punkt des Kegelschnittes auch, indem wir  $CD = R$  machen, sodass  $BD + Da = 2R$ ;  $a$  sei der 2. Brennpunkt des Hilfskegelschnittes.

Es ist zu bemerken, dass der Punkt des Kegelschnittes mit dem korrespondierenden Punkte der Kurve  $D$  zusammenfällt.

Andererseits gibt die Verlängerung von  $BC$  bis auf den Leitkreis den Punkt  $b$ , der ebenfalls auf dem Grundkreise liegt.

Die Gerade  $\overline{ab}$  ist parallel mit der  $x$ -Axe, weil  $O$  und  $A$  die Mittelpunkte der Geraden  $\overline{Bb}$  und  $\overline{Ba}$  sind.

Die Tangente des Kegelschnittes in  $D$  ist also parallel zur  $y$ -Axe. Sie geht durch  $B'$  und so ist die Normale des Kegelschnittes durch  $D$  eine Parallele zur  $x$ -Axe. Sie schneidet das Perpendikel auf  $BC$  durch  $B$  in  $\gamma$ .

Der Punkt  $\gamma$  ist das Momentanzentrum des erzeugenden Mechanismus der rollenden Kurve  $K_1$ .

$\gamma C$  ist die Normale in  $C$  und man erhält die Tangente durch das Perpendikel auf  $\gamma C$  durch  $C$ .

Die vorangehende Konstruktion kann daher zur folgenden einfachen Regel führen.

«Man erhält die Normale in einem Punkte  $C$  des Rollbettes, indem man im Endpunkte  $B$  der Kurbel eine Senkrechte auf diese errichtet und durch den betreffenden Punkt  $D$  der Kurve eine Parallele zu  $Ox$  zieht. Die Verbindungsgerade  $\gamma C$  des Schnittpunktes dieser Geraden mit  $C$  ist die gesuchte Normale.» (Fig. 14.)

Der bezügliche Punkt  $\gamma_1$  der symmetrischen Lage  $A_1B$  der Koppel liegt auf der Verlängerung von  $B\gamma$  und so, dass  $\gamma_1$  in der Mitte durch die  $x$ -Axe geschnitten wird.

---

Nach den vorangehenden Konstruktionen können wir auch die Tangente der Kurve  $D$  in einem beliebigen Punkte  $D$  bestimmen. Der Ort der Punkte  $C$  ist eine Konchoïde der Kurve  $D$  in bezug auf den Ursprung  $O$ .

Wir haben also eine Gerade, die sich um den Ursprung dreht, während ein bestimmter Punkt derselben die Kurve  $D$  beschreibt.

Das Momentanzentrum für eine Lage des neuen Mechanismus befindet sich auf einer Normalen im Ursprung der beweglichen Geraden und auf der Normalen von D in D; die Normale von C geht durch diesen Punkt, weil  $DC = R = \text{konstant}$ . Die Normalen in C und in O sind bekannt; sie schneiden sich in  $\delta$ ; daher ist dieser Punkt das betrachtete Momentanzentrum. Folglich hat man auch die Normale OD in D, dann die entsprechende Tangente. Mit  $C_1\gamma_1$  erhalten wir das Momentanzentrum  $\delta_1$ .

Die Momentanzentren  $\delta$  und  $\delta_1$ , die 2 symmetrischen Lagen der Koppel entsprechen, liegen auf dem gleichen Strahle, in gleicher Entfernung vom Ursprung.

In der Tat können wir in bezug auf die Schnittpunkte C,  $C_1$  und B den Strahl OB als eine Gerade betrachten, die sich an die drei Kurven anlehnt und die Normale einer derselben ist. Die Normalen in C und  $C_1$  schneiden die Normale O $\delta$  der Umhüllungskurve von OB in den Punkten  $\delta$ ,  $\delta_1$ , die folgendes ergeben:

$$CB : BC_1 = \delta O : O\delta_1$$

weil  $CB = BC_1$ ; daher  $\delta O = O\delta_1$ .

