Der Zusammenhang der Bessel'schen Funktion Ja(x) mit der hypergeometrischen Reihe

Autor(en): **Hartmann, Franz**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1919)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-319269

Franz Hartmann.

Der Zusammenhang der Bessel'schen Funktion $\overset{a}{J}(x)$ mit der hypergeometrischen Reihe.

Einleitung.

Felix Klein*) gruppiert in der höheren Analysis die hauptsächlich durch ihre Anwendung in der mathematischen Physik und Astronomie, bekannt und wichtig gewordenen Funktionen nach folgenden zwei Hauptkategorien:

1. in die der elliptischen Funktionen und ihren verschiedenen Verallgemeinerungen und Spezialfällen, wie z. B. die hyperelliptischen Funktionen und Integrale, die Abel'schen Funktionen, u. a. m.

2. in solche Funktionen

$$y = f(x)$$

die als Lösung linearer Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + M \frac{d y}{d x} + N y = 0 \tag{1}$$

definiert werden, wo M und N rationale Funktionen von x bedeuten. Hieher gehört hauptsächlich die hypergeometrische Funktion, nebst all ihren mannigfaltigen Spezialfunktionen wie z. B. die Kugel- und Zylinderfunktionen.

Die vorliegende Arbeit trachtet nun darnach die spezielle Zylinderfunktion $\overset{a}{J}(x)$, d. h. die Bessel'sche Funktion erster Art, vermittelst der allgemeinen hypergeometrischen Funktion darzustellen und zu untersuchen.

Vorerst verbleiben wir aber bei der ganz allgemeinen Definition der Funktionsarten, betrachten also die Differentialgleichung (1). Vom theoretischen Standpunkte können zur Integration hauptsächlich zwei Methoden angewendet werden, nämlich:

1. die Integration vermittelst unendlicher Reihen;
2. die Integration durch bestimmte Integrale.

*) F. Klein: Ueber die hypergeometrische Funktion. Leipzig 1906.

Integration linearer Differentialgleichungen durch unendliche Reihen.

Die Integration der Differentialgleichung (1) vermittelst unendlicher Reihen ist, rein formell betrachtet, eine sehr einfache. Nimmt man einen beliebigen Punkt a im Zahlenfelde an, der weder für M noch für N singulären Charakter trägt, so können in der Umgebung dieses Punktes die Funktionen M und N durch Potenzreihen dargestellt werden, die nach steigenden Potenzen von (x — a) fortschreiten. Der Convergenzradius reicht dabei bis zu dem am nächsten bei a gelegenen singulären Punkte der Funktion.

Wir setzen also

$$M = \sum_0^\infty {}^{\nu} A_\nu (x-a)^\nu; \qquad N = \sum_0^\infty {}^{\nu} B_\nu (x-a)^\nu$$

in Gleichung (1) eingesetzt ergibt

$$(2) \qquad \frac{d^2 y}{d x^2} + \sum_0^\infty {}^{\nu} A_\nu (x-a)^\nu \frac{dy}{dx} + \sum_0^\infty {}^{\nu} B_\nu (x-a)^\nu \cdot y = 0$$

Man suche nun diese Differentialgleichung durch unendliche Reihen zu integrieren. Zu diesem Zwecke wird angenommen, es existiere ein partikuläres Integral, das sich durch die Reihenentwicklung geben lässt:

$$(3) \qquad y = \sum_0^\infty {}^{\nu} C_\nu (x-a)^\nu$$

Diese Entwicklung darf deshalb wieder um den Punkt a gewählt werden, weil das Integral der Differentialgleichung keine andern singulären Punkte enthalten kann als diejenigen der rationalen Funktionen M und N. Das Convergenzgebiet der Reihe (3) wird durch das gemeinsame Flächenstück der Entwicklungen um a in (2) dargestellt.

Indem man den für y vorausgesetzten Wert in der Differentialgleichung einsetzt, ergibt sich

$$(4)\quad \frac{d^2 \sum\limits_0^\infty{}_v\, C_v\,(x-a)^v}{d\,x^2} + \sum\limits_0^\infty{}_v\, A_v\,(x-a)^v\, \frac{d \sum\limits_0^\infty{}_v\, C_v\,(x-a)^v}{d\,x}$$

$$+ \sum\limits_0^\infty B_v\,(x-a)^v \cdot \sum\limits_0^\infty C_v\,(x-a)^v = 0$$

Bezeichnet man abkürzungsweise:

$$\sum\limits_0^\infty{}_v\, A_v\,(x-a)^v = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots.$$

$$\sum\limits_0^\infty{}_v\, B_v\,(x-a)^v = b_0 + b_1\,x + b_2\,x^2 + \ldots.$$

$$\sum\limits_0^\infty{}_v\, C_v\,(x-a)^v = c_0 + c_1\,x + c_2\,x^2 + \ldots.$$

und denkt man sich diese Werte in (4) substituiert und zudem die dritte Reihe in ihren Ableitungen ausgerechnet, so kann (3) nur dann der Differentialgleichung als partikuläres Integral genügen, wenn in (4) alle Summen der Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x zu Null werden.

Durch Herausheben der einzelnen Entwicklungskoeffizienten erhält man:

$$|\,x^0\,| = 2\,c_2 + a_0\,c_1 + b_0\,c_0 = 0$$

$$|\,x^1\,| = 2 \cdot 3\,c_3 + 2\,c_2\,a_0 + c_1\,a_1 + c_1\,b_0 + c_0\,b_1 = 0$$

$$|\,x^2\,| = \ldots \qquad\qquad \ldots. = 0$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

Gibt man nun den Konstanten c_0 und c_1 gewisse Anfangswerte, z. B. $c_0 = c_1 = 1$, so können sämtliche unbekannten Koeffizienten $c_2, c_3, \ldots c_n \ldots$ sukzessive bestimmt werden. Auf diese Art erhält man ein, durch eine unendliche Reihe dargestelltes, partikuläres Integral

$$y = f(x) \tag{5}$$

der Differentialgleichung (1), das zwar vorläufig nur in einem beschränkten Teile des Zahlenfeldes Gültigkeit besitzt. Die Untersuchung über die Fortsetzungsmöglichkeit der Funktion wird uns aber allgemeinen Aufschluss geben.

Sind die Funktionen M und N der Differentialgleichung von einfacher Form, so lässt sich meistens diese hier ganz allgemein gegebene, allerdings nur formell durchgeführte Methode bedeutend vereinfachen. Wir erinnern an die Integration der hypergeometrischen Differentialgleichung, wie sie Weber*) entwickelt, ferner an diejenige der Differentialgleichung der Kugelfunktion, wie sie u. a. auch Graf**) vornimmt, wo in beiden Fällen direkt der allgemeine Koeffizient der Reihenentwicklung bestimmt werden kann.

Integration durch bestimmte Integrale.

Währenddem die Integration der in ganz allgemeiner Form gegebenen Differentialgleichung (1) durch unendliche Reihen möglich war, ist dies nun keineswegs der Fall, wenn die Integration durch bestimmte Integrale durchgeführt werden soll.

Die allgemeinste lineare Differentialgleichung nter Ordnung, die bis heute auf direktem Wege durch bestimmte Integrale integriert wurde, ist die von Jordan***) aufgestellte, verallgemeinerte Gauss'sche Differentialgleichung von der Form:

$$\begin{aligned} Q(x)\frac{d^n y}{dx^n} - (\xi - n)\, Q'(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} &+ \\ + \frac{(\xi - n)(\xi - n + 1)}{1 \cdot 2}\, Q''(x)\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} &- + \dots \\ - R(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + (\xi - n + 1)\, R'(x)\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} &- + \dots\dots \end{aligned} \tag{6}$$

---

*) Riemann-Weber: Differential-Gleichungen, Bd. 2 pag. 12.

**) J. H. Graf: Kugelfunktionen, Kollegienheft W. S. 16/17.

***) Jordan: Cours d'analyse III, pag. 241 ff.

wo ξ eine Konstante bedeutet und unter Q (x) und R (x) zwei Polynome verstanden werden. Q (x) ist vom n^{ten} Grade, R (x) vom Grade $\overline{\overline{<}}$ n.

Setzt man

(7) $$y = \int_L U (u - x)^{\xi - 1} d u$$

wo U durch die Bedingung bestimmt wird

$$R(u)U = \frac{d}{du} U Q(u)$$

also

$$U = \frac{1}{Q(u)} \cdot e^{\int \frac{R(u)}{Q(u)} du}$$

so geht unter Berücksichtigung des Taylor'schen Satzes die Differentialgleichung (6) über in

(8) $$\int_L d U Q (u)(u - x)^{\xi - n} = \int_L d V = 0$$

Das Integral (8) ist nun gleich Null, d. h. der Differentialgleichung wird Genüge geleistet, falls der Weg L entweder eine geschlossene Integrationskurve ist, auf der V nach zurückgelegtem Wege seinen ursprünglichen, den Anfangswert wieder annimmt, oder falls L einen solchen Weg bedeutet, in dessen Anfangs- und Endpunkten V zu Null wird.

Der bekannteste Weg der ersten Art ist der nach Pochhammer*) so benannte Doppelumlauf, zu den letzteren sind hauptsächlich die gewöhnlichen geradlinigen Integrationswege zu zählen, sowie auch die Schleifenintegrale, d. h. offene Wege, die von einem gewissen Punkte, für welchen V zu Null wird, auslaufen und wieder in denselben zurückkehren.

Soll nun nach dem heutigen Stand der Theorie der linearen Differentialgleichungen, die Gleichung (1) auf direktem Wege durch bestimmte Integrale integriert werden können, so müssen

---

*) Math. Annalen. Bd. 35.

die Funktionen M und N derart beschaffen sein, dass sich die Differentialgleichung in der Form geben lässt:

$$(9) \quad Q(x)\frac{d^2 y}{d x^2} - (\xi - 2)\,Q'(x)\frac{d y}{d x} + \frac{(\xi-2)(\xi-1)}{1 \cdot 2}\,Q''(x) \cdot y$$

$$- R(x)\frac{d y}{d x} + (\xi - 1)\,R'(x) \cdot y = 0$$

wo Q (x) ein Polynom zweiten Grades, also

$$Q(x) = (x - a)(x - b)$$

bedeutet, währenddem R (x) vom ersten oder nullten Grade sein kann.

Wir betrachten vorerst den Fall, wo unter R (x) ein Polynom ersten Grades zu verstehen ist, d. h. wir setzen

$$R(x) = x - c$$

dann wird

$$\frac{R(u)}{Q(u)} = \frac{u - c}{(u-a)(u-b)} = \frac{A}{(u-a)} + \frac{B}{(u-b)}$$

wo

$$A = \frac{a - c}{a - b}; \qquad B = \frac{c - b}{a - b}$$

und man bekommt

$$\int \frac{R(u)}{Q(u)} du = \int \frac{A}{u-a} du + \int \frac{B}{u-b} du$$

$$= A\,\mathrm{Lg}(u - a) + B\,\mathrm{Lg}(u - b)$$

woraus folgt:

$$V = e^{\int \frac{R(u)}{Q(u)} du} (u - x)^{\xi - n} = (u-a)^A (u-b)^B (u-x)^{\xi - 2}$$

Dieser Integrand V verschwindet, die reellen Komponenten der Exponenten positiv vorausgesetzt, für die Werte

$$u = a \qquad u = b \qquad u = x$$

ferner für $u = \pm \infty$

und zwar je nachdem

$$A + B + \xi - 2 \lesseqgtr 0$$

Da nun

$$U = \frac{1}{Q(u)} e^{\int \frac{R(u)}{Q(u)} du} = (u-a)^{A-1} (u-b)^{B-1}$$

ist, erhält man als Lösung der Differentialgleichung (9) das Integral

$$y = \int_g^h (u-a)^{A-1} (u-b)^{B-1} (u-x)^{\zeta-1} du \text{*)} \tag{10}$$

wo für die Grenzen g und h zwei der Grössen a, b, x oder ∞ gewählt werden dürfen, vorausgesetzt, dass das Integral für die genannten Grenzwerte überhaupt einen Sinn hat. Sollte letzteres nicht zutreffen, d. h. kann die Variable nicht bis in die Endpunkte des Weges geführt werden, so sind freie Integrationswege heranzuziehen. Wie schon erwähnt, leisten hier die Doppelumlaufs- und Schleifenintegrale sehr gute Dienste.

