Die Verteilungsrechnung in der Verhältniswahl

A. Bohren.

Die Verteilungsrechnung in der Verhältniswahl.

Die proportionale Verteilung einer bestimmten Zahl von unteilbaren Einheiten auf Summen, die nicht genaue Vielfache dieser Zahl sind, wie es bei der Verhältniswahl verlangt wird, ist ein mathematisches Problem, das in Fachkreisen keine grosse Beachtung gefunden hat. Um so grösser ist der Raum, den diese Verteilungsrechnung in der Proporzliteratur einnimmt; das Interesse an dieser Frage ist ein allgemeines. An zum Teil geschickt gewählten Beispielen werden die Vorteile neuer Vorschläge zu demonstrieren versucht.

Es handelt sich bei der Verhältniswahl nicht in erster Linie um mathematisch unanfechtbare Resultate, sondern um einfache Lösungen, die dem Wähler die Methode der Ermittlung des Resultates nicht unverständlich und den Wahlausschüssen ihre Arbeit nicht allzu kompliziert werden lassen. Dieses Streben nach Einfachheit hat nun aber zu Vorschlägen und zu gesetzgeberischen Versuchen geführt, die keine annehmbaren Resultate mehr garantieren und die die Verhältniswahl in Misskredit gebracht haben.

Nun ist es hier ebenso falsch wie anderwärts, wenn man wegen einer unvollkommenen Anwendung ein Verfahren verurteilen will. Man soll es verbessern, Schwierigkeiten liegen nicht vor; denn es ist heute unbestritten, dass es Verhältniswahlverfahren gibt, die in ihrer Gesamtheit technisch durchaus einwandfrei funktionieren, und bei denen alles das, was der Wähler und der Ausschuss zu besorgen haben, einfach und verständlich ist.

Nach der praktischen Seite hin bedarf es heute keiner grossen Erörterungen mehr; im folgenden soll die Verteilungsrechnung in mathematisch allgemeiner Form behandelt werden, wobei sich allerdings Gelegenheit bietet, die praktisch verwendeten Verteilungsarten auf ihre Zweckmässigkeit zu prüfen.

I.

1. Die Stimmenzahlen von n Listen seien

$$A_1, A_2 \ldots . A_n; \ \Sigma A = S.$$

Zu wählen seien s Delegierte.

Wollte man die Grösse s proportional den Summen A_1, $A_2 \ldots . A_n$ teilen, so wären die Teile

$$a_1 = \frac{A_1 s}{S}; \ a_2 = \frac{A_2 s}{S} \ldots . a_n = \frac{A_n s}{S}.$$

Es sollen bedeuten:

$a_1, a_2 \ldots . a_n$ die genauen Resultate,

$\alpha_1, \alpha_2 \ldots . \alpha_n$ die den $a_1, a_2 \ldots . a_n$ nächstliegenden kleinern ganzen Zahlen,

$x_1, x_2 \ldots . x_n$ die ganzzahligen besten Näherungswerte.

Wenn $D = \frac{S}{s}$, so ist

$$A_1 = \alpha_1 D + R_1 \qquad A_2 = \alpha_2 D + R_2 \qquad A_n = \alpha_n D + R_n,$$

wo die R alle kleiner sind als D.

Jeder Wähler hat das Recht auf $\frac{s}{S} = \frac{1}{D}$ Delegierten, erhält in Wirklichkeit, wenn er der Liste A_1 angehört, $\frac{x_1}{A_1}$, woraus ein Fehler resultiert von

$$d_1 = \frac{x_1}{A_1} - \frac{s}{S} = \frac{x_1}{A_1} - \frac{1}{D}.$$

Für die andern Listen sind die Fehler

$$d_2 = \frac{x_2}{A_2} - \frac{1}{D}; \ d_n = \frac{x_n}{A_n} - \frac{1}{D}.$$

Die Fehler können unter dieser allgemeinen Voraussetzung positiv oder negativ sein.

2. Ersetzen wir zunächst die Unbekannten x durch die Bekannten α, so lassen sich die Differenzen (2)

$$e_1 = \frac{\alpha_1}{A_1} - \frac{1}{D},$$

$$e_2 = \frac{\alpha_2}{A_2} - \frac{1}{D},$$

$$e_n = \frac{\alpha_n}{A_n} - \frac{1}{D},$$

die alle negativ (im Spezialfall $= 0$) sein müssen, bestimmen.

