Die Integraldarstellung

III. Kapitel.

Die Integraldarstellung.

§ 6. Integraldarstellung der Riemann'schen P-Funktion.

Die gewöhnliche hypergeometrische Differentialgleichung

$$(1) \qquad x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} - \left\{c-(a+b+1)x\right\}\frac{dy}{dx} + a\cdot b\cdot y = 0$$

lässt sich sofort durch die in der Einleitung betrachtete Methode durch bestimmte Integrale integrieren. Setzt man nämlich:

$$x(x-1) = Q(x);\ (x-1)(1+a-c) + x(c-b) = R(x)$$
$$\text{und } 1-a = \xi$$

so erhält man die bekannte Differentialgleichung:

$$(2) \qquad Q(x)\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - (\xi-2)\cdot Q'(x)\frac{dy}{dx}$$
$$+\frac{(\xi-2)(\xi-1)}{1\cdot 2}Q''(x)\cdot y - R(x)\frac{dy}{dx} + (\xi-1)R'(x)\cdot y = 0$$

deren Lösung sich durch das Integral

$$(3) \qquad y = \int_g^h u^{a-c}(u-1)^{c-b-1}(u-x)^{-a}\,du$$

geben lässt, falls die reellen Komponenten der Exponenten positiv gedacht werden und wo die Grenzen zwischen den Werten

$$0 \quad 1 \quad x \text{ und } \infty$$

beliebig gewählt werden dürfen.

Die partikulären Integrale der allgemeinen hypergeometrischen Differentialgleichung mit den singulären Stellen 0,1 und ∞

$$(4) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \left\{\frac{1-\alpha-\alpha'}{x} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{x-1}\right\}\frac{dy}{dx}$$
$$+\left\{-\frac{\alpha\alpha'}{x} + \frac{\gamma\gamma'}{x-1} + \beta\beta'\right\}\frac{y}{x(x-1)} = 0$$

die sich von denjenigen der gewöhnlichen hypergeometrischen Differentialgleichung (2) nur dadurch unterscheiden, dass sie noch mit den Faktoren $C x^{\alpha}(1-x)^{\gamma}$ multipliziert sind, werden daher nach (3)

$$(5) \qquad y = C x^{\alpha}(1-x)^{\gamma} \int_{g}^{h} u^{a-c}(u-1)^{c-b-1}(u-x)^{-a}\,du$$

wo je nach Wahl der Grenzen zwischen den Grössen

$$0 \qquad 1 \qquad x \quad \text{und} \quad \infty$$

andere Funktionszweige entstehen.

Unter Berücksichtigung der Formeln (5) und (6) des zweiten Kapitels wird (5) zu:

$$(6) \qquad y = C x^{\alpha}(1-x)^{\gamma} \int_{g}^{h} u^{\alpha'+\beta+\gamma-1}(u-1)^{-\alpha'-\beta'-\gamma}(u-x)^{-\alpha-\beta-\gamma}\,du$$

Aus (4) erhält man bekanntlich die allgemeine hypergeometrische Differentialgleichung der P-Funktion

$$(7) \qquad \frac{d^2y}{dz^2} + \left\{\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{z-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c}\right\}\frac{dy}{dz}$$

$$+ \left\{\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{\beta\beta'(b-a)(b-c)}{z-b} + \frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c}\right\}$$

$$\frac{y}{(z-a)(z-b)(z-c)} = 0$$

durch die Substitution:

$$x = \frac{z-a}{z-b} \cdot \frac{c-b}{c-a}$$

Da

$$1-x = \frac{z-c}{z-b} \cdot \frac{b-a}{c-a}$$

ergibt sich nach (6) als Lösung von (7) das Integral:

$$y = C(c-b)^{\alpha}(b-a)^{\gamma}(c-a)^{-\alpha-\gamma}(z-a)^{\alpha}(z-b)^{-\alpha-\gamma}(z-c)^{\gamma}$$

$$\int_{g}^{h} u^{\alpha'+\beta+\gamma-1}(u-1)^{-\alpha'-\beta'-\gamma}\left(u - \frac{z-a}{z-b} \cdot \frac{c-b}{c-a}\right)^{-\alpha-\beta-\gamma} du$$

oder, falls die konstanten Grössen in die Konstante genommen werden,

$$y = C_1 (z - a)^{\alpha} (z - b)^{-\alpha - \gamma} (z - c)^{\gamma}$$

$$\int\limits_g^h u^{\alpha' + \beta + \gamma - 1} (u - 1)^{-\alpha' - \beta' - \gamma} \left(u - \frac{z - a}{z - b} \cdot \frac{c - b}{c - a}\right)^{-\alpha - \beta - \gamma} du$$