Fallen im Integral (10) die beiden Werte a und b zusammen, so werden die Exponenten A und B unendlich gross, ihre Summe hingegen behält endlichen Charakter. Um diesen Fall näher zu untersuchen, setzen wir**)

$$\left. \begin{aligned} b &= a - \varepsilon \\ A = C - \frac{\alpha}{\varepsilon}; &\quad B = \frac{\alpha}{\varepsilon} \end{aligned} \right\} \lim \varepsilon = 0$$

und es wird

$$\begin{aligned} (x-a)^{A-1} (x-b)^{B-1} &= \lim_{\varepsilon=0} (x-a)^{C-1-\frac{\alpha}{\varepsilon}} (x-a+\varepsilon)^{\frac{\alpha}{\varepsilon}-1} \\ &= (x-a)^{C-2} e^{\frac{\alpha}{x-a}} \end{aligned}$$

d. h. im Integral (10) fallen die singulären Punkte a und b in a zusammen, es wird a zu einem wesentlich singulären Punkte des Integranden. Die Variable kann nicht mehr um a herumgeführt werden, Doppelumläufe um den Punkt a verlieren deshalb jede Bedeutung, sie sind unmöglich; hingegen können Schleifen-

*) Dieses Integral wird von E. Picard in seinem Werke: Traité d'Analyse, Paris 1896, Tome III pag. 301, als hypergeometrisches Integral definiert.

**) s. u. a. auch Klein, hypergeometrische Funktion.

integrale hier erfolgreich benützt werden, da in gewissen Richtungen [Winkelräumen] die Variable bis an den wesentlich singulären Punkt geführt werden kann.*)

Bedeutet in der Differentialgleichung (9) R (x) ein Polynom nullten Grades, also eine Konstante, so folgt aus der Partialbruchzerlegung des Quotienten $\frac{R(u)}{Q(u)}$, dass in diesem Falle

$$A = -B$$

sein muss. Im übrigen lässt sich das Integral auf denselben Wegen herleiten wie oben.

Obschon, wie bereits erwähnt wurde, die Gleichung (9) die allgemeinste Form einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung ist, die bis heute auf direkten Wegen durch bestimmte Integrale integriert werden konnte, bilden ihre Lösungen dennoch nur

*) In dieser Beziehung ist den Schleifenintegraldarstellungen entschieden den Vorzug zu geben, weil bei diesen der Grenzübergang ohne wesentliche Veränderung des Weges vorgenommen werden kann. Wir erinnern hier nur an den Grenzübergang von der Binet'schen Funktion zur Gammafunktion, wie ihn Graf**) vollzieht. Es wird dort das Binet'sche Integral resp. das Euler'sche Integral erster Art, zweite Form durch das Schleifenintegral

$$\frac{1}{2\,i\,\sin a\,\pi}\int\limits_{-1 \leftarrow \circ} x^{a-1}(1+x)^n\,d\,x$$

gegeben, woraus sich ohne Schwierigkeiten das Integral für die Gammafunktion durch Vollziehung des bekannten Grenzüberganges ergibt, nämlich

$$\Gamma(a) = \frac{1}{2\,i\,\sin a\,\pi}\int\limits_{-N \leftarrow \circ} e^{x}\cdot x^{a-1}\,d\,x$$

Würde man das Binet'sche Integral durch einen Doppelumlauf darstellen, wie dies bis heute meistens der Fall war, so liesse sich der Grenzübergang nicht durchführen ohne nicht langwierige Wegtransformationen vornehmen zu müssen, die schliesslich zu einer Umwandlung des Doppelumlaufes in eine einzige Schleife führen dürften.

**) J. H. Graf. Einleitung in die Theorie der Gammafunktion. Bern 1894.

einen kleinen Teil der in der Analysis bekannten Integrale, die einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung als Lösung genügen. Bei letzteren wurde aber umgekehrt verfahren, indem vom bestimmten Integrale ausgehend, die Differentialgleichung gesucht wurde. Auf diesem Gebiete haben u. a. hauptsächlich E. Goursat,*) J. H. Graf,**) P. A. Nekrassoff***) und Pochhammer****) gearbeitet. Nekrassoff hat direkt eine allgemeine Methode angegeben, mit der sich die Differentialgleichungen bestimmen lassen, deren Lösungen in Form bestimmter Integrale gegeben sind.

Beiläufig sei hier bemerkt, dass z. B. sämtliche Integrale von der Form

$$y = f(x) \int (u-a)^{\alpha} (u-b)^{\beta} (u-x)^{\xi - 1} du$$

wo unter f (x) eine beliebige Funktion von x zu verstehen ist, einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung als Lösung genügen, wie leicht durch einfache Koeffizientenvergleichung mit Hülfe der Gleichung (9) gezeigt werden kann. Je nach der Beschaffenheit der Funktion f (x) nimmt die ihr entsprechende Differentialgleichung andere Formen an. Die Koeffizienten M und N der allgemeinen Gleichung (1) weisen aber, insofern wir sie untersucht haben, die nötige Gesetzesmässigkeit nicht auf, als dass es möglich wäre, die Gleichungen auf direkten Wegen durch bestimmte Integrale integrieren zu können.

Aus diesen ganz allgemein gefassten Betrachtungen über die Integrationsmethoden der unserer Funktionenkategorie als Definition zu Grunde gelegten Differentialgleichung (1) wurde ersichtlich, dass die meisten hieher gehörenden Funktionen auf relativ einfache Art durch unendliche Reihen, sowie auch durch bestimmte Integrale dargestellt werden können. So findet man

*) Goursat, Acta Mathematica, Bd. 2.

**) Graf, Math. Annalen, Bd. 45.

***) Nekrassoff, Math. Annalen, Bd. 38.

****) Pochhammer, Math. Annalen, Bd. 38.

denn auch in der Literatur durchwegs obige Funktionen von drei Hauptgesichtspunkten aus betrachtet, nämlich:

1. in Form unendlicher Reihen,
2. durch ihre Differentialgleichung,
3. durch bestimmte Integrale,

wobei die Integraldarstellung meistens aus der Reihenentwicklung hergeleitet wird, da sich auf solchem Wege das bestimmte Integral in der Regel auf einfache Art bestimmen lässt.

Wir wollen nun auch in dieser Arbeit die Betrachtungen nach obigen drei Gesichtspunkten gruppieren und beginnen mit der Reihendarstellung.

I. Kapitel.

Die Reihendarstellung.

§ 1. Der Zusammenhang der Funktion $\overset{a}{J}(x)$ mit der hypergeometrischen Reihe. Konvergenzkriterium.

Die Bessel'sche Funktion 1. Art wird definiert durch die Reihe*)

$$\overset{a}{J}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma(a+\lambda+1)} \tag{1}$$

Der Zusammenhang dieser Summe mit der hypergeometrischen Reihe

$$F(a, b, c, x) = 1 + \frac{a \cdot b}{c \cdot 1} x + \frac{a(a+1)\,b(b+1)}{c(c+1)\;1 \cdot 2} x^2 + \ldots\ldots \tag{2}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+\lambda-1)\,b(b+1)\ldots(b+\lambda-1)}{c(c+1)\ldots(c+\lambda-1)\;1 \cdot 2 \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda} x$$

*) Graf & Gubler, Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Funktionen. Bern, 1898. Heft I, pag. 25.

ergibt sich wie folgt*):

Unter Berücksichtigung des Satzes, dass

$$\Gamma(a+\lambda+1) = \Gamma(a+1)\cdot(a+1)(a+2)\ldots\ldots(a+\lambda)$$

wird (1) zu

$$\overset{a}{J}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(a+1)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}}{\lambda!\,(a+1)(a+2)\ldots(a+\lambda)}$$

mit dem Grenzwert

$$\lim_{k=\infty} \frac{k(k+1)\ldots\ldots(k+\lambda-1)}{k^\lambda}\cdot\frac{k(k+1)\ldots\ldots(k+\lambda-1)}{k^\lambda} = 1$$

erweitert, erhält man

$$\overset{a}{J}(x) = \lim_{k=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(a+1)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{k(k+1)\ldots(k+\lambda-1)\,k(k+1)\ldots(k+\lambda-1)}{(a+1)(a+2)\ldots(a+\lambda)\quad\lambda!} \left(-\frac{x^2}{4k^2}\right)^\lambda$$

Die in dieser Gleichung erhaltene Summe ist nun nach (2) gleich der speziellen hypergeometrischen Reihe

$$F\left(k, k, a+1, -\frac{x^2}{4k^2}\right)$$

es wird daher

$$(3)\qquad \overset{a}{J}(x) = \lim_{k=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(a+1)} F\left(k, k, a+1, -\frac{x^2}{4k^2}\right)$$

Dieser Grenzwert tritt in der mathematischen Literatur zuerst bei P. A. Hansen**) auf. Es ergibt sich daraus sofort der Satz, dass sich die Funktion $\overset{a}{J}(x)$ nur in Reihen, die nach steigenden Potenzen des Argumentes x laufen, entwickeln lässt. Eine Entwicklung nach steigenden Potenzen des Parameters a ist nicht möglich.

*) S. u. a. Jecklin, Diss. phil. Bern 1901.

**) Leipziger Abhandlungen, Bd. 2, 1852, pag. 252.

Dividiert man die Gleichung (3) durch

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(a+1)}$$

so erhält man durch Nullsetzen des Argumentes für sämtliche Parametergrössen die Beziehung:

$$\left|\frac{\Gamma(a+1)}{\left(\frac{x}{2}\right)^a}\cdot \overset{a}{J}(x)\right|_{x=0} = \lim_{\substack{k=\infty \\ x=0}} F\left(k, k, a+1, -\frac{x^2}{4k^2}\right) = 1 \tag{4}$$

denn nach Gleichung (2) wird:

$$\left|F(a, b, c, x)\right|_{x=0} = 1$$

Die Beziehung (4) wird uns später bei der Bestimmung der Integrationskonstanten sehr gute Dienste leisten. Vorerst sei aber nach den Konvergenzbedingungen unserer speziellen F-Reihe gefragt.

Die hypergeometrische Reihe F (a, b, c, x) konvergiert nach den Untersuchungen von Gauss*) für sämtliche Argumente die kleiner sind als 1. Der Einheitskreis ist Konvergenzkreis, wir haben die Konvergenzbedingung

$$|x| < 1$$

Für die Reihe $\lim\limits_{k=\infty} F\left(k, k, a+1, -\frac{x^2}{4k^2}\right)$

wird diese Bedingung zu

$$\lim_{k=\infty}\left|\frac{x^2}{4k^2}\right| < 1$$

d. h. es konvergiert unsere spezielle F-Reihe für jedes endliche x, der Konvergenzkreis schliesst das gesamte endliche Gebiet in sich ein. Die Funktion $\lim\limits_{k=\infty} F\left(k, k, a+1, -\frac{x^2}{4k^2}\right)$ ist im Gegensatz zur Reihe F (a, b, c, x) im Endlichen nirgends mehr verzweigt und überall stetig. Da aber die Singularität im Punkte

*) Gauss: Ges. Werke III, 1866, pag. 125 ff,

$x = 1$ der Reihe F (a, b, c, x) für den betrachteten Spezialfall ins Unendliche fällt, so wird der unendlich ferne Punkt wegen des Zusammenfallens zweier Pole zur wesentlichen Singularität, von der schon Schläfli*) bemerkte, dass sie schwierigen Charakter trage. Es zeigt sich also, dass die Funktion $\overset{a}{J}(x)$ für jedes endliche x konvergiert, was speziell das Verhalten der Funktion auf dem Konvergenzkreise anbetrifft, so kommt eine diesbezügliche Spezialisierung für den betrachteten Fall wegen des Faktors $\left(\frac{x}{2}\right)^a$ nicht in Frage.