Nun ist
$$\alpha_1 = \frac{A_1}{D} - \frac{R_1}{D},$$
$$\alpha_n = \frac{A_n}{D} - \frac{R_n}{D},$$
also
$$\Sigma \alpha = \frac{S}{D} - \frac{1}{D} \Sigma R,$$
$$\Sigma \alpha = s - \frac{1}{D} \Sigma R.$$

Da $\Sigma\alpha$ und s ganze Zahlen sind, so muss auch $\frac{\Sigma R}{D}$ eine ganze Zahl sein, beträgt wenigstens 1 und höchstens $n - 1$. Es bleiben also (den Ausnahmefall $\Sigma R = 0$ abgerechnet) stets ein Sitz oder mehrere Sitze unbesetzt, und die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Listen nachträglich noch m Sitze zu besetzen sind, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass n echte Brüche zusammengerechnet die ganze Zahl m geben.

Es liegt nun nahe, die fehlenden Sitze denjenigen Listen zuzuteilen, bei denen die Fehler
$$\frac{\alpha_x}{A_x} - \frac{1}{D}$$
ein Maximum werden, also den grössten positiven Werten von
$$\frac{1}{D} - \frac{\alpha_x}{A_x}.$$

Da nun
$$\frac{\alpha_x}{A_x} = \frac{1}{D} - \frac{R_x}{A_x D},$$
so ist
$$\frac{1}{D} - \frac{\alpha_x}{A_x} = \frac{1}{D} - \frac{1}{D} + \frac{R_x}{A_x D} = \frac{R_x}{A_x D},$$
oder, da D für alle Ausdrücke gleich ist, so wären die fehlenden Sitze den grössten $\frac{R_x}{A_x}$ zuzuteilen.

3. Wir können auch die Fehler alle positiv werden lassen, indem wir den Listen $\alpha_1 + 1$, $\alpha_2 + 1$, $\alpha_3 + 1 \ldots \alpha_n + 1$ Delegierte zuerkennen, sodass wir als Fehler erhalten

$$\frac{\alpha_1 + 1}{A_1} - \frac{1}{D},$$
$$\frac{\alpha_2 + 1}{A_2} - \frac{1}{D},$$
$$\frac{\alpha_n + 1}{A_n} - \frac{1}{D}.$$

Die noch fehlenden Sitze werden in diesem Fall den kleinsten dieser Werte zukommen müssen, d. h. weil $\frac{1}{D}$ für alle konstant ist, den grössten Werten

$$\frac{A_1}{\alpha_1 + 1}, \frac{A_2}{\alpha_2 + 1}, \frac{A_3}{\alpha_3 + 1}, \ldots \frac{A_n}{\alpha_n + 1}.$$

Die Resultate sind in beiden Fällen selbstverständlich dieselben.

Wenn man bedenkt, dass die Zahlen

$$\frac{A_1}{1}, \frac{A_1}{2}, \frac{A_1}{3} \ldots \frac{A_1}{\alpha_1}; \frac{A_2}{1}, \frac{A_2}{2}, \frac{A_2}{3} \ldots \frac{A_2}{\alpha_2}; \frac{A_3}{1}, \frac{A_3}{2}, \frac{A_3}{3} \ldots \frac{A_3}{\alpha_3}; \ldots$$

alle grösser sind als die oben angegebenen, so können sie als zu den bereits verteilten Sitzen gehörend betrachtet werden, und wir erhalten so das Verfahren, das unter dem Namen belgisches oder Hondt'sches Verfahren bekannt ist, und das darin besteht, dass man die verschiedenen Zahlen $A_1, A_2 \ldots A_n$ durch die aufeinanderfolgenden Zahlen 1, 2, 3 ... dividiert, von den erhaltenen Quotienten die s-grössten nimmt und jeder Liste die entsprechende Zahl von Delegierten zuweist. Die Rechnung kann abgekürzt werden, indem man die Summen $A_1, A_2 \ldots A_n$ durch $D = \frac{S}{s}$ dividiert, den einzelnen Listen zunächst $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ Delegierte zuweist und die Tabelle beginnen lässt mit den Werten

$$\frac{A_1}{\alpha_1 + 1}, \frac{A_2}{\alpha_2 + 1} \ldots \frac{A_n}{\alpha_n + 1}$$

und die noch fehlenden Sitze den grössten dieser Werte zuweist. Die letzte der Grössen, $\frac{A_x}{\alpha_x + 1}$, der noch ein Delegierter entspricht, gibt uns die sog. Verteilungszahl, d. h. die grösste Zahl, die wir in $A_1, A_2 \ldots A_n$ dividieren müssen, um bei einer Gesamtzahl von s Delegierten die jeder Liste zukommende Zahl zu finden.

Beispiel.

$s = 16$; 5 Listen mit $\Sigma A = S = 24075$; $A_1 = 6375$; $A_2 = 9307$; $A_3 = 3247$; $A_4 = 4469$; $A_5 = 677$.