Setzt man

$$u = \frac{u_1 - a}{u_1 - b} \cdot \frac{c - b}{c - a}$$

so wird

$$u - 1 = \frac{u_1 - c}{u_1 - b} \cdot \frac{a - b}{c - a}; \; u - \frac{z - a}{z - b} \cdot \frac{c - b}{c - a} = \frac{c - b}{c - a} \cdot$$

$$\cdot \frac{z - u_1}{u_1 - b} \cdot \frac{b - a}{z - b}$$

$$du = \frac{(c - b)(a - b)}{(c - a)} \cdot \frac{du_1}{(u_1 - b)^2}$$

An Stelle der Grenzen	0	1	∞	x
treten	a	c	b	z

Alle diese Werte eingesetzt, ergibt, falls wiederum alle konstanten Grössen in der Integrationskonstanten aufgenommen werden

$$y = C_2 (z - a)^{\alpha} (z - b)^{\beta} (z - c)^{\gamma} \int\limits_g^h (u_1 - a)^{-\alpha - \beta' - \gamma'} (u_1 - b)^{-\alpha' - \beta - \gamma'}$$

$$(u_1 - c)^{-\alpha' - \beta' - \gamma} (z - u_1)^{-\alpha - \beta - \gamma} du_1$$

oder

$$(8) \quad y = C_3 (z - a)^{\alpha} (z - b)^{\beta} (z - c)^{\gamma} \int\limits_g^h (u - a)^{-\alpha - \beta' - \gamma'} (u - b)^{-\alpha' - \beta - \gamma'}$$

$$(u - c)^{-\alpha' - \beta' - \gamma} (u - z)^{-\alpha - \beta - \gamma} du$$

Je nachdem nun die Grenzen g und h zwischen den Grössen a, b, c und z gewählt werden, erhält man den einen oder andern Zweig der Riemann'schen P-Funktion

$$y = P \left| \begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix} \right|$$

Da die Summe der Exponenten

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$$

ist, ergibt sich, dass die Summe der Exponenten des Integrandes in (8) S = — 2 sein muss.

§ 7. Bemerkungen zu diesem Integrale.

Das in Gleichung (8) auftretende Integral lässt sich allgemein in der Form geben:

$$(9)\quad S = \int_g^h (u-a)^{A-1}\,(u-b)^{B-1}\,(u-c)^{C-1}\,(u-d)^{D-1}\,du\text{*)}$$

wo die Grenzen zwei der Grössen a, b, c, d bedeuten und die Summe der Exponenten

$$(10)\qquad A + B + C + D = 2$$

ist.

Das Integral (9) ist nun nichts anderes als das, nach Klein**) so bezeichnete allgemeine Euler'sche Integral vierter Ordnung. Die Untersuchung der Bessel'schen Integrale als spezielle Formen der hypergeometrischen Funktionen führt demnach auf den Zusammenhang der ersteren mit den Euler'schen Integralen.

Aus der Bedingung (10) ist ersichtlich, dass stets mindestens einer der vier Exponenten eine positive reelle Komponente besitzen muss, dass aber auch anderseits nie alle vier Exponenten zugleich positiv sein können. Man ist daher auf alle Fälle

*) Schläfli, Ueber die Gauss'sche Reihe. Math. Annalen, Bd. 3.