Wenn schon die hypergeometrische Reihe F (a, b, c, x) nur innerhalb des Einheitskreises konvergiert, also zu einer allgemeinen Darstellung der Funktion, dieses Element F (a, b, c, x) einer analytischen Fortsetzung bedarf, fällt die Notwendigkeit einer solchen für die spezielle Reihe $\lim\limits_{k=\infty} F\left(k, k, a+1, -\frac{x^2}{4k^2}\right)$ zum vorneherein dahin, da hier das ganze endliche Gebiet durch den Konvergenzkreis umschlossen wird. Rein formell lässt sich natürlich auch hier, entsprechend derjenigen von F (a, b, c, x), eine analytische Fortsetzung durchführen. Man erhält auf diese Art unbestimmte Symbole, die sich schwerlich in endliche Formen überführen lassen werden. Bei der allgemeinen Betrachtung der Differentialgleichung und deren Integrale wird darüber noch weiteres angeführt werden müssen.

Gleichung (3) liefert auch für alle endlichen Werte von a einen endlichen Funktionswert. Ist speziell a negativ ganzzahlig, so werden die Nullstellen der reziproken Gammafunktion durch das Unendlichwerden der F-Reihe gehoben, denn das unbestimmte Symbol, das für solche Werte von a entsteht, lässt sich leicht durch blosses Ausrechnen unter Berücksichtigung der Formel

$$a\,\Gamma(a) = \Gamma(a+1)$$

bestimmen.

Auf diese Art stösst man auch auf die bekannte Formel

$$\overset{-n}{J}(x) = (-1)^n \overset{n}{J}(x) \qquad n = \text{ganze Zahl.}$$

**) Schläfli, Math. Annalen, Bd. 3, pag. 136.

§ 2. Eigenschaften der Funktion $\overset{a}{J}(x)$.

Gauss*) hat in seinem Werke «Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \ldots$» die hauptsächlichsten Eigenschaften der F-Reihe hergeleitet, aus denen man vermittelst der Formel (3) die rechnerischen Grundeigenschaften der Bessel'schen Funktion $\overset{a}{J}(x)$ leicht als Spezialfälle ermitteln kann.

So fand Gauss, dass

$$\frac{d\,F(a, b, c, x)}{d\,x} = \frac{a \cdot b}{c} \cdot F(a+1, b+1, c+1, x) \tag{5}$$

ist. Diese Formel auf Gleichung (3) angewendet ergibt:

$$\frac{d\,\overset{a}{J}(x)}{d\,x} = \lim_{k=\infty} \frac{d}{d\,x} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(a+1)} F\left(k, k, a+1, -\frac{x^2}{4\,k^2}\right)$$

$$= \lim_{k=\infty} \left\{ \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a-1}}{\Gamma(a+1)} \cdot F\left(k, k, a+1, -\frac{x^2}{4\,k^2}\right) \right.$$

$$\left. - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(a+1)} \cdot \frac{k^2}{(a+1)} \cdot \frac{x}{2\,k^2} \cdot F\left(k+1, k+1, a+2, -\frac{x^2}{4\,k^2}\right) \right\}$$

da nun $(a+1)\,\Gamma(a+1) = \Gamma(a+2)$

ist, wird

$$\frac{d\overset{a}{J}(x)}{d\,x} = \lim_{k=\infty} \left\{ \frac{a}{x} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(a+1)} \cdot F\left(k, k, a+1, -\frac{x^2}{4\,k^2}\right) \right.$$

$$\left. - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+1}}{\Gamma(a+2)} \cdot F\left(k, k, a+2, -\frac{x^2}{4\,k^2}\right) \right\}$$

*) Werke, III, pag. 125 ff.

und nach (3) ergibt sich daraus

$$\text{I.} \qquad \frac{d\overset{a}{J}(x)}{dx} = \frac{a}{x}\overset{a}{J}(x) - \overset{a+1}{J}(x)$$

Hypergeometrische Reihen, deren drei Elemente a, b, c sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, nennt Gauss verwandte F-Funktionen. Irgend drei solche Funktionen sind stets durch eine lineare Relation von der Form

$$A_1 F_1 + A_2 F_2 + A_3 F_3 = 0$$

verbunden, wo A_1, A_2 und A_3 rationale Funktionen von x bedeuten.

Gauss hat sämtliche, durch obige Form möglichen Gleichungen berechnet und fand deren 15. Von diesen Gleichungen kommen zur Untersuchung der Funktion $\overset{a}{J}(x)$ in erster Linie diejenigen in Betracht, bei denen das dritte Element, d. h. der Parameter a sich um ganze Zahlen verändert. Die diesem Fall entsprechende Gauss'sche Gleichung lautet:

$$\begin{aligned} c\{c-1-(2c-a-b-1)x\}\, F(a,b,c,x) \\ +(c-a)(c-b)\,x\,F(a,b,c+1,x) \\ -c(c-1)(1-x)\,F(a,b,c-1,x) = 0 \end{aligned}$$

Für $F(a,b,c,x): \lim\limits_{k=\infty} F\left(k,k,a+1,-\frac{x^2}{4k^2}\right)$ gesetzt, ergibt

$$\lim_{k=\infty}\Bigg\{(a+1)\left[a+[2(a-k)+1]\frac{x^2}{4k^2}\right]F\left(k,k,a+1,-\frac{x^2}{4k^2}\right)$$

$$-(a+1-k)^2\frac{x^2}{4k^2}F\left(k,k,a+2,-\frac{x^2}{4k^2}\right)-a(a+1)\left(1+\frac{x^2}{4k^2}\right)$$

$$F\left(k,k,a,-\frac{x^2}{4k^2}\right)\Bigg\}=0$$

$$\lim_{k=\infty}\left\{a(a+1)\,F\left(k,k,a+1,-\frac{x^2}{4k^2}\right)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{x}{2}\right)^2 F\left(k,k,a+2,-\frac{x^2}{4k^2}\right)-a(a+1)\,F\left(k,k,a,-\frac{x^2}{4k^2}\right)\right\}=0$$

multipliziert man diese Gleichung mit $\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a-1}}{\Gamma(a+2)}$

und berücksichtigt man, dass

$$a(a+1)\,\Gamma(a)=\Gamma(a+2)$$

so erhält man

$$\lim_{k=\infty}\left\{\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a-1}}{\Gamma(a)}F\left(k,k,a+1,-\frac{x^2}{4k^2}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+1}}{\Gamma(a+2)}F\left(k,k,a+2,-\frac{x^2}{4k^2}\right)-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a-1}}{\Gamma(a)}F\left(k,k,a,-\frac{x^2}{4k^2}\right)\right\}=0$$

nun ist nach (3)

$$\overset{a}{J}(x)=\lim_{k=\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a}}{\Gamma(a+1)}\,F\left(k,k,a+1,-\frac{x^2}{4k^2}\right)$$

daher wird die obige Gleichung zu

$$\frac{2a}{x}\overset{a}{J}(x)-\overset{a+1}{J}(x)-\overset{a-1}{J}(x)=0$$

oder

II. $$\overset{a-1}{J}(x)+\overset{a+1}{J}(x)=\frac{2a}{x}\overset{a}{J}(x)$$

nimmt man dazu die frühere Gleichung I

I. $$\frac{d\overset{a}{J}(x)}{dx}=\frac{a}{x}\overset{a}{J}(x)-\overset{a+1}{J}(x)$$

so erhält man durch Subtraktion (I — II)

$$\text{III.} \qquad \frac{d\overset{a}{J}(x)}{dx} = -\frac{a}{x}\overset{a}{J}(x) + \overset{a-1}{J}(x)$$

durch Addition von I und III wird ferner

$$\text{IV.} \qquad \overset{a-1}{J}(x) - \overset{a+1}{J}(x) = 2\frac{d\overset{a}{J}(x)}{dx}$$

Dies sind die bekannten vier Funktionalgleichungen, durch die die Zylinderfunktionen meist definiert werden.*)

Der Vollständigkeit halber sei hier noch erwähnt, dass mit Hilfe der Formel

$$F(a, b, c, 1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}$$

die Funktion $\overset{a}{J}(x)$ für unendlich grosse Argumente geschätzt werden kann. Auch in den Kettenbruchentwicklungen lässt sich die Bessel'sche Funktion erster Art leicht als spezielle hypergeometrische Funktion erkennen.

II. Kapitel.

Die Differentialgleichung.

§ 3. Definitionsbemerkungen.

Im ersten Kapitel wurde auf ganz einfache Art die Bessel'sche Funktion $\overset{a}{J}(x)$ durch eine hypergeometrische Reihe dargestellt, worauf dann aus den allgemeinen Eigenschaften der letzteren die Bessel'sche Funktion als deren Spezialfall untersucht wurde. Vom theoretischen Standpunkte aus, wobei wir hauptsächlich an die in der Einleitung erwähnten Grunddefinitionen denken, bieten diese ersten Betrachtungen wenig, sie basieren auf einer einfachen Schlussweise, die uns über die eigentliche funktionentheoretische Beschaffenheit der Funktion wenig Auskunft gibt.

*) Nielsen: Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, Leipzig 1904.

Ein tiefersehendes Studium der Funktion $\overset{a}{J}(x)$, insbesondere was deren Verwandtschaft mit der hypergeometrischen Funktion anbetrifft, lässt sich bedeutend erfolgreicher und klarer durchführen, wenn die Definitionsdifferentialgleichung an die Spitze gestellt wird.

Aus den im ersten Abschnitte mit I und II bezeichneten Funktionalgleichungen der Zylinderfunktion findet man leicht die in der mathematischen Literatur zuerst bei Bessel*) auftretende, nach ihm benannte Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)y = 0 \tag{1}$$

Um die im folgenden kommenden Bestimmungen der Integrationskonstanten möglichst einfach durchführen zu können, ziehen wir zur Definition der Funktion $\overset{a}{J}(x)$ noch die im ersten Abschnitte unter (4) gefundene Gleichung hinzu, die lautet:

$$\left|\frac{\Gamma(a+1)}{\left(\frac{x}{2}\right)^a} \cdot \overset{a}{J}(x)\right|_{x=0} = 1 \tag{2}$$

d. h. wir definieren die Funktion $\overset{a}{J}(x)$ als dasjenige partikuläre Integral der Differentialgleichung (1), das mit dem Faktor $\dfrac{\Gamma(a+1)}{\left(\frac{x}{2}\right)^a}$ multipliziert für sämtliche Werte des Parameters a zu 1 wird, falls das Argument der Funktion Null gesetzt wird.

§ 4. Herleitung der allgemeinen hypergeometrischen Differentialgleichung. — Die Riemann'sche P-Funktion.

Nach dieser einleitenden Bemerkung zur Definition der Bessel'schen Funktion erster Art müssen wir einiges über die hypergeometrischen Differentialgleichungen vorausschicken, bevor die Gleichung (1) als ein Spezialfall der allgemeinen hypergeometrischen Differentialgleichung, der Differentialgleichung der Riemann'schen P-Funktion, betrachtet werden kann.

*) Werke, I pag. 47.

Schon Euler*) fand, dass sich die Reihe

$$y = F(a, b, c, x)$$

als partikuläres Integral der Differentialgleichung

$$(3) \qquad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + \left\{c - (a+b+1)\,x\right\}\frac{dy}{dx} - a\,b\,y = 0$$

darstellen lässt.