Dann ist

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
dividiert durch 1:	**6375**	**9307**	**3247**	**4469**	677
„ „ 2:	**3187 1/2**	**4653 1/2**	**1623 1/2**	**2234 1/2**	
„ „ 3:	**2125**	**3102 1/3**	1082 1/3	**1489 2/3**	
„ „ 4:	**1593 3/4**	**2326 3/4**		1117 1/4	
„ „ 5:	1275	**1861 2/5**			
„ „ 6:	1062 1/2	**1551 1/6**			
„ „ 7:		**1329 4/7**			
„ „ 8:		1163 3/8			
„ „ 9:		1034 1/9			
Es erhalten Delegierte	4	7	2	3	

Die Verteilungszahl ist 1329 4/7; d. h. wenn wir die Summen $A_1 \ldots A_5$ durch diese Zahl dividieren, erhalten wir $s = 16$ Delegierte. Die abgekürzte Rechnung ergibt folgendes Resultat:

$$D = \frac{S}{s} = 24075 : 16 = 1504{,}7.$$

Erste Verteilungsrechnung:

	Stimmenzahlen	Genaue proz. Vertretung	Ohne Brüche
Liste A_1	6375	4,24	4
„ A_2	9307	6,18	6
„ A_3	3247	2,16	2
„ A_4	4469	2,97	2
„ A_5	677	0,45	0
	24075	16,00	14

Zweite Verteilungsrechnung:

	Stimmenzahlen	$\alpha + 1$	$\frac{A}{\alpha+1}$	Delegierte
Liste A_1	6375	5	1275	4
„ A_2	9307	7	1329 4/7	6
„ A_3	3247	3	1082 1/3	2
„ A_4	4469	3	**1489 2/3**	3
„ A_5	677	1	677	0
				15

Dritte Verteilungsrechnung:

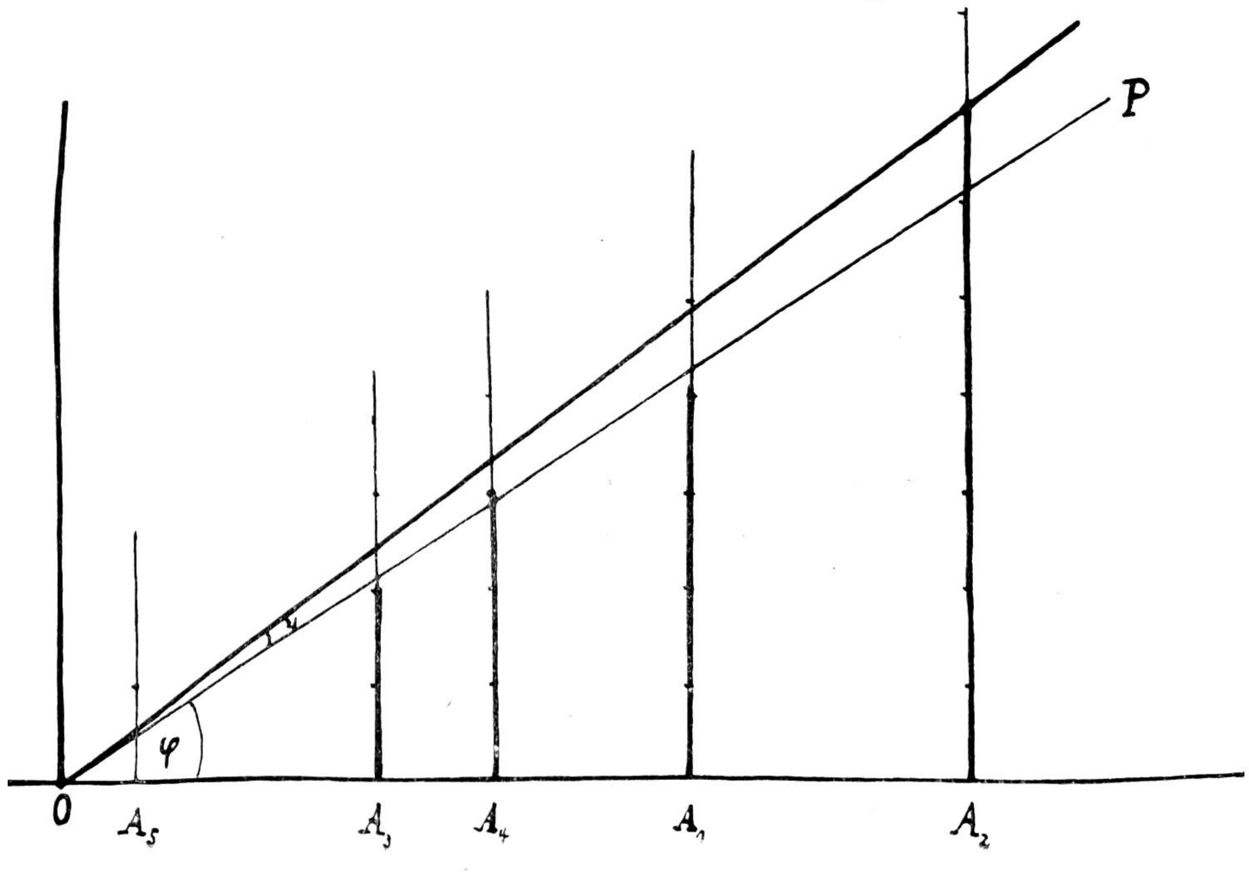
	Stimmenzahlen	$\alpha + 1$	$\frac{A}{\alpha + 1}$	Delegierte
Liste A_1	6375	5	1275	4
„ A_2	9307	7	**1329 $^4/_7$**	7
„ A_3	3247	3	1082 $^1/_3$	2
„ A_4	4469	4	1117 $^1/_4$	3
„ A_5	677	1	677	0
				16