**) Klein, Hypergeometrische Funktion.

gezwungen, freie Integrationswege zu betrachten. Da nun zufolge (10) stets mindestens einer der Exponenten positiv sein muss, so liegt immer einer der Punkte a, b, c, d derart, dass die Variable in ihn geführt werden kann, d. h. irgendwo anfangend hat S hier einen endlichen Wert. Man kann nun von diesem Punkte aus um jeden der andern Verzweigungspunkte eine Schleife als Integrationslinie in rechtläufigem Sinne wählen. Ist z. B. die recp. A positiv, so können wir von a aus als Ausgangspunkt die Variable um jeden der Pole b, c, d führen; diese drei Schleifen entsprechen dann einer Schleife von a aus, die sämtliche andern Verzweigungspunkte in sich enthält. Letztere wird aber, da der Horizont für S als ein gewöhnlicher Punkt bezeichnet werden darf, zu Null. Daraus erhalten wir den Satz, dass höchstens zwei der gesamten Integrale voneinander unabhängig sind. Durch diese beiden Integrale kann man jedes andere, noch mögliche bestimmte Integral linear und homogen ausdrücken.

Kann die Variable in keinen der beiden Grenzpunkte des Weges geführt werden, so bedient man sich entweder solcher Wege, auf denen der Integrand nachdem die betreffenden Verzweigungspunkte umlaufen wurden, wieder den Anfangswert annimmt. d. h. geschlossener Wege wie z. B. Doppelumläufe, oder man betrachtet auf irgend einer Verbindungslinie der zwei Verzweigungspunkte einen Punkt, von dem als Ausgangspunkt zwei Schleifen, je um einen der Verzweigungspunkte gelegt werden. Dabei wird natürlich vorausgesetzt, dass auf der betreffenden Verbindungslinie keine weiteren Verzweigungspunkte liegen. Betrachtet man daher die Punkte a und b, so hat man folgendes Bild:

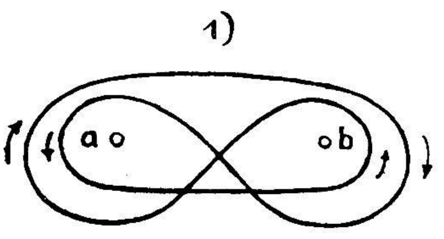


Fig. 1.

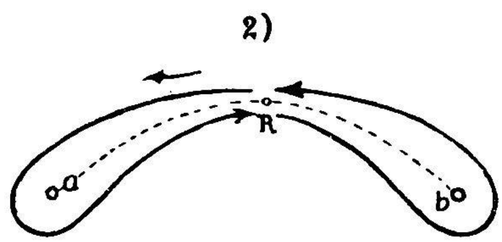


Fig. 2.

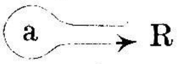
Von einer näheren Untersuchung des Doppelumlaufes sehen wir hier ab, hingegen betrachten wir den Fall (2). Es sei:

$$T = \int_{c} (u-a)^{A-1} (u-b)^{B-1} (u-c)^{C-1} (u-d)^{D-1} \, du$$

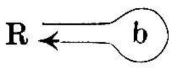
wo c den Weg (2) darstellen soll.

Denkt man sich die Verbindungslinie a b in die Realitätsgerade gelegt, so wird

$$T = \int (u-a)^{A-1} (u-b)^{B-1} (u-c)^{C-1} (u-d)^{D-1} \, du$$



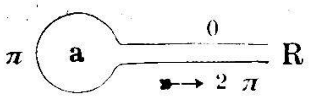
$$+ \int (u-a)^{A-1} (u-b)^{B-1} (u-c)^{C-1} (u-d)^{D-1} \, du$$



$$= U + V$$

Wird der Weg auf die Realitätsgerade zusammengezogen und dem Erkennungsort die Phase π gegeben, so erhält man:

$$U = \int (u-a)^{A-1} (u-b)^{B-1} (u-c)^{C-1} (u-d)^{D-1} \, du$$



Hinweg: Phase $= 0$:

$$\text{Integral} \int_{R}^{a} (u-a)^{A-1} (u-b)^{B-1} (u-c)^{C-1} (u-d)^{D-1} \, du$$

Rückweg: Phase $= 2\pi$:

$$\text{Integral } e^{2 i \pi A} \int_{a}^{R} (u-a)^{A-1} (u-b)^{B-1} (u-c)^{C-1} (u-d)^{D-1} \, du$$

daher

$$U = (1 - e^{2 i \pi A}) \int_{R}^{a} (u-a)^{A-1} (u-b)^{B-1} (u-c)^{C-1} (u-d)^{D-1} \, du$$

analog wird

$$V = (1 - e^{2i\pi B}) \int_R^b (u-a)^{A-1} (u-b)^{B-1} (u-c)^{C-1} (u-d)^{D-1}\, du$$