Diese Differentialgleichung kann auf sehr einfache Weise, nach den in der Einleitung erwähnten Methoden, auf direktem Wege durch unendliche Reihen wie durch bestimmte Integrale integriert werden.

In neuerer Zeit stellte sich nun aber heraus, dass die hypergeometrische Reihe

$$y = F(a, b, c, x)$$

als Definition der hypergeometrischen Funktion wenig zulässig erscheint. Besonders darum, weil man heute bei Funktionen, die sich durch Differentialgleichungen definieren lassen, nicht nur ein bestimmtes partikuläres Integral ins Auge fasst, sondern allgemein jedwelche mögliche Lösung der betreffenden Differentialgleichung als eine diesbezügliche Funktion auffasst.

Man definiert daher heute als hypergeometrische Funktion allgemein die obige Reihe, noch multipliziert mit einer Potenz von x, einer solchen von (1 — x) und einer von x unabhängigen willkürlichen Konstanten, nämlich

$$(4) \qquad y = C\,x^{\alpha}\,(1-x)^{\gamma}\,F(a, b, c, x)$$

Aus den beiden ersten Differentialquotienten dieser Funktion ergibt sich durch einfache Koeffizientenvergleichung mit Gleichung (3) die Differentialgleichung, der unsere neue Funktion als partikuläres Integral genügt.

Führt man der Symmetrie des Resultates wegen die folgenden sechs Konstanten ein:

$$(5) \qquad \begin{array}{lll} \alpha = \alpha & \beta = a - \alpha - \gamma & \gamma = \gamma \\ \alpha' = 1 - c + \alpha & \beta' = b - \alpha - \gamma & \gamma' = c - a - b + \gamma \end{array}$$

*) Jecklin, Diss. phil. Bern 1901. pag. 12 ff.

woraus durch Addition folgt, dass

$$(6) \qquad \alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$$

so wird die neue Definitionsdifferentialgleichung:

$$(7) \; x^2 (1-x)^2 \frac{d^2 y}{d x^2} - x(1-x) \Big\{ (\alpha + \alpha' - 1) + (\beta + \beta' + 1) x \Big\} \frac{d y}{d x}$$
$$+ \Big\{ \alpha \alpha' - (\alpha \alpha' + \beta \beta' - \gamma \gamma') x + \beta \beta' x^2 \Big\} y = 0$$

oder unter Berücksichtigung von (6)

$$(8) \qquad \frac{d^2 y}{d x^2} + \left\{ \frac{1-\alpha-\alpha'}{x} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{x-1} \right\} \frac{d y}{d x}$$
$$+ \left\{ -\frac{\alpha \alpha'}{x} + \frac{\gamma \gamma'}{x-1} + \beta \beta' \right\} \frac{y}{x(x-1)} = 0^{*})$$

Dies ist die allgemeine hypergeometrische Differentialgleichung, deren Lösung wir durch die Funktion

$$y = C x^{\alpha} (1-x)^{\gamma} F(a, b, c, x)$$

oder unter Berücksichtigung von (5), durch

$$(9) \quad y = C x^{\alpha} (1-x)^{\gamma} F(\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \beta' + \gamma, 1 + \alpha - \alpha', x)$$

definiert haben.

Es werde nun diese neue Definitionsgleichung (8), in Bezug auf das Verhalten der komplexen Variablen x im Zahlenfelde, des Nähern betrachtet.

Die Differentialgleichung weist in den Punkten

$$x = 0 \qquad x = 1 \qquad x = \infty$$

Stellen singulären Charakters auf, denn für diese Werte werden die Koeffizienten der Gleichung unendlich gross. Wir sind nun keineswegs an die spezielle Differentialgleichung (8) gebunden, sondern wir suchen der Vollkommenheit halber, die drei singu lären Punkte derselben allgemein zu definieren, indem wir die zu Gleichung (8) analoge Differentialgleichung zu konstruieren suchen, die in Bezug auf ihre Koeffizienten die Unstetigkeitsstellen

$$x = a, \qquad x = b, \qquad x = c$$

aufweist.

---

*) S. u. a. Klein, hypergeometrische Funktion.

Diese verallgemeinerte Differentialgleichung erhält man durch die Substitution:

$$x = \frac{(z - a)(c - b)}{(z - b)(c - a)}$$

oder nach z aufgelöst

$$z = \frac{b(a - c)x - a(b - c)}{(a - c)x - (b - c)}$$

aus welchen beiden Gleichungen der Uebergang der Pole 0 ∞ 1 in a b c rasch ersichtlich ist. Fürdie Differentialgleichung (8) erhält man dann die Form*):

$$(10) \quad \frac{d^2y}{dz^2} + \left\{ \frac{1 - \alpha - \alpha'}{z - a} + \frac{1 - \beta - \beta'}{z - b} + \frac{1 - \gamma - \gamma'}{z - c} \right\} \frac{dy}{dz}$$

$$+ \left\{ \frac{\alpha\alpha'(a - b)(a - c)}{z - a} + \frac{\beta\beta'(b - a)(b - c)}{z - b} + \frac{\gamma\gamma'(c - a)(c - b)}{z - c} \right\}$$

$$\frac{y}{(z - a)(z - b)(z - c)} = 0$$

Diese Differentialgleichung ist nun im Gegensatze zu (8) in Bezug auf die Konstanten $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ ganz symmetrisch gebaut, und zwar gehören zu dem Pole a die Konstanten $\alpha\alpha'$ zu b .... $\beta\beta'$ und zu c .... $\gamma\gamma'$.

Als Lösung obiger Differentialgleichung erhält man nun die durch Riemann**), allerdings auf ganz andere Art definierte P-Funktion

$$(11) \qquad y = P \left| \begin{array}{cccc} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{array} \right|$$

Setzt man

$$a = 0 \qquad b = \infty \qquad c = 1$$

*) Papperitz, Math. Annalen, Bd. 25.

**) Riemann, Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe F (a, b, c, x) darstellbaren Funktion. Werke pag. 62 ff.

so wird die Funktion zu

$$(12) \qquad y = P \begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{vmatrix}$$

und dies ist die Lösung der Differentialgleichung (8).

Aus dieser speziellen P-Funktion, die Riemann noch einfacher mit

$$(13) \qquad y = P \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x \end{vmatrix}$$

bezeichnet, deren einzelne Funktionszweige sich alle durch hypergeometrische Reihen darstellen lassen, folgt indirekt, dass die allgemeine P-Funktion (11) als Lösung der Differentialgleichung (10) definiert werden darf.

Die Konstanten α, α'; β, β'; γ, γ' nennt man die Exponenten der P-Funktion und zwar treten dieselben wie schon bemerkt stets paarweise auf, indem jedes Exponentenpaar $\alpha\,\alpha'$, $\beta\,\beta'$, $\gamma\,\gamma'$ zu den singulären Punkten a, b, c resp. 0, ∞, 1 in gewissen Beziehungen steht. Ferner muss auch für die P-Funktion die frühere Bedingung bestehen bleiben, dass

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$$

ist, des weitern haftet der Riemann'schen Definition noch die Einschränkung an, dass keine der Exponentendifferenzen

$$\alpha - \alpha', \quad \beta - \beta', \quad \gamma - \gamma'$$

eine ganze Zahl sein darf.

§ 5. Zusammenhang der Bessel'schen Differentialgleichung mit der hypergeometrischen. — Darstellung der Funktion $\overset{a}{J}(x)$ als Riemann'sche P-Funktion.

Klein*) findet folgenden Zusammenhang zwischen den Differentialgleichungen (10) und (1)

Setzt man in (10)

$$a = 0, \; b = \infty, \; c = c, \; \alpha = a \text{ und } \alpha' = -a$$

*) Hypergeometrische Funktion, pag. 281 ff.

so erhält man, falls z durch x ersetzt wird:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{x-c} \right\} \frac{d y}{d x} + \left\{ \frac{c a^2}{x} + \beta\beta' + \frac{c\gamma\gamma'}{x-c} \right\} \frac{y}{x(x-c)} = 0$$

oder

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{x-c} \right\} \frac{d y}{d x} + \left\{ \frac{c a^2}{x^2 (x-c)} + \frac{\beta\beta'-\gamma\gamma'}{x(x-c)} + \frac{\gamma\gamma'}{(x-c)^2} \right\} y = 0$$

Nun lasse man c unendlich wachsen, gleichzeitig aber auch die Exponenten γ, γ' und β, β', doch derart dass

$$\beta + \beta', \ \gamma + \gamma' \text{ sowie auch } \beta\beta' - \gamma\gamma'$$

endlich bleiben, ferner soll dabei

$$\lim \frac{\gamma\gamma'}{c^2} = 1$$

sein.

Führt man den genannten Grenzübergang unter Berücksichtigung der angeführten Bedingungen durch, so erhält man die Bessel'sche Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{1}{x} \frac{d y}{d x} + \left\{ 1 - \frac{a^2}{x^2} \right\} y = 0 \tag{14}$$

oder in der Form von Anger*)

$$x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} + x \frac{d y}{d x} + (x^2 - a^2) y = 0 \tag{15}$$

Die hypergeometrische Differentialgleichung geht somit in die Bessel'sche über, wenn die singulären Punkte 1 und ∞ der erstern im Unendlichen zusammenfallen, wenn also der Horizont zum wesentlich singulären Punkte der Differentialgleichung wird. Die Bessel'sche Differentialgleichung ist somit ein Grenzfall der hypergeometrischen.

---

*) Anger, Untersuchungen über die Funktion $\overset{h}{J}_k$, Danzig 1855.

Weil sich Gleichung (15) als Spezialfall von (10) geben lässt, ist auch deren Lösung, die Bessel'sche Funktion $\overset{a}{J}(x)$ durch eine Riemann'sche P-Funktion darstellbar. Diese Darstellung hat schon Olbricht*) allerdings auf ganz andern Wegen, vorgenommen.

Bezeichnet man mit v eine zum Unendlichgrosswerden bestimmte Zahl, so kann

$$c = \pm v$$

gesetzt werden, es ergeben sich für beide Vorzeichen gleiche Resultate. Ferner müssen die Grössen γ und γ' sowie auch β und β', falls sie unendlich gross gedacht werden, deren Summen aber endlich sein sollen, unbedingt entgegengesetztes Vorzeichen haben. Damit nun aber das Produkt im Zähler des Grenzwertes

$$\lim \frac{\gamma\gamma'}{c^2} = 1$$

positiv ist, müssen die Exponenten γ und γ' imaginär sein. Das gleiche gilt für die Exponenten β und β', da auch

$$\beta\beta' - \gamma\gamma'$$

endlich bleiben soll.

Man erhält deshalb für die Grössen der P-Funktionsdarstellung der Bessel'schen Transcendenten:

$$\lim_{v=\infty} \left\{ \begin{matrix} \alpha = a & \beta = i\,v & \gamma = i\,v & b = \infty \\ \alpha' = -a & \beta' = -i\,v & \gamma' = -i\,v & c = \pm v \end{matrix} \right\}$$

weshalb sich nach (11) als Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung folgende P-Funktion ergibt:

$$y = \lim_{v=\infty} P \left| \begin{matrix} 0 & \infty & \pm v & \\ a & i\,v & i\,v & x \\ -a & -i\,v & -i\,v & \end{matrix} \right| \tag{16}$$

Man trachte nun danach diese spezielle P-Funktion in hypergeometrischen Reihen darzustellen. Zu diesem Zwecke

*) Olbricht, Diss. phil. Leipzig 1887.

muss die Funktion einer Transformation unterworfen werden, wonach die Verzweigungspunkte

$$\lim_{v=\infty} \quad 0 \quad \infty \quad \pm v$$

übergehen in die Werte

$$0 \quad \infty \quad 1$$

Viele von uns angestellte Transformationsversuche zeigten, dass eine einfache Transformation auf direkten Wegen sich hier kaum finden lässt. Wir kehren deshalb noch einmal zu der allgemeinen hypergeometrischen Differentialgleichung (10) zurück und leiten daraus die Bessel'sche Gleichung auf ganz andere Art her, indem wir nämlich an den Zusammenhang der Bessel'schen Funktionen mit den Kugelfunktionen denken. Die auf diese Weise hervorgehende P-Funktion lässt sich dann sehr leicht transformieren, worauf sich eine Darstellung durch hypergeometrische Reihen rasch finden lässt.