Die Verteilungszahl ist also wieder **1329 $^4/_7$**.

4. Geometrisch kann das Verfahren folgendermassen dargestellt werden:

Wir tragen für jede Liste die Zahlen $A_1 \ldots A_n$ von 0 aus als Abszissen ab. In den Endpunkten errichten wir Ordinaten und machen in gleichen Abständen Punkte, die den auf den verschiedenen Listen vorgeschlagenen Kandidaten entsprechen sollen.

Geometrische Darstellung.



Die Länge der Ordinaten sei $a_1, a_2 \ldots a_n$; so erhalten wir als Verbindungslinie die Gerade OP. Die unter derselben liegende Zahl von Punkten stellt die Summe

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots \alpha_n = \Sigma\alpha$$

dar. Ist sie kleiner als s, so wird die Gerade um den Winkel φ gedreht, bis die Summe der in und unter derselben liegenden Punkte der Zahl s entspricht.

Die Verteilungszahl wird gegeben durch cotg φ, die in obiger Figur gegeben wird, durch

$$\operatorname{cotg}\varphi = \frac{A_2}{7} = \frac{9307}{7} = \mathbf{1329^4/_7}.$$

5. Die meisten Gesetze über Verhältniswahlen sprechen von einer Wahlzahl, mit deren Hilfe der Wahlausschuss durch eine einfache Operation die Zahl der den einzelnen Listen zukommenden Delegierten so genau als möglich bestimmen kann. Wie lautet diese Wahlzahl? Es ist

$$a_1 = \frac{A_1 s}{S} = \alpha_1 + \frac{R_1 s}{S} = \alpha_1 + r_1 \text{ (wo } r_1 \text{ ein echter Bruch).}$$

Durch Summation folgt

$$\frac{s}{S}(A_1 + A_2 + \ldots A_n) = s = \Sigma\alpha + \Sigma r.$$

Das verlangte Resultat, dass $\Sigma\alpha = s$, wird nur erreicht, wenn $\Sigma r = 0$, d. h. in dem seltenen Ausnahmefall, wo alle Brüche $= 0$ sind oder die Division durch $D = \frac{S}{s}$ in allen Stimmenzahlen ohne Rest aufgeht. In allen andern Fällen ist $\Sigma\alpha < s$; es wird also mindestens ein Delegierter zu wenig erscheinen. Wir verteilen daher $s + 1$ Delegierte statt s und nehmen als Divisor

$$\frac{S}{s+1} \text{ statt } \frac{S}{s}$$

und erhalten

$$\frac{A_1(s+1)}{S} = \alpha_1 + t_1.$$

Durch Summation wird

$$s + 1 = \Sigma\alpha + \Sigma t.$$

Im Ausnahmefall wird $\Sigma t = 0$, also

$$s + 1 = \Sigma \alpha.$$

Wir würden also einen Delegierten zu viel erhalten; um das zu verhüten, wählen wir als Divisor nicht $\frac{S}{s+1}$, sondern eine Zahl, die grösser ist, also $\frac{S}{s+1} + 1$, wobei wir Brüche vernachlässigen, und kommen auf diese Weise zum Begriff der Wahlzahl, die, als Divisor angewandt, nie zu viele Delegierte geben kann.

Aus der Gleichung $s + 1 = \Sigma \alpha + \Sigma t$ folgt, dass, wenn die Wahlzahl als Divisor angewandt wird, bei 2 Listen sozusagen immer schon bei der ersten Verteilungsrechnung alle Delegierte herauskommen. Bei mehr als 2 Listen können ein oder einige Sitze unbesetzt bleiben, und die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Listen m Sitze nachträglich zu besetzen sind, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass n echte Brüche zusammen die ganze Zahl m + 1 ergeben.