## XVII.

### Andere Eigenschaften, die sich auf die Konstruktionen der Tangenten beziehen.

1. Gleichung der Kurve  $\delta$ : Der Strahl O $\delta$  bildet einen Winkel  $\Theta$ , der von  $\varphi$  abhängig ist. Wir haben (Fig. 14):

$$\Theta = 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{3\pi}{2} + \varphi$$

$$\sin \Theta = -\cos \varphi; \quad \cos \Theta = \sin \varphi$$

ferner 
$$O\delta = e_c \operatorname{tg}(\text{OC}\delta) = e_c \frac{B\gamma}{BC}$$

$$O\delta = e_c \frac{R - \frac{l \cos \omega}{\cos \varphi}}{(e_c - R)} \operatorname{tg} \varphi = \frac{(R^2 \cos^2 \varphi - l^2 \cos^2 \omega) \sin \varphi}{l \cdot \cos \omega \cos^2 \varphi};$$

$$e^\delta = \frac{(R^2 - l^2) \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \varphi}} \text{ woraus } e^\delta = \frac{(R^2 - l^2) \cos \Theta}{\sin^2 \Theta \sqrt{l^2 - R^2 \cos^2 \Theta}}$$

In orthogonalen Koordinaten erhalten wir:

$$x^4 \left[ l^2 (x^2 + y^2) - R^2 y^2 \right] = (R^2 - l^2) y^2 (x^2 + y^2) \text{ oder}$$

$$(x^2 + y^2) \left[ (R^2 - l^2) y^2 - l^2 y^4 \right] = R^2 y^2 x^4.$$

Der Ursprung ist ein vierfacher Punkt. Im Falle  $R > l$  wird dieser Punkt durch zwei Inflexionspunkte gebildet, die die Axe Oy als gemeinschaftliche Tangente zulassen. Die geometrische Diskussion ergibt, dass die Perpendikel auf die äussersten Kurbeln  $y = \pm \frac{l}{\sqrt{R^2 - l^2}} \cdot x$  Asymptoten sind, deren

Gleichung ihrerseits lautet:  $y = \mp \frac{\sqrt{R^2 - l^2}}{l} \cdot x.$

Wir haben eine vollständige Symmetrie inbezug auf die Axen und das Zentrum. Der Kurbeltrieb rechts erzeugt selbst die ganze Kurve und der Kurbeltrieb links ergibt sie noch ein zweites Mal; dies sei erwähnt, weil bei vielen der vorangehenden Kurven jeder Kurbeltrieb nur eine Hälfte der ganzen Kurve erzeugt hat.

Mit  $R < l$  liegen die unendlich fernen Punkte auf horizontalen Tangenten des Hilfskreises, dessen Radius gleich der Länge der Koppel ist. Diese Punkte sind nicht mehr die Schnittpunkte zweier paralleler Richtungen und die vorerwähnten Tangenten sind nicht mehr Asymptoten. Die zwei Kurvenäste sind parabolische Aeste.

2. Bahn von  $a$  mit  $Aa = l$ . Wir können zuerst an die Gleichung der Bahn des Punktes  $a$  auf der Verlängerung der Koppel erinnern oder die Gleichung aufstellen:

Wir haben:  $Aa = l$   $aB = -2l$  und nach den allgemeinen Gleichungen der Bahnen der Koppel<sup>7)</sup> erhalten wir:

$$(x^2 - 3y^2 + 4l^2 - R^2)^2 = 16x^2(l^2 - y^2)$$

Wenn wir dagegen direkt ableiten, so erhalten wir:

$$x = R \cos \varphi + 2l \cos \omega$$

$$y = -l \sin \omega, \text{ ferner}$$

$$x = \sqrt{R^2 - y^2} + 2\sqrt{l^2 - y^2} \text{ oder}$$

$$(x^2 - R^2 - 4l^2 + 5y^2)^2 = 16(R^2 - y^2)(l^2 - y^2)$$



Die beiden Gleichungen sind identisch; eine einfache algebraische Modifikation führt uns von der einen zur andern. Die so erhaltene Kurve ist auch der Ort des zweiten Brennpunktes  $a$  der Hilfskegelschnitte, die nötig waren zur Konstruktion der Tangenten.

Die Strahlen  $\overline{D\bar{a}}$  und  $DB$  sind die betreffenden Vektoren des Punktes  $D$  des Kegelschnittes.