Setzt man in Gleichung (10)

$$z = \cos\frac{x}{n}$$

so werden die Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{n}{\sin\frac{x}{n}} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \left\{\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{n} \operatorname{cotg}\frac{x}{n}\right\} \frac{n^2}{\sin^2\frac{x}{n}}$$

Geben wir nun den Verzweigungspunkten

$$a \quad b \quad c$$

die Werte $\quad -1 \quad n \quad +1$

so geht (10) über in:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \left\{\frac{1-\alpha-\alpha'}{\cos\frac{x}{n}+1} + \frac{1-\beta-\beta'}{\cos\frac{x}{n}-n} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{\cos\frac{x}{n}-1}\right\} \frac{\sin\frac{x}{n}}{n} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{1}{n} \operatorname{cotg}\frac{x}{n} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$+\left\{\frac{2\alpha\alpha'(1+n)}{\cos\frac{x}{n}+1}+\frac{\beta\beta'(n^2-1}{\cos\frac{x}{n}-n}+\frac{2\gamma\gamma'(1-n)}{\cos\frac{x}{n}-1}\right\}\frac{\sin^2\frac{x}{n}}{n^2}\times$$

$$\times\frac{y}{(\cos\frac{x}{n}+1)\,(\cos\frac{x}{n}-n)\,(\cos\frac{x}{n}-1)}=0$$

Zur Grenze $\lim n=\infty$ übergegangen ergibt, falls die Exponentensummen $\alpha+\alpha'$ und $\beta+\beta'$ endlich bleiben,

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2(1-\gamma-\gamma')}{x}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dx}+\left\{\frac{\alpha\alpha'}{n^2}-\frac{\beta\beta'}{n^2}+\frac{4\gamma\gamma'}{n^2}\right\}y=0$$

Setzt man nun

$$\alpha=\gamma=\frac{a}{2}, \qquad \alpha'=\gamma'=-\frac{a}{2}$$

und lässt man ferner die Exponenten β und β' unendlich wachsen, doch derart, dass deren Summe

$$\beta+\beta'=1$$

ist, so erhält man wiederum die Bessel'sche Differentialgleichung, nämlich

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)y=0$$

deren Lösung sich nun als folgende P-Funktion ergibt:

$$(17) \qquad y=\lim_{n=\infty} P\left|\begin{matrix} -1 & \infty & +1 & \\ \frac{a}{2} & n & \frac{a}{2} & \cos\frac{x}{n} \\ -\frac{a}{2} & -n+1 & -\frac{a}{2} & \end{matrix}\right|$$

In dieser Funktion sind zwei Exponentendifferenzen einander gleich. Solche P-Funktionen definiert Klein*) direkt als Kugelfunktionen, da sie stets auf solche führen. Auf diese Weise ergibt sich sehr einfach das Verwandtschaftsverhältnis zwischen den Bessel'schen- und Kugelfunktionen.

*) Klein, hypergeometrische Funktionen, pag. 219.

Riemann*) fand nun, dass sich P-Funktionen, in denen zwei Exponentendifferenzen einander gleich sind, durch 144 hypergeometrische Reihen darstellen lassen, wo je $^1/_3$, also 48 Entwicklungen um einen Verzweigungspunkt Geltung haben. Jeder der sechs Zweige der Funktion

$$P^{\alpha}\,P^{\alpha'}\quad P^{\beta}\,P^{\beta'}\quad P^{\gamma}\,P^{\gamma'}$$

liefert 24 Entwicklungen, wo diejenigen für $P^{\alpha}P^{\alpha'}$ resp. $P^{\beta}P^{\beta'}$ resp. $P^{\gamma}P^{\gamma'}$ in der Umgebung der Pole a resp. b resp. c konvergieren werden.

Die früher als Integral der Bessel'schen Differentialgleichung gefundene P-Funktion (16)

$$y = \lim_{\nu=\infty} P \begin{vmatrix} o & \infty & \nu & \\ a & i\nu & i\nu & x \\ -a & -i\nu & -i\nu & \end{vmatrix}$$

zeigt nun aber, dass von den 144 Reihendarstellungen zum Vorneherein $^2/_3$ wegfallen, denn die Pole b und c obiger Funktion fallen im Unendlichen zusammen, es entsteht eine wesentliche, singuläre Stelle, um die eine Entwicklung nicht existieren kann. Eine Darstellung der Funktionszweige P^{β}, $P^{\beta'}$, P^{γ}, $P^{\gamma'}$ ist nicht möglich. Aus der zweiten Darstellung ist ferner ersichtlich, dass eine Vertauschung der Exponentenpaare unter sich keine neuen Reihendarstellungen liefert, wie leicht durch Ausrechnung gezeigt werden kann. Die noch existierenden 48 Entwicklungen werden deshalb nochmals um $^1/_4$ reduziert, so dass schliesslich noch 12 hypergeometrische Reihen zur Darstellung unserer P-Funktion verbleiben. Diese 12 Reihen können vorläufig bloss als Symbole betrachtet werden, wie schon Olbricht**) bemerkt hat. Lassen sich die Grenzübergänge vollziehen, so erhält man durch passende Bestimmung der Integrationskonstanten Reihendarstellungen für die zwei partikulären Integrale $\overset{a}{J}(x)$ und $\overset{-a}{J}(x)$. Den einfachsten dieser Grenzübergänge, der zu einer wirklichen Reihendarstellung führt, wollen wir hier vornehmen.

*) Werke, pag. 73.

**) Diss. phil. Leipzig, 1887.

Nach Riemann*) gilt für P-Funktionen, deren zwei Exponentendifferenzen einander gleich sind, die Transformation

$$P\left|\begin{matrix} -1 & \infty & +1 & \\ \gamma & \beta & \gamma & x \\ \gamma' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right| = P\left|\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \frac{\beta}{2} & \gamma & x^2 \\ \frac{1}{2} & \frac{\beta'}{2} & \gamma' & \end{matrix}\right|$$

dies auf die Funktion (18) angewendet, ergibt:

$$(19)\quad y = \lim_{n=\infty} P\left|\begin{matrix} -1 & \infty & +1 & \\ \frac{a}{2} & n & \frac{a}{2} & \cos\frac{x}{n} \\ -\frac{a}{2} & -n & -\frac{a}{2} & \end{matrix}\right| = \lim_{n=\infty} P\left|\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \frac{n}{2} & \frac{a}{2} & \cos^2\frac{x}{n} \\ \frac{1}{2} & -\frac{n}{2} & -\frac{a}{2} & \end{matrix}\right|$$

und dies wird zu, da $\lim\limits_{n=\infty} \cos^2\frac{x}{n} = 1 - \frac{x^2}{n^2}$

$$y = \lim_{n=\infty} P\left|\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \frac{n}{2} & \frac{a}{2} & \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) \\ \frac{1}{2} & -\frac{n}{2} & -\frac{a}{2} & \end{matrix}\right|$$

durch Vertauschung der Pole 0 und 1 ergibt sich

$$(20)\qquad y = \lim_{n=\infty} P\left|\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ \frac{a}{2} & \frac{n}{2} & 0 & \frac{x^2}{n^2} \\ -\frac{a}{2} & -\frac{n}{2} & \frac{1}{2} & \end{matrix}\right|$$

Die zwei in der Umgebung von a voneinander unabhängigen Zweige P^{α} und $P^{\alpha'}$ der Funktion

$$P\left|\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right|$$

*) Werke, pag. 71.

lauten nun in Form von hypergeometrischen Reihen

$$(21)\left\{\begin{array}{l} y_1 = P^{\alpha} = C\,x^{\alpha}\,(1-x)^{\gamma}\,F\,(\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta'+\gamma, 1+\alpha-\alpha', x) \\ y_2 = P^{\alpha'} = C'\,x^{\alpha'}\,(1-x)^{\gamma}\,F\,(\alpha'+\beta+\gamma, \alpha'+\beta'+\gamma, 1-\alpha+\alpha', x) \end{array}\right.$$

hierin die Werte von (20) eingesetzt, ergibt

$$y_1 = \lim_{n=\infty} C \left(\frac{x^2}{n^2}\right)^{\frac{a}{2}} F\left(\frac{a}{2}+\frac{n}{2}, \frac{a}{2}-\frac{n}{2}, a+1, \frac{x^2}{n^2}\right)$$

$$y_2 = \lim_{n=\infty} C' \left(\frac{x^2}{n^2}\right)^{-\frac{a}{2}} F\left(-\frac{a}{2}+\frac{n}{2}, -\frac{a}{2}-\frac{n}{2}, 1-a, \frac{x^2}{n^2}\right)$$

nun kann gesetzt werden:

$$\lim_{n=\infty} F\left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}, a+1, \frac{x^2}{n^2}\right) = \lim_{n=\infty} F\left(n, n, a+1, -\frac{x^2}{4n^2}\right)$$

somit ergeben sich folgende zwei, voneinander unabhängige partikuläre Lösungen der Bessel'schen Differentialgleichung

$$(22)\quad\begin{array}{l} y_1 = \lim\limits_{n=\infty} C_1\,x^{a}\,F\left(n, n, a+1, -\dfrac{x^2}{4n^2}\right) \\ y_2 = \lim\limits_{n=\infty} C_2\,x^{-a}\,F\left(n, n, 1-a, -\dfrac{x^2}{4n^2}\right) \end{array}$$

wie ersichtlich, geht y_1 in y_2 über, falls a durch $-a$ ersetzt wird.

Bedenken wir nun, dass am Anfang dieses Kapitels die Bessel'sche Funktion erster Art als dasjenige partikuläre Integral der Bessel'schen Differentialgleichung definiert wurde, für das nach Gleichung (2)

$$\left|\frac{\Gamma(a+1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{a}}\cdot y\right|_{x=0} = 1$$

ist, so ergibt sich danach für die erste der zwei Gleichungen (22) für C_1

$$\left| \frac{\Gamma(a+1) \cdot C_1 x^a}{\left(\frac{x}{2}\right)^a} \cdot F\left(n, n, a+1, -\frac{x^2}{4n^2}\right) \right|_{x=0} = 1$$

$$C_1 = \frac{1}{2^a} \cdot \frac{1}{\Gamma(a+1)}$$

analog wird

$$C_2 = \frac{1}{2^{-a}} \cdot \frac{1}{\Gamma(1-a)}$$

und es resultieren durch Einsetzen der Werte C_1 resp. C_2 in (22) die bekannten Funktionen

$$\overset{a}{J}(x) = \lim_{n=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(a+1)} F\left(n, n, a+1, -\frac{x^2}{4n^2}\right)$$

(23)

$$\overset{-a}{J}(x) = \lim_{n=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-a}}{\Gamma(1-a)} F\left(n, n, 1-a, -\frac{x^2}{4n^2}\right)$$

Das allgemeine Integral wird unter Zuziehung zweier willkürlicher Integrationskonstanten durch die Form gegeben

(24) $$Y = c \overset{a}{J}(x) + c_1 \overset{-a}{J}(x)$$

Hiebei bleibt zu berücksichtigen, dass diese Darstellung nur für gebrochene Parameter gilt, denn in den P-Funktionen (16) und (17) dürfen laut Definition die Exponentendifferenzen nicht ganzzahlig sein.