Daraus ergibt sich ferner, dass, wenn die erste Verteilung mit der Wahlzahl $\frac{S}{s+1}$ gemacht wird, man viel weniger häufig weitere Verteilungen vorzunehmen hat, als wenn die erste Verteilung mit dem Quotienten $\frac{S}{s}$ gemacht wird. Die beste Wahlzahl ist daher mit Rücksicht auf ihren Zweck $\frac{S}{s+1} + 1$.

Die Lösung [1]) des Beispiels mit dieser Wahlzahl ist die folgende:

Wahlzahl = 24075 : 17 = 1416 + 1 = **1417.**

Liste A_1	6375 : 1417	= 4
„ A_2	9307 : 1417	= 6
„ A_3	3247 : 1417	= 2
„ A_4	4469 : 1417	= 3
„ A_5	677 : 1417	= 0
		15

[1]) Diese Methode ist bekannt als System Hagenbach.

Zweite Verteilungsrechnung:

		Stimmenzahlen	$\alpha+1$	$\frac{A}{\alpha+1}$	Delegierte
Liste	A_1	6375	5	1275	4
„	A_2	9307	7	**1329**$^1/_7$	7
„	A_3	3247	3	1082$^1/_3$	2
„	A_4	4469	4	1117$^1/_4$	3
„	A_5	677	1	677	0
					16

Eine dritte Verteilungsrechnung ist also hier nicht mehr notwendig.

Nun hat das Streben nach Einfachheit nicht nur zur Einführung einer Wahlzahl, sondern auch zu einfachen Verfahren für die Verteilung der Restmandate geführt.[1])

6. Bei der Methode der grössten Reste werden die freien Sitze denjenigen Listen zugeteilt, bei denen in der Division durch die Wahlzahl die grössten Reste verbleiben, oder, was dasselbe ist, man erhöht die grössten Bruchzahlen r auf Ganze, bis die erforderliche Zahl von Delegierten erreicht ist. Man teilt also die fehlenden Sitze nicht den grössten Werten von $\frac{R_x}{A_x}$, sondern einfach den grössten R_x zu.

Die geometrische Darstellung zeigt den Fehler, den man bei der Methode der grössten Reste begeht, in recht anschaulicher Weise. Wenn man die Gerade OP um einen Winkel weiter dreht, also für alle Parteien in gleicher Weise die Verteilungszahl, cotg φ, ändert, so sind die auf den verschiedenen Senkrechten durchlaufenen Strecken umso grösser, je weiter eine Senkrechte vom Nullpunkt entfernt ist. Der Schnittpunkt der Senkrechten mit der Geraden OP läuft um so schneller dem Ziele, d. h. einem weitern Delegierten entgegen, je weiter entfernt er vom Nullpunkt ist, d. h. je grösser die entsprechende Stimmenzahl ist. Die Verhältniswahl beruht eben auf der Gleichberechtigung der Wähler und nicht auf der Gleichberechtigung der Parteien; die Ansprüche der Parteien sind nicht gleich, sondern ihren Stärken proportional.

---

[1]) Klöti, die Texte der schweizerischen Verhältniswahlgesetze. Zürich 1909.

7. Nach einem andern Verfahren werden die fehlenden Sitze einfach den Listen mit den grössten Stimmenzahlen zugeteilt, und zwar, wenn mehrere Sitze zu vergeben sind, in der Reihenfolge ihrer Stärke. Man will damit erreichen, dass eine über das mathematisch richtige Mass hinausgehende Bevorzugung stets den grössern Parteien zugute komme, was weniger unbillig sei als eine Begünstigung der kleinen Parteien. Man teilt bei diesem Verfahren die fehlenden Sitze nicht den grössten $\frac{A}{\alpha+1}$, sondern einfach den grössten A zu.

8. Aus den Darlegungen über die Wahlzahl geht ohne weiteres hervor, dass die Fehler, die aus diesen einfachen Verfahren für Zuteilung der Restmandate erfolgen können, von viel geringerer Bedeutung sind, wenn in der ersten Verteilungsrechnung die Wahlzahl $\frac{S}{s+1}+1$, statt $\frac{S}{s}+1$ oder $\frac{S}{s}$ angewendet wird, weil bei Anwendung der Wahlzahl $\frac{S}{s+1}+1$ viel weniger häufig Restmandate zu verteilen bleiben. An derselben sollte also festgehalten werden.

II.