Der Strahl  $\overline{D\bar{a}}$  ist parallel dem Strahle  $AB'$  des Hauptkreises und  $\overline{D\bar{a}}$  verlängert bis  $BB'$  parallel zur Normalen gibt  $\overline{Dd} = \overline{BD}$  und  $\overline{ad} = 2R = \text{Konstante des Kegelschnittes}$ . Im übrigen ist die Mitte  $M$  von  $\overline{ad}$  auf der  $x$ -Axe.

Wir wollen nun den Ort der Punkte  $d$  suchen.

$$\begin{aligned} x &= 2l \cos \omega - R \cos \varphi \\ y &= + l \sin \omega \quad \text{woraus} \end{aligned}$$

$$x = 2\sqrt{l^2 - y^2} - \sqrt{R^2 - y^2}$$

$$(x^2 - R^2 - 4l^2 + 5y^2)^2 = 16(R^2 - y^2)(l^2 - y^2)$$

Diese Kurve ist ebenfalls die Bahn von  $a$ .

Daraus ergibt sich folgender Lehrsatz:

*Lehrsatz:* Im Kurbeltrieb besteht eine bewegliche Gerade von fester Länge  $2R$ , die durch den Punkt  $D$  geht und symmetrisch zum Strahl  $ODB$  liegt, so dass ihr Mittelpunkt auf der  $x$ -Axe gleitet, während ihre Endpunkte die Bahn ( $a$ ) eines Punktes  $a$  der Koppel mit  $Aa = R$  durchlaufen.

oder mit andern Worten:

Die Sehnen der Bahn ( $a$ ), die symmetrisch zu den Strahlen  $OB$  liegen und durch die verschiedenen Punkte  $D$  gezogen sind, haben feste Länge  $2R$  und werden durch die  $x$ -Axe in gleiche Teile geteilt.

3. Tangenten in  $d$ . Die Normale  $\overline{a\bar{C}}$  von ( $a$ ) in  $a$  und die Senkrechte  $m\varepsilon$  zu  $Ox$  durch  $m$  ergeben das bezügliche Momentanzentrum der Bewegung der Geraden  $\overline{ad}$ . Die Normale in  $d$  geht daher durch den Punkt  $\varepsilon$  und man kann daraus die betreffende Tangente ableiten. Es ist weiter zu bemerken, dass diese Normale  $d\varepsilon$  durch den entsprechenden Punkt des Rollbettes

geht. Die Gerade  $\overline{db}$ , symmetrisch zu  $Ba$  ergibt die Koppel  $A_2B_2$ , welche mit  $\overline{d}$  auf der Rollbahn ( $a$ ) korrespondiert und von  $A_2$  findet man das Momentanzentrum  $C_2$ , auf dem Rollbett, durch welches die Normale  $\overline{d\varepsilon}$  gehen muss. Der Punkt  $C_2$  ist zu  $C_1$  symmetrisch in bezug auf das Zentrum.

Die Normalen in  $C_2$  und  $C'_2$ , welches symmetrische Punkte von  $C$  und  $C_1$  sind, gehen auch durch  $\delta$  und  $\delta_1$ , wegen der Symmetrie. Die bezüglichlichen Hauptaufgaben der Bewegung der Sehne  $\overline{ad}$  können in folgenden Uebungen abgeleitet werden.

*Uebungen:*

1. Geometrische Diskussion der Bahn ( $a$ ) für  $R \geq 1$ .
2. Geometrische Diskussion der Bewegung von  $\overline{ad}$  in den 2 Fällen  $R \geq 1$ .
3. Aufstellung und Besprechung des Ortes der Momentanzentren  $\varepsilon$ .

Ich möchte an diesem Orte Herrn M. Baumann in Lengnau, der die Uebersetzung meines Manuskripts besorgt hat, herzlich danken.

### Literaturverzeichnis.

	Seite
1. <i>L. Crelier</i> : «Systèmes cinématiques» . . . . .	91
Gauthier-Villars «Scientia», Paris	
2. <i>L. Crelier</i> : id. . . . .	58
3. <i>L. Crelier</i> : id. . . . .	83
4. <i>H. Wieleitner</i> : Spezielle ebene Kurven . . . . .	71
Götschen «Sammlung Schubert», Leipzig.	
5. <i>L. Crelier</i> : Sys. cinématiques «Scientia» . . . . .	55
6. <i>H. Wieleitner</i> : Spezielle ebene Kurven . . . . .	107
7. <i>L. Crelier</i> : Sys. cinématiques «Scientia» . . . . .	94