Die spezielle Betrachtung für ganzzahlige Parameter fordert die Einführung der Neumann'schen Funktion $\overset{n}{Y}(x)$ resp. der Schläfli'schen $\overset{n}{K}(x)$ Funktion als zweites partikuläres Integral der Differentialgleichung.

III. Kapitel.

Die Integraldarstellung.

§ 6. Integraldarstellung der Riemann'schen P-Funktion.

Die gewöhnliche hypergeometrische Differentialgleichung

$$(1) \quad x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} - \left\{c-(a+b+1)x\right\}\frac{dy}{dx} + a\cdot b\cdot y = 0$$

lässt sich sofort durch die in der Einleitung betrachtete Methode durch bestimmte Integrale integrieren. Setzt man nämlich:

$$x(x-1) = Q(x);\ (x-1)(1+a-c) + x(c-b) = R(x)$$
$$\text{und } 1-a=\xi$$

so erhält man die bekannte Differentialgleichung:

$$(2) \qquad Q(x)\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - (\xi-2)\cdot Q'(x)\frac{dy}{dx}$$
$$+\frac{(\xi-2)(\xi-1)}{1\cdot 2}Q''(x)\cdot y - R(x)\frac{dy}{dx} + (\xi-1)R'(x)\cdot y = 0$$

deren Lösung sich durch das Integral

$$(3) \qquad y = \int_g^h u^{a-c}(u-1)^{c-b-1}(u-x)^{-a}\,du$$

geben lässt, falls die reellen Komponenten der Exponenten positiv gedacht werden und wo die Grenzen zwischen den Werten

$$0 \quad 1 \quad x \text{ und } \infty$$

beliebig gewählt werden dürfen.

Die partikulären Integrale der allgemeinen hypergeometrischen Differentialgleichung mit den singulären Stellen 0,1 und ∞

$$(4) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \left\{\frac{1-\alpha-\alpha'}{x} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{x-1}\right\}\frac{dy}{dx}$$
$$+\left\{-\frac{\alpha\alpha'}{x} + \frac{\gamma\gamma'}{x-1} + \beta\beta'\right\}\frac{y}{x(x-1)} = 0$$

die sich von denjenigen der gewöhnlichen hypergeometrischen Differentialgleichung (2) nur dadurch unterscheiden, dass sie noch mit den Faktoren $C x^{\alpha} (1-x)^{\gamma}$ multipliziert sind, werden daher nach (3)

$$(5) \qquad y = C x^{\alpha} (1-x)^{\gamma} \int_{g}^{h} u^{a-c} (u-1)^{c-b-1} (u-x)^{-a} \, du$$

wo je nach Wahl der Grenzen zwischen den Grössen

$$0 \qquad 1 \qquad x \quad \text{und} \quad \infty$$

andere Funktionszweige entstehen.

Unter Berücksichtigung der Formeln (5) und (6) des zweiten Kapitels wird (5) zu:

$$(6) \qquad y = C x^{\alpha} (1-x)^{\gamma} \int_{g}^{h} u^{\alpha'+\beta+\gamma-1} (u-1)^{-\alpha'-\beta'-\gamma} (u-x)^{-\alpha-\beta-\gamma} \, du$$

Aus (4) erhält man bekanntlich die allgemeine hypergeometrische Differentialgleichung der P-Funktion

$$(7) \qquad \frac{d^2 y}{d z^2} + \left\{ \frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{z-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c} \right\} \frac{dy}{dz}$$

$$+ \left\{ \frac{\alpha\alpha' (a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{\beta\beta' (b-a)(b-c)}{z-b} + \frac{\gamma\gamma' (c-a)(c-b)}{z-c} \right\}$$

$$\frac{y}{(z-a)(z-b)(z-c)} = 0$$

durch die Substitution:

$$x = \frac{z-a}{z-b} \cdot \frac{c-b}{c-a}$$

Da

$$1 - x = \frac{z-c}{z-b} \cdot \frac{b-a}{c-a}$$

ergibt sich nach (6) als Lösung von (7) das Integral:

$$y = C (c-b)^{\alpha} (b-a)^{\gamma} (c-a)^{-\alpha-\gamma} (z-a)^{\alpha} (z-b)^{-\alpha-\gamma} (z-c)^{\gamma}$$

$$\int_{g}^{h} u^{\alpha'+\beta+\gamma-1} (u-1)^{-\alpha'-\beta'-\gamma} \left(u - \frac{z-a}{z-b} \cdot \frac{c-b}{c-a} \right)^{-\alpha-\beta-\gamma} du$$

oder, falls die konstanten Grössen in die Konstante genommen werden,

$$y = C_1 (z-a)^{\alpha} (z-b)^{-\alpha-\gamma} (z-c)^{\gamma}$$

$$\int_g^h u^{\alpha'+\beta+\gamma-1} (u-1)^{-\alpha'-\beta'-\gamma} \left(u - \frac{z-a}{z-b} \cdot \frac{c-b}{c-a}\right)^{-\alpha-\beta-\gamma} du$$

Setzt man

$$u = \frac{u_1 - a}{u_1 - b} \cdot \frac{c-b}{c-a}$$

so wird

$$u - 1 = \frac{u_1 - c}{u_1 - b} \cdot \frac{a-b}{c-a}; \; u - \frac{z-a}{z-b} \cdot \frac{c-b}{c-a} = \frac{c-b}{c-a} \cdot \frac{z-u_1}{u_1-b} \cdot \frac{b-a}{z-b}$$

$$du = \frac{(c-b)(a-b)}{(c-a)} \cdot \frac{du_1}{(u_1-b)^2}$$

An Stelle der Grenzen	0	1	∞	x
treten	a	c	b	z

Alle diese Werte eingesetzt, ergibt, falls wiederum alle konstanten Grössen in der Integrationskonstanten aufgenommen werden

$$y = C_2 (z-a)^{\alpha} (z-b)^{\beta} (z-c)^{\gamma} \int_g^h (u_1-a)^{-\alpha-\beta'-\gamma'} (u_1-b)^{-\alpha'-\beta-\gamma'}$$
$$(u_1-c)^{-\alpha'-\beta'-\gamma} (z-u_1)^{-\alpha-\beta-\gamma} du_1$$

oder

$$(8) \quad y = C_3 (z-a)^{\alpha} (z-b)^{\beta} (z-c)^{\gamma} \int_g^h (u-a)^{-\alpha-\beta'-\gamma'} (u-b)^{-\alpha'-\beta-\gamma'}$$
$$(u-c)^{-\alpha'-\beta'-\gamma} (u-z)^{-\alpha-\beta-\gamma} du$$

Je nachdem nun die Grenzen g und h zwischen den Grössen a, b, c und z gewählt werden, erhält man den einen oder andern Zweig der Riemann'schen P-Funktion

$$y = P \left| \begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix} \right|$$

Da die Summe der Exponenten

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$$

ist, ergibt sich, dass die Summe der Exponenten des Integrandes in (8) $S = -2$ sein muss.

§ 7. Bemerkungen zu diesem Integrale.

Das in Gleichung (8) auftretende Integral lässt sich allgemein in der Form geben:

$$(9)\quad S = \int_g^h (u-a)^{A-1}(u-b)^{B-1}(u-c)^{C-1}(u-d)^{D-1}\,du^{*)}$$

wo die Grenzen zwei der Grössen a, b, c, d bedeuten und die Summe der Exponenten

$$(10)\qquad A + B + C + D = 2$$

ist.

Das Integral (9) ist nun nichts anderes als das, nach Klein**) so bezeichnete allgemeine Euler'sche Integral vierter Ordnung. Die Untersuchung der Bessel'schen Integrale als spezielle Formen der hypergeometrischen Funktionen führt demnach auf den Zusammenhang der ersteren mit den Euler'schen Integralen.

Aus der Bedingung (10) ist ersichtlich, dass stets mindestens einer der vier Exponenten eine positive reelle Komponente besitzen muss, dass aber auch anderseits nie alle vier Exponenten zugleich positiv sein können. Man ist daher auf alle Fälle

*) Schläfli, Ueber die Gauss'sche Reihe. Math. Annalen, Bd. 3.

**) Klein, Hypergeometrische Funktion.

gezwungen, freie Integrationswege zu betrachten. Da nun zufolge (10) stets mindestens einer der Exponenten positiv sein muss, so liegt immer einer der Punkte a, b, c, d derart, dass die Variable in ihn geführt werden kann, d. h. irgendwo anfangend hat S hier einen endlichen Wert. Man kann nun von diesem Punkte aus um jeden der andern Verzweigungspunkte eine Schleife als Integrationslinie in rechtläufigem Sinne wählen. Ist z. B. die recp. A positiv, so können wir von a aus als Ausgangspunkt die Variable um jeden der Pole b, c, d führen; diese drei Schleifen entsprechen dann einer Schleife von a aus, die sämtliche andern Verzweigungspunkte in sich enthält. Letztere wird aber, da der Horizont für S als ein gewöhnlicher Punkt bezeichnet werden darf, zu Null. Daraus erhalten wir den Satz, dass höchstens zwei der gesamten Integrale voneinander unabhängig sind. Durch diese beiden Integrale kann man jedes andere, noch mögliche bestimmte Integral linear und homogen ausdrücken.

Kann die Variable in keinen der beiden Grenzpunkte des Weges geführt werden, so bedient man sich entweder solcher Wege, auf denen der Integrand nachdem die betreffenden Verzweigungspunkte umlaufen wurden, wieder den Anfangswert annimmt. d. h. geschlossener Wege wie z. B. Doppelumläufe, oder man betrachtet auf irgend einer Verbindungslinie der zwei Verzweigungspunkte einen Punkt, von dem als Ausgangspunkt zwei Schleifen, je um einen der Verzweigungspunkte gelegt werden. Dabei wird natürlich vorausgesetzt, dass auf der betreffenden Verbindungslinie keine weiteren Verzweigungspunkte liegen. Betrachtet man daher die Punkte a und b, so hat man folgendes Bild:

1)

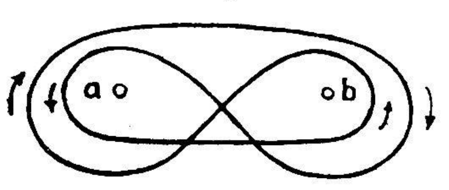


Fig. 1.

2)

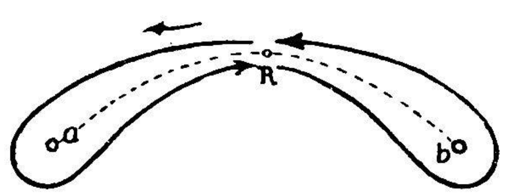


Fig. 2.

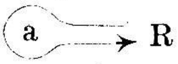
Von einer näheren Untersuchung des Doppelumlaufes sehen wir hier ab, hingegen betrachten wir den Fall (2). Es sei:

$$T = \int_c (u-a)^{A-1} (u-b)^{B-1} (u-c)^{C-1} (u-d)^{D-1} \, du$$

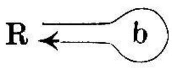
wo c den Weg (2) darstellen soll.