1. Die im Problem der Verhältniswahl gesuchten besten ganzzahligen Näherungswerte kann der Mathematiker auch bestimmen unter Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate. $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ sind die besten Näherungswerte. Jeder Wähler hat das Recht auf $\frac{s}{S}=\frac{1}{D}$ Delegierten und erhält in Wirklichkeit, wenn er der Liste A_1 angehört, $\frac{x_1}{A_1}$, woraus ein Fehler resultiert von

$$d_1=\frac{x_1}{A_1}-\frac{s}{S}$$

Für die andern Listen folgen die Fehler $d_2, d_3 \ldots$ Diese Fehler sollen ein Minimum und die entsprechenden $x_1, x_2 \ldots x_n$

bestimmt werden. Wenn der Fehler für den einzelnen Wähler der Liste $A_1 = \frac{x_1}{A_1} - \frac{s}{S}$, so ist die Summe der Fehlerquadrate für die A_1 Wähler

$$= A_1 \left(\frac{x_1}{A_1} - \frac{s}{S}\right)^2$$

und für sämtliche Listen, also für die S Wähler

$$= \Sigma A \left(\frac{x}{A} - \frac{s}{S}\right)^2$$

Nun ist

$$\Sigma A \left(\frac{x}{A} - \frac{s}{S}\right)^2 = \sum \frac{A\,(xS - sA)^2}{A^2 S^2} = \sum \frac{x^2}{A} - 2 \sum \frac{xs}{S} + \sum \frac{As^2}{S^2}$$

$$= \sum \frac{x^2}{A} - 2 \frac{s}{S} \Sigma x + \frac{s^2}{S^2} \Sigma A,$$

und weil

$$\Sigma x = s$$
$$\Sigma A = S$$

$$= \sum \frac{x^2}{A} - 2 \frac{s^2}{S} + \frac{s^2}{S} = \sum \frac{x^2}{A} - \frac{s^2}{S}.$$

Die Summe, die ein Minimum werden soll, ist also

$$\sum \frac{x^2}{A} = \frac{x_1^2}{A_1} + \frac{x_2^2}{A_2} + \frac{x_3^2}{A_3} + \dots \frac{x_n^2}{A_n}.$$

Die theoretische Lösung scheint unmöglich; begnügen wir uns mit einer praktischen. Es ist

$$x^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots (2x - 1).$$

Die Summe, die ein Minimum werden soll, ist also die Summe

der x_1 ersten Zahlen der nachfolgenden Linie 1,
„ x_2 „ „ „ „ „ 2,
„ x_3 „ „ „ „ „ 3, u. s. f.

Linie 1: $\frac{1}{A_1}, \frac{3}{A_1}, \frac{5}{A_1} \dots \frac{2x_1 - 1}{A_1}$,

„ 2: $\frac{1}{A_2}, \frac{3}{A_2}, \frac{5}{A_2} \dots \frac{2x_2 - 1}{A_2}$,

„ 3: $\frac{1}{A_3}, \frac{3}{A_3}, \frac{5}{A_3} \dots \frac{2x_3 - 1}{A_3}$, u. s. f.

Man erhält also die kleinste Summe, wenn man einfach die s kleinsten Quotienten des Systems nimmt, da auf allen Linien die Zahlen steigen. Das gleiche Resultat ergibt sich, wenn man obige Zahlen durch ihre Reziproken ersetzt und die s grössten nimmt, woraus die allgemeine Regel entsteht:

Man dividiert die Zahlen $A_1, A_2 \ldots A_n$ durch die aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 . . ., nimmt die s grössten Quotienten und erhält auf diese Weise die gesuchten Werte $x_1, x_2 \ldots x_n$.

Für unser Beispiel ergibt sich folgendes Resultat:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
dividiert durch 1:	**6375**	**9307**	**3247**	**4469**	677
" " 3:	**2125**	**3102 1/3**	**1082 1/3**	**1489 2/3**	
" " 5:	**1275**	**1861 2/5**	649 2/5	**893 4/5**	
" " 7:	**910 5/7**	**1329 4/7**			
" " 9:	708 1/3	**1034 1/9**			
" " 11:		**846 1/11**			
" " 13:		**715 12/13**			
Es erhalten Delegierte:	4	7	2	3	

und die Verteilung ist dieselbe wie nach der Methode Hondt.