Nun ist nach (9)

$$S = \int_a^b (u-a)^{A-1} (u-b)^{B-1} (u-c)^{C-1} (u-d)^{D-1}\, du = \int_R^b - \int_R^a$$

oder die betreffenden Werte eingesetzt:

(11) $$S =$$

$$\frac{1}{(1 - e^{2i\pi B})} \int_{R \leftarrow b} (u-a)^{A-1} (u-b)^{B-1} (u-c)^{C-1} (u-d)^{D-1}\, du -$$

$$\frac{1}{(1 - e^{2i\pi A})} \int_{a \rightarrow R} (u-a)^{A-1} (u-b)^{B-1} (u-c)^{C-1} (u-d)^{D-1}\, du$$

Ist nun in S speziell

$$A = B$$

so erhält man, falls im zweiten Integral das Minuszeichen die Wegrichtung ändert

$$S_1 = \frac{1}{(1 - e^{2i\pi A})} \left[\int_{R \leftarrow b} [(u-a)(u-b)]^{A-1} (u-c)^{C-1} (u-d)^{D-1}\, du \right.$$

$$\left. + \int_{a \rightarrow R} [(u-a)(u-b)]^{A-1} (u-c)^{C-1} (u-d)^{D-1}\, du \right]$$

Die beiden Integrale können, da im Punkte R der Integrand gleiche Werte aufweist, miteinander verbunden werden und es wird

$$(12) \qquad S_1 = \int_a^b [(u-a)(u-b)]^{A-1}(u-c)^{C-1}(u-d)^{D-1}\,du$$

$$= \frac{1}{(1-e^{2i\pi A})}\int [(u-a)(u-b)]^{A-1}(u-c)^{C-1}(u-d)^{D-1}\,du$$

woraus der Satz folgt, dass wenn in einem Euler'schen Integrale zwei Exponenten einander gleich sind, der Integrand schon bei einem Umlaufe um die betreffenden zwei Pole der Exponentenbasis, wieder auf seinen Anfangswert zurückkehrt. Dies trifft hauptsächlich für die Integrale der Kugel- und Zylinderfunktionen zu, welch letztere nun noch des Nähern betrachtet werden sollen.

§ 8. Zusammenhang der Bessel'schen Integrale mit denjenigen der Riemann'schen P-Funktion.

Die im zweiten Kapitel gefundene Darstellung der Bessel'schen Funktion $\overset{a}{J}(x)$ durch eine P-Funktion lautete (Formel 17):

$$y = \lim_{n=\infty} P \left| \begin{array}{cccc} -1 & \infty & +1 & \\ \frac{a}{2} & n & \frac{a}{2} & \cos\frac{x}{n} \\ -\frac{a}{2} & -n+1 & -\frac{a}{2} & \end{array} \right|$$

Wir setzen

$$\cos\frac{x}{n} = z$$

und transformieren nach Riemann*)

$$P \left| \begin{array}{cccc} -1 & \infty & +1 & \\ \frac{a}{2} & n & \frac{a}{2} & z \\ -\frac{a}{2} & -n+1 & -\frac{a}{2} & \end{array} \right| = P \left| \begin{array}{cccc} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \frac{n}{2} & \frac{a}{2} & z^2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1-n}{2} & -\frac{a}{2} & \end{array} \right|$$

*) Werke, pag. 71.

die Pole ∞ und 1 vertauscht, ergibt

$$P\left|\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & \frac{n}{2} & \frac{a}{2} & \frac{z^2}{z^2-1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1-n}{2} & -\frac{a}{2} & \end{matrix}\right| = P\left|\begin{matrix} -1 & +1 & \infty & \\ \frac{n}{2} & \frac{n}{2} & a & \frac{z}{\sqrt{z^2-1}} \\ \frac{1-n}{2} & \frac{1-n}{2} & -a & \end{matrix}\right|$$