Denkt man sich die Verbindungslinie a b in die Realitätsgerade gelegt, so wird

$$T = \int (u-a)^{A-1} (u-b)^{B-1} (u-c)^{C-1} (u-d)^{D-1} \, du$$



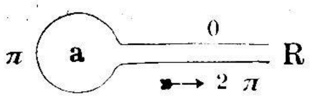
$$+ \int (u-a)^{A-1} (u-b)^{B-1} (u-c)^{C-1} (u-d)^{D-1} \, du$$



$$= U + V$$

Wird der Weg auf die Realitätsgerade zusammengezogen und dem Erkennungsort die Phase π gegeben, so erhält man:

$$U = \int (u-a)^{A-1} (u-b)^{B-1} (u-c)^{C-1} (u-d)^{D-1} \, du$$



Hinweg: Phase $= 0$:

$$\text{Integral} \int_R^a (u-a)^{A-1} (u-b)^{B-1} (u-c)^{C-1} (u-d)^{D-1} \, du$$

Rückweg: Phase $= 2\pi$:

$$\text{Integral } e^{2 i \pi A} \int_a^R (u-a)^{A-1} (u-b)^{B-1} (u-c)^{C-1} (u-d)^{D-1} \, du$$

daher

$$U = (1 - e^{2 i \pi A}) \int_R^a (u-a)^{A-1} (u-b)^{B-1} (u-c)^{C-1} (u-d)^{D-1} \, du$$

analog wird

$$V = (1 - e^{2i\pi B}) \int_R^b (u-a)^{A-1} (u-b)^{B-1} (u-c)^{C-1} (u-d)^{D-1} \, du$$

Nun ist nach (9)

$$S = \int_a^b (u-a)^{A-1} (u-b)^{B-1} (u-c)^{C-1} (u-d)^{D-1} \, du = \int_R^b - \int_R^a$$

oder die betreffenden Werte eingesetzt:

(11) $$S =$$

$$\frac{1}{(1-e^{2i\pi B})} \int_{R \leftarrow (b)} (u-a)^{A-1} (u-b)^{B-1} (u-c)^{C-1} (u-d)^{D-1} \, du -$$

$$\frac{1}{(1-e^{2i\pi A})} \int_{(a) \rightarrow R} (u-a)^{A-1} (u-b)^{B-1} (u-c)^{C-1} (u-d)^{D-1} \, du$$

Ist nun in S speziell

$$A = B$$

so erhält man, falls im zweiten Integral das Minuszeichen die Wegrichtung ändert

$$S_1 = \frac{1}{(1-e^{2i\pi A})} \left[\int_{R \leftarrow (b)} [(u-a)(u-b)]^{A-1} (u-c)^{C-1} (u-d)^{D-1} \, du \right.$$

$$\left. + \int_{(a) \rightarrow R} [(u-a)(u-b)]^{A-1} (u-c)^{C-1} (u-d)^{D-1} \, du \right]$$

Die beiden Integrale können, da im Punkte R der Integrand gleiche Werte aufweist, miteinander verbunden werden und es wird

$$(12) \qquad S_1 = \int_a^b [(u-a)(u-b)]^{A-1}(u-c)^{C-1}(u-d)^{D-1}\,du$$

$$= \frac{1}{(1-e^{2i\pi A})} \int [(u-a)(u-b)]^{A-1}(u-c)^{C-1}(u-d)^{D-1}\,du$$

woraus der Satz folgt, dass wenn in einem Euler'schen Integrale zwei Exponenten einander gleich sind, der Integrand schon bei einem Umlaufe um die betreffenden zwei Pole der Exponentenbasis, wieder auf seinen Anfangswert zurückkehrt. Dies trifft hauptsächlich für die Integrale der Kugel- und Zylinderfunktionen zu, welch letztere nun noch des Nähern betrachtet werden sollen.

§ 8. Zusammenhang der Bessel'schen Integrale mit denjenigen der Riemann'schen P-Funktion.

Die im zweiten Kapitel gefundene Darstellung der Bessel'schen Funktion $\overset{a}{J}(x)$ durch eine P-Funktion lautete (Formel 17):

$$y = \lim_{n=\infty} P \left| \begin{array}{cccc} -1 & \infty & +1 & \\ \frac{a}{2} & n & \frac{a}{2} & \cos\frac{x}{n} \\ -\frac{a}{2} & -n+1 & -\frac{a}{2} & \end{array} \right|$$

Wir setzen

$$\cos\frac{x}{n} = z$$

und transformieren nach Riemann*)

$$P \left| \begin{array}{cccc} -1 & \infty & +1 & \\ \frac{a}{2} & n & \frac{a}{2} & z \\ -\frac{a}{2} & -n+1 & -\frac{a}{2} & \end{array} \right| = P \left| \begin{array}{cccc} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \frac{n}{2} & \frac{a}{2} & z^2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1-n}{2} & -\frac{a}{2} & \end{array} \right|$$

*) Werke, pag. 71.

die Pole ∞ und 1 vertauscht, ergibt

$$P\left|\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & \frac{n}{2} & \frac{a}{2} & \frac{z^2}{z^2-1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1-n}{2} & -\frac{a}{2} & \end{matrix}\right| = P\left|\begin{matrix} -1 & +1 & \infty & \\ \frac{n}{2} & \frac{n}{2} & a & \frac{z}{\sqrt{z^2-1}} \\ \frac{1-n}{2} & \frac{1-n}{2} & -a & \end{matrix}\right|$$

Nun ist

$$\frac{z}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{\cos\frac{x}{n}}{\sqrt{\cos^2\frac{x}{n}-1}} = \frac{\cos\frac{x}{n}}{i\sin\frac{x}{n}}\Bigg|_{\lim n=\infty} = \frac{n}{i\,x}$$

demnach wird die P-Funktion

$$(13) \qquad y = \lim_{n=\infty} P\left|\begin{matrix} -1 & \infty & +1 & \\ \frac{n}{2} & a & \frac{n}{2} & \frac{n}{i\,x} \\ \frac{1-n}{2} & -a & \frac{1-n}{2} & \end{matrix}\right|$$

woraus nach (8) als Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung das Integral folgt:

$$y = C_{\lim n=\infty}\left(\frac{n}{i\,x}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{i\,x}-n\right)^{a}\left(\frac{n}{i\,x}-1\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\int_g^h (u+1)^{a-1/2}(u-1)^{a-1/2}(u-n)^{-a}\left(u-\frac{n}{i\,x}\right)^{-n-a} du$$

durch Zusammenzug sämtlicher konstanten Grössen in der Integrationskonstanten wird:

$$y = C_1 \lim_{n=\infty}\int_g^h (u^2-1)^{a-1/2}\left(\frac{n}{i\,x}\right)^{-n-a}\left(u\cdot\frac{i\,x}{n}-1\right)^{-n-a}$$

$$y = C_2\, x^a \int_g^h (1-u^2)^{a-1/2}\lim_{n=\infty}\left(1-\frac{u\,i\,x}{n}\right)^{-n-a} du$$

$$y = C_2\, x^a \int_g^h (1-u^2)^{a-1/2}\, e^{i\,x\,u}\, du$$

Der unendlich ferne Punkt wird also zur wesentlichen Singularität, die Variable kann in der Nord-Südrichtung ins Unendliche geführt werden, ohne dass das Integral seinen Sinn verliert. Die Grenzen g und h können demnach zwischen den Grössen

$$-1 \qquad +1 \text{ und } \frac{N i}{x}$$

wo N eine sehr gross gedachte Zahl bedeutet, gewählt werden.

Es ergeben sich somit als Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung die folgenden Integrale:

$$\text{(a)} \qquad y_1 = C_2\, x^a \int_{-1}^{+1} (1 - u^2)^{a - 1/2}\, e^{i x u}\, du$$

$$\text{(b)} \qquad y_2 = C_3\, x^a \int_{+1}^{\frac{N i}{x}} (1 - u^2)^{a - 1/2}\, e^{i x u}\, du$$

$$\text{(c)} \qquad y_3 = C_4\, x^a \int_{-1}^{\frac{N i}{x}} (1 - u^2)^{a - 1/2}\, e^{i x u}\, du$$

wobei natürlich vorausgesetzt wird, dass die reelle Komponente von $(a + 1/2)$ positiv ist.*)

---

*) Eine einfache Ueberführung ergibt sich auch aus dem gewöhnlichen hypergeometrischen Integrale.

$$F(a, b, c, x) = C \int_0^1 u^{b-1} (1 - u)^{c-b-1} (1 - x u)^{-a}\, du$$

da

$$\overset{a}{J}(x) = \lim_{k = \infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(a+1)}\, F\left(k, k, a+1, -\frac{x^2}{4k^2}\right)$$

Durch Einführung freier Integrationswege stösst man dabei rasch auf das bekannte Integral:

$$\overset{a}{J}(x) = \frac{1}{2 i \pi} \int_{-\frac{N}{x}} e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}\, t^{-a-1}\, dt$$

0

Wir bestimmen nun die zur Funktion $\overset{a}{J}(x)$ gehörenden Integrationskonstanten vermittelst der Gleichung:

$$\left| \frac{\overset{a}{J}(x)}{x^a} \right|_{x=0} = \frac{1}{2^a \,\Gamma(a+1)}$$

Aus (a) folgt:

$$\left| \frac{\overset{a}{J}(x)}{x^a} \right|_{x=0} = C_2 \int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{a-1/2}\, du = \frac{1}{2^a\, \Gamma(a+1)}$$

nun ist $$\int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{a-1/2}\, du = 2 \int_0^1 (1-u^2)^{a-1/2}\, du$$

$$u = \sqrt{z},\quad du = \frac{1}{2} z^{-1/2}\, dz$$

$$\int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{a-1/2}\, du = \int_0^1 z^{-1/2} (1-z)^{a-1/2}\, dz$$

Das Binet'sche Integral lautet aber

$$\int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{b-1}\, du = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

daher ist $$\int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{a-1/2}\, du = \frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma(a+1/2)}{\Gamma(a+1)}$$

dies oben eingesetzt, ergibt

$$C_2 = \frac{1}{2^a} \cdot \frac{1}{\Gamma(1/2)\,\Gamma(a+1/2)}$$

und das Integral (a) wird:

$$(14) \qquad \overset{a}{J}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(1/2)\,\Gamma(a+1/2)} \int_{-1}^{+1} (1-u^2)\, e^{ixu}\, du\text{*)}$$

setzt man $$x\,i\,u = -u_1$$

so wird

$$(15)\quad \overset{a}{J}(x) = (2x)^{-a} \frac{i}{\Gamma(^1/_2)\,\Gamma(a+{}^1/_2)} \int_{-xi}^{+xi} (u^2+x^2)^{a-{}^1/_2} e^{-u}\, du\text{*)}$$

Für (b) erhält man:

$$\left|\frac{\overset{a}{J}(x)}{x^a}\right|_{x=0} = C_3 \int_{+1}^{Ni} (1-u^2)^{a-{}^1/_2}\, du = \frac{1}{2^a\,\Gamma(a+1)}$$

zerlegt: $$= C_3 \left\{ \int_1^0 (1-u^2)^{a-{}^1/_2}\, du + \int_0^{Ni} (1-u^2)^{a-{}^1/_2}\, du \right\}$$

$$u = -i\,u_2$$

$$= -C_3 \left\{ \int_0^1 (1-u^2)^{a-{}^1/_2}\, du + i \int_0^N (1+u_2^2)^{a-{}^1/_2}\, du_2 \right\}$$

$$u^2 = x,\ du = \frac{1}{2} x^{-{}^1/_2}\, dx$$

$$= -\frac{C_3}{2} \left\{ \int_0^1 (1-x)^{a-{}^1/_2} x^{-{}^1/_2} dx + i \int_0^\infty (1+x)^{a-{}^1/_2} x^{-{}^1/_2}\, dx \right\}$$

Nun ist nach der Theorie der Gammafunktion**)

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1}\, dx = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\, dx = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

daher

$$\left|\frac{\overset{a}{J}(x)}{x^a}\right|_{x=0} = -\frac{C_3}{2} \left\{ \frac{\Gamma(^1/_2)\,\Gamma(a+{}^1/_2)}{\Gamma(a+1)} + i \frac{\Gamma(^1/_2)\,\Gamma(-a)}{\Gamma(^1/_2-a)} \right\} = \frac{1}{2^a\,\Gamma(a+1)}$$

*) Hankel, Math. Annalen, Bd. 1, ferner Graf, Bessel'sche Funktion I.