Die Rechnung kann auch hier abgekürzt werden, indem man die A zuerst durch eine Wahlzahl dividiert, den einzelnen Listen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ Vertreter zuteilt und die Tabelle beginnen lässt mit

$$\frac{A_1}{2\alpha_1+1}, \frac{A_2}{2\alpha_2+1}, \frac{A_3}{2\alpha_3+1}, \ldots \frac{A_n}{2\alpha_n+1}.$$

2. Untersuchen wir in gleicher Weise die Fehler, die sich für die Gewählten ergeben. Jeder Gewählte hat das Recht, $\frac{S}{s} = D$ Wähler zu vertreten. Gehört er zur Liste A_1, so vertritt er $\frac{A_1}{x_1}$, woraus ein Fehler resultiert von

$$\frac{A_1}{x_1} - \frac{S}{s}.$$

Nach dem Gesetz der kleinsten Quadrate soll also ein Minimum werden

$$\Sigma x\left(\frac{A}{x}-\frac{S}{s}\right)^2=\sum\frac{A^2}{x}-2\sum\frac{AS}{s}+\frac{S^2}{s^2}\Sigma x$$
$$=\sum\left(\frac{A^2}{x}-2\frac{AS}{s}\right)+\frac{S^2}{s}.$$

Was die Rechnung hier erschwert, ist der Umstand, dass ΣA nicht notwendigerweise $= S$ sein muss; denn wenn eine Liste keinen Vertreter erhält, kann man nicht $x = 0$ setzen, weil sonst $\frac{A^2}{0} = \infty$ werden müsste. Der entsprechende Term ist also wegzulassen. Das Resultat ist daher nicht allgemein, indem wir voraussetzen, dass keine der Zahlen $x_1, x_2 \ldots x_n = 0$ sei, dass also alle Listen mindestens einen Vertreter erhalten hätten. Dann ist

$$\sum\frac{A_2}{x}-2\frac{S^2}{s}+\frac{S^2}{s}=\sum\frac{A^2}{x}-\frac{S^2}{s},$$

und es muss $\sum\frac{A^2}{x}$ ein Minimum werden, d. h.

$$\frac{A_1^2}{x_1}+\frac{A_2^2}{x_2}+\frac{A_3^2}{x_3}+\ldots$$

Fügt man der Liste A_1 einen Sitz zu, so ist $\sum\frac{A^2}{x}$ zu vermindern um $\frac{A_1^2}{x_1(x_1+1)}$.

Man ordnet daher in absteigender Reihe

$$\frac{A_1^2}{1\cdot 2},\ \frac{A_1^2}{2\cdot 3},\ \frac{A_1^2}{3\cdot 4},\ \ldots\ \frac{A_1^2}{(x_1-1)x_1};\ \frac{A_2^2}{1\cdot 2},\ \frac{A_2^2}{2\cdot 3},\ \ldots\ \frac{A_2^2}{(x_2-1)x_2},\ \ldots$$

und nimmt die s grössten Werte. Man kann diese Zahlen ersetzen durch

$$\frac{A_1}{2\sqrt{1\cdot 2}},\ \frac{A_1}{2\sqrt{2\cdot 3}},\ \ldots\ \frac{A_1}{2\sqrt{(x_1-1)x_1}};\ \frac{A_2}{2\sqrt{1\cdot 2}},\ \frac{A_2}{2\sqrt{2\cdot 3}},\ \ldots$$
$$\frac{A_3}{2\sqrt{1\cdot 2}},\ \frac{A_3}{2\sqrt{2\cdot 3}},\ \ldots$$

und wenn man die Nenner ausrechnet, erhält man

2,828   4,898   6,928   8,944   10,954, also annähernd   1   3   5   7   9   11, d. h. die aus der Verteilungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate hervorgegangenen Nenner.

3. Die Betrachtung des Fehlers in der Vertretung der Parteien oder Listen führt zu einem interessanten Resultat, nämlich zur Methode der grössten Reste, die, wie früher dargelegt worden ist, nicht auf der Gleichberechtigung der Wähler, sondern der Parteien aufgebaut ist. Die Liste A_1 hat das Anrecht auf $a_1 = \frac{A_1 s}{S}$ Delegierte; sie erhält aber nur x_1, woraus ein Fehler resultiert von

$$x_1 - \frac{A_1 s}{S}.$$

Die Summe, die ein Minimum werden soll, ist daher

$$\sum\left(x - \frac{As}{S}\right)^2 = \sum\left(x - \frac{A}{D}\right)^2 = \Sigma x^2 - 2\sum x\frac{A}{D} + \sum\frac{A^2}{D^2}.$$

Man nimmt den einzigen variablen Teil der Summe und bestimmt die Zunahme, die eintritt, wenn man der Liste A_1 einen Sitz mehr zuteilt, und kommt dazu, die kleinsten der Zahlen

$$1 + 2x_1 - 2\frac{A_1}{D},$$

also

$$1 - 2\frac{A_1}{D},\ 3 - 2\frac{A_1}{D},\ 5 - 2\frac{A_1}{D}\ \ldots;\ 1 - 2\frac{A_2}{D},\ 3 - 2\frac{A_2}{D}\ \ldots$$

zu nehmen, denen man 1 addieren und die man durch $\frac{D}{2}$ dividieren kann, so dass die s kleinsten Zahlen

$$\begin{array}{lll} D - A_1 & 2D - A_1 & 3D - A_1 \ldots. \\ D - A_2 & 2D - A_2 & 3D - A_2 \ldots. \\ D - A_3 & 2D - A_3 & \ldots\ldots \end{array}$$

in Betracht kommen. Auf jeder Linie sind die Zahlen entweder alle positiv, wenn $A_1, A_2, A_3 < D$ oder vorerst negativ, dann positiv. Man wird vorerst alle negativen Zahlen nehmen, d. h.

der Liste A_1 vorerst α_1, der Liste A_2 vorerst α_2 etc. Sitze zuerkennen, dann bleiben in Frage die Zahlen

$$(\alpha_1 + 1)\,D - A_1,\ (\alpha_2 + 1)\,D - A_2,\ (\alpha_3 + 1)\,D - A_3 \text{ etc.}$$

Nun ist

$$(\alpha_1 + 1)\,D - A_1 = A_1 - R_1 + D - A_1 = \mathbf{D} - \mathbf{R}_1.$$

Man kommt also dazu, den kleinsten $D - R$, d. h. den grössten R oder den grössten Resten die fehlenden Sitze zuzuerkennen.

4. Vergleich der Methode der kleinsten Quadrate mit derjenigen von Hondt.

Es soll die Wahrscheinlichkeit dafür gesucht werden, dass eine Liste A_2, die kleiner ist als A_1, mit der Methode der kleinsten Quadrate einen Sitz gewinnt, den sie mit der Methode Hondt nicht gewinnen würde.

Es sei $A_2 = k A_1$, wo $k < 1$,
p = die Gesamtzahl der den Listen A_1 und A_2 zufallenden Sitze, also $p = x_1 + x_2$.

Damit der Liste A_1 x_1 Sitze zufallen, müssen die Bedingungen erfüllt sein

$$\frac{A_1}{2x_1 - 1} > \frac{A_2}{2x_2 + 1} \quad \text{und} \quad \frac{A_2}{2x_2 - 1} > \frac{A_1}{2x_1 + 1},$$

oder, was dasselbe ist,

$$\frac{p}{k+1} + \frac{1}{2} > \alpha > \frac{p}{k+1} - \frac{1}{2}.$$

Die Zahl der Sitze ist also die der Grösse $\frac{p}{k+1}$ nächstliegende ganze Zahl.

Ähnliche Rechnungen führen bei der Methode Hondt zum Schluss, dass die Zahl der Sitze derjenigen ganzen Zahl entspricht, die der Grösse

$$\frac{p}{k+1} + \frac{1-k}{2(1+k)} \quad \text{oder} \quad \frac{p}{k+1} + h,$$

am nächsten liegt, wo $0 < h < \frac{1}{2}$.

Der der Liste A_1 entstehende Verlust an Sitzen bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate statt derjenigen von Hondt ist gegeben durch

$$h = \frac{1 - k}{2(1 + k)}.$$

Das Resultat ist unabhängig von der den beiden Listen zuerkannten Zahl p von Sitzen. Es zeigt, dass die kleinen Parteien erheblich gewinnen. Nehmen wir alle Werte von A_2 gleich wahrscheinlich an oder lassen wir die Werte von k von 0—1 wachsen, so ist der mittlere Gewinn gegeben durch das Integral

$$\int_0^1 \frac{1 - k}{2(1 + k)} dk = \log 2 - \frac{1}{2} = 0{,}693 - 0{,}5 = 0{,}193 - \frac{1}{5} \text{ rund.}$$

Ein Mal auf 5 wird also eine kleinere Partei nach der Methode der kleinsten Quadrate einen Sitz gewinnen, den sie nach der Methode Hondt nicht gewinnen würde. Deswegen aber für die Praxis die Methode der kleinsten Quadrate an Stelle der eingebürgerten Methode Hondt zu fordern, wäre falsch.

Benützte Literatur.

Hagenbach-Bischof, Die Verteilungsrechnung beim Basler Gesetz betreffend die Verhältniswahl. Basel 1905.

Klöti, Die Texte der schweizerischen Verhältniswahlgesetze. Zürich 1909.

Sainte Laguë, La représentation proportionnelle et la méthode des moindres carrés. Annales de l'école normale sup. t, XXVII. 1910.

Moch, Gaston, La représentation vraiment proportionnelle. Paris 1910.