**) Graf, Gammafunktionen, pag. 12.

da aber
$$\frac{1}{\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$
folgt
$$C_3 = \frac{1}{2^{a-1}}\left\{-\frac{1}{\Gamma(^1/_2)\,\Gamma(a+{}^1/_2)} + i\,\frac{\pi}{\sin a\pi}\cdot\frac{\Gamma(^1/_2-a)}{\Gamma(^1/_2)}\right\}$$
in (b) eingesetzt, ergibt

$$(16)\quad \overset{a}{J}(x) = \frac{1}{2^{a-1}}\cdot\frac{x^a}{\Gamma(^1/_2)}\left\{-\frac{1}{\Gamma(a+{}^1/_2)} + i\,\frac{\pi}{\sin a\pi}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\,\Gamma(^1/_2-a)\right\}\int\limits_{+1}^{\frac{Ni}{x}}(1-t^2)^{a-{}^1/_2}\,e^{itx}\,d\,t$$

Für (c) erhält man auf gleichen Wegen

$$(17)\quad \overset{a}{J}(x) = \frac{1}{2^{a-1}}\cdot\frac{x^a}{\Gamma(^1/_2)}\left\{\frac{1}{\Gamma(a+{}^1/_2)} + i\,\frac{\pi}{\sin a\pi}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\,\Gamma(^1/_2-a)\right\}\int\limits_{-1}^{\frac{Ni}{x}}(1-t^2)^{a-{}^1/_2}\,e^{itx}\,d\,t$$

Durch Addition von (16) und (17) ergibt sich die Gleichung (14), woraus der früher bewiesene Satz, dass höchstens zwei Integrale voneinander unabhängig sein können, auf praktischen Wegen hergeleitet ist.

Durch die Substitution
$$x\,i\,t = -u$$
ergeben sich aus (16) und (17) die Integrale:

$$(18)\quad \overset{a}{J}(x) = \frac{1}{2^{a-1}}\cdot\frac{x^{-a}}{\Gamma(^1/_2)}\left\{-\frac{\pi}{\sin a\pi}\,\Gamma(^1/_2-a)\right.$$
$$\left.+\,\frac{i}{\Gamma(a+{}^1/_2)}\right\}\int\limits_{-xi}^{N}(u^2+x^2)^{a-{}^1/_2}\,e^{-u}\,d\,u$$

$$(19) \qquad \overset{a}{J}(x) = \frac{1}{2^{a-1}} \cdot \frac{x^{-a}}{\Gamma(1/2)} \left\{ -\frac{\pi}{\sin a\,\pi}\, \Gamma(1/2 - a) \right.$$

$$\left. - \frac{i}{\Gamma(a + 1/2)} \right\} \int_{+xi}^{N} (u^2 + x^2)^{a-1/2}\, e^{-u}\, d\,u$$

durch Addition dieser beiden Gleichungen ergibt sich die früher gefundene Form (15).

§ 9. Freie Integrationswege.

Die gefundenen Integralformen (14)—(19) setzen voraus, dass die reelle Komponente von $(a + 1/2)$ positiv ist. Für beliebige a müssen freie Integrationswege eingeführt werden.

Als Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung ergab sich das Integral

$$y = C\,x^a \int (u^2 - 1)^{a-1/2}\, e^{i x u}\, d\,u$$

wobei als Grenzen die Werte

$$-1 \qquad +1 \text{ und } \frac{N\,i}{x}$$

in Betracht fielen.

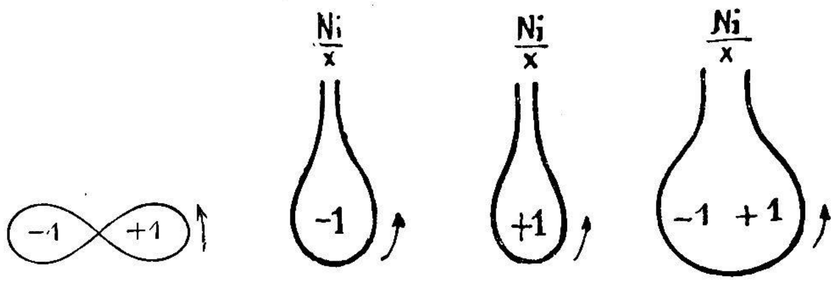
Der Integrand

$$(u - 1)^{a-1/2}\, (u + 1)^{a-1/2}\, e^{i x u}$$

weist zwei gleiche Exponenten auf, es kann deshalb, wie früher in § 7 ganz allgemein gezeigt wurde, um die Pole -1 und $+1$ ein einfacher, geschlossener Umlauf von Achterform als Weg gewählt werden.

Da der Horizont wesentlich singulären Charakter trägt, sind von $\frac{N\,i}{x}$ ausgehend nur Schleifenintegraldarstellungen möglich.

Wir haben daher folgende möglichen Integrationskurven



1) 2) 3) 4)

Von diesen Wegen betrachten wir nur den ersten und letzten.

Aus (12) folgt, wenn darin

$a = -1$, $b = 1$, $A = a + {}^1/_2$, $(u-c)^{C-1}\,(u-d)^{D-1} = e^{ixu}$

gesetzt wird:

$$\int_{-1}^{+1} (u^2 - 1)^{a-1/2}\, e^{iux}\, du = \frac{1}{(1 - e^{2i\pi(a+1/2)})} \int (u^2 - 1)^{a-1/2}\, e^{ixu}\, du$$

Nach (14) ist aber falls

$$(-1)^{a-1/2} = e^{i\pi(a-1/2)}$$

ausgeklammert wird

$$\overset{a}{J}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(1/2)\,\Gamma(a+1/2)} \cdot e^{i\pi(a-1/2)} \int_{-1}^{+1} (u^2 - 1)^{a-1/2}\, e^{ixu}\, du$$

für das Integral obigen Wert eingesetzt ergibt

$$\overset{a}{J}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(1/2)\,\Gamma(a+1/2)} \cdot \frac{e^{i\pi(a-1/2)}}{(1 - e^{2i\pi(a+1/2)})} \int (u^2 - 1)^{a-1/2}\, e^{ixu}\, du$$

Nun ist, unter Berücksichtigung dass

$$\Gamma(a) \cdot \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

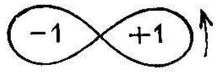
$$\frac{1}{(1-e^{2i\pi(a+1/2)})} = \frac{2i}{e^{i\pi(a+1/2)}\left(e^{-i\pi(a+1/2)} - e^{i\pi(a+1/2)}\right)}\cdot\frac{1}{2i}$$

$$= -\frac{1}{\sin\pi(a+1/2)\,e^{i\pi(a+1/2)}}\cdot\frac{1}{2i}$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\cdot\frac{\Gamma(a+1/2)\,\Gamma(1/2-a)}{e^{i\pi(a-1/2)}}$$

eingesetzt und gekürzt ergibt die von Hankel*) gegebene Form

$$(20)\qquad \overset{a}{J}(x) = \frac{\Gamma(1/2-a)\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(1/2)\cdot 2i\pi}\int (u^2-1)^{a-1/2}e^{ixu}\,du{*)}$$

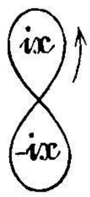


substituiert man

$$u\,i\,x = t$$

so wird das Integral zu

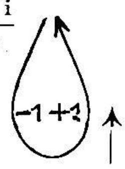
$$(21)\qquad \overset{a}{J}(x) = (-1)^a\,\frac{\Gamma(1/2-a)}{\Gamma(1/2)}\cdot\frac{(2x)^{-a}}{2i\pi}\int e^t\,(t^2+x^2)^{a-1/2}\,dt{**)}$$



eine Form die auch schon bei Hankel auftritt.

Betrachten wir nun noch das Integral

$$y = C\,x^a\int_{\frac{Ni}{x}}(u^2-1)^{a-1/2}e^{ixu}\,du$$



das nach unsern Untersuchungen auch eine partikuläre Lösung der Besselschen Differentialgleichung darstellt.

---

*) Hankel, Math. Annalen, Bd. 1.

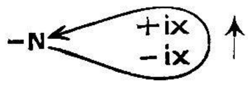
**) S. auch Graf & Gubler, Bessel'sche Funktionen I.

Durch Anwendung der Substitution

$$u\,i\,x = t$$

wird, falls wieder sämtliche neu auftretenden Konstanten in C_1 vereinigt werden:

$$y = C_1\, x^{-a} \int e^t\,(t^2 + x^2)^{a - 1/2}\, dt$$



Zur Bestimmung der Konstanten C_1 benützt man wieder die Formel:

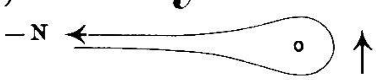
$$\left|\frac{\overset{a}{J}(x)}{x^a}\right|_{x=0} = \frac{1}{2^a} \cdot \frac{1}{\Gamma(a+1)}$$

in der, wegen des Faktors x^{-a} vor dem Integral, a durch — a ersetzt werden muss. Es ist demnach:

$$\left|\frac{\overset{-a}{J}(x)}{x^{-a}}\right|_{x=0} = C_1 \int e^t\, t^{2a-1}\, dt = \frac{2^a}{\Gamma(1-a)}$$

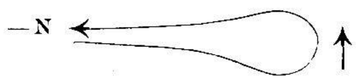
Das Weyerstrass'sche Integral lautet nun*)

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \frac{1}{2\,i\,\pi} \int e^x \cdot x^{-a}\, dx$$



also wird

$$C_1 \int e^t\, t^{2a-1}\, dt = C_1 \cdot \frac{2\,i\,\pi}{\Gamma(1-2a)} = \frac{2^a}{\Gamma(1-a)}$$



daher

$$C_1 = \frac{1}{2\,i\,\pi} \cdot \frac{\Gamma(1-2a)}{\Gamma(1-a)} \cdot 2^a$$

*) Graf, Gammafunktion.

Unter Berücksichtigung des Satzes über die Verdopplung des Argumentes der Gammafunktion*)

$$\Gamma(2\,p) = \frac{2^{2\,p-1}\,\Gamma(p)\Gamma(p+{}^1/_2)}{\Gamma({}^1/_2)}$$

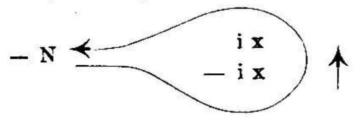
wird

$$C_1 = \frac{1}{2\,i\,\pi} \cdot \frac{\Gamma(2\,[{}^1/_2 - a])}{\Gamma(1-a)} \cdot 2^a = \frac{2^{-2\,a}\,\Gamma({}^1/_2 - a)\,\Gamma(1-a)}{2\,i\,\pi\,\Gamma({}^1/_2)\,\Gamma(1-a)} \cdot 2^a$$

$$= \frac{2^{-a}\,\Gamma({}^1/_2 - a)}{2\,i\,\pi \cdot \Gamma({}^1/_2)}$$

im Integral eingesetzt, ergibt:

$$(22) \qquad \overset{-a}{J}(x) = \frac{\Gamma({}^1/_2 - a)(2\,x)^{-a}}{\Gamma({}^1/_2)\;2\,i\,\pi} \int e^u\,(u^2+x^2)^{a-{}^1/_2}\,d\,u^{**})$$

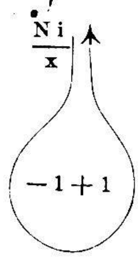


substituiert man nun wieder zurück, d. h. setzt man

$$u = x\,t\,i$$

so erhält man da $\Gamma({}^1/_2) = \sqrt{\pi}$

$$(23) \qquad \overset{-a}{J}(x) = \frac{\Gamma({}^1/_2 - a)}{\pi^{1/2}} \cdot \frac{x^a}{2^{a+1}} \int e^{x\,t\,i}\,(1-t^2)^{a-{}^1/_2}\,d\,t$$



Eingegangen am 15. Februar 1919.

*) Graf, Gammafunktion.

**) S. auch Graf & Gubler, Bessel'sche Funktionen.