Nun ist

$$\frac{z}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{\cos\frac{x}{n}}{\sqrt{\cos^2\frac{x}{n}-1}} = \frac{\cos\frac{x}{n}}{i\sin\frac{x}{n}}\Bigg|_{\lim n=\infty} = \frac{n}{ix}$$

demnach wird die P-Funktion

$$(13) \qquad y = \lim_{n=\infty} P\left|\begin{matrix} -1 & \infty & +1 & \\ \frac{n}{2} & a & \frac{n}{2} & \frac{n}{ix} \\ \frac{1-n}{2} & -a & \frac{1-n}{2} & \end{matrix}\right|$$

woraus nach (8) als Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung das Integral folgt:

$$y = \underset{\lim n=\infty}{C}\left(\frac{n}{ix}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{ix}-n\right)^{a}\left(\frac{n}{ix}-1\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\int_g^h (u+1)^{a-1/2}(u-1)^{a-1/2}(u-n)^{-a}\left(u-\frac{n}{ix}\right)^{-n-a} du$$

durch Zusammenzug sämtlicher konstanten Grössen in der Integrationskonstanten wird:

$$y = \underset{\substack{\lim\\ n=\infty}}{C_1}\int_g^h (u^2-1)^{a-1/2}\left(\frac{n}{ix}\right)^{-n-a}\left(u\cdot\frac{ix}{n}-1\right)^{-n-a}$$

$$y = C_2\, x^a \int_g^h (1-u^2)^{a-1/2} \lim_{n=\infty}\left(1-\frac{uix}{n}\right)^{-n-a} du$$

$$y = C_2\, x^a \int_g^h (1-u^2)^{a-1/2}\, e^{ixu}\, du$$

Der unendlich ferne Punkt wird also zur wesentlichen Singularität, die Variable kann in der Nord-Südrichtung ins Unendliche geführt werden, ohne dass das Integral seinen Sinn verliert. Die Grenzen g und h können demnach zwischen den Grössen

$$-1 \qquad +1 \text{ und } \frac{Ni}{x}$$

wo N eine sehr gross gedachte Zahl bedeutet, gewählt werden.

Es ergeben sich somit als Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung die folgenden Integrale:

$$\text{(a)} \qquad y_1 = C_2\, x^a \int_{-1}^{+1} (1 - u^2)^{a - 1/2}\, e^{ixu}\, du$$

$$\text{(b)} \qquad y_2 = C_3\, x^a \int_{+1}^{\frac{Ni}{x}} (1 - u^2)^{a - 1/2}\, e^{ixu}\, du$$

$$\text{(c)} \qquad y_3 = C_4\, x^a \int_{-1}^{\frac{Ni}{x}} (1 - u^2)^{a - 1/2}\, e^{ixu}\, du$$

wobei natürlich vorausgesetzt wird, dass die reelle Komponente von $(a + 1/2)$ positiv ist.*)

---

*) Eine einfache Ueberführung ergibt sich auch aus dem gewöhnlichen hypergeometrischen Integrale.

$$F\,(a, b, c, x) = C \int_0^1 u^{b-1} (1-u)^{c-b-1} (1-xu)^{-a}\, du$$

da

$$\overset{a}{J}(x) = \lim_{k = \infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(a+1)}\, F\left(k, k, a+1, -\frac{x^2}{4k^2}\right)$$

Durch Einführung freier Integrationswege stösst man dabei rasch auf das bekannte Integral:

$$\overset{a}{J}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\frac{N}{x}} e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}\, t^{-a-1}\, dt$$

Wir bestimmen nun die zur Funktion $\overset{a}{J}(x)$ gehörenden Integrationskonstanten vermittelst der Gleichung:

$$\left|\frac{\overset{a}{J}(x)}{x^a}\right|_{x=0} = \frac{1}{2^a\,\Gamma(a+1)}$$

Aus (a) folgt:

$$\left|\frac{\overset{a}{J}(x)}{x^a}\right|_{x=0} = C_2 \int\limits_{-1}^{+1} (1-u^2)^{a-1/2}\,du = \frac{1}{2^a\,\Gamma(a+1)}$$

nun ist $\displaystyle\int\limits_{-1}^{+1} (1-u^2)^{a-1/2}\,du = 2\int\limits_{0}^{1} (1-u^2)^{a-1/2}\,du$

$$u = \sqrt{z},\quad du = \frac{1}{2} z^{-1/2}\,dz$$

$$\int\limits_{-1}^{+1} (1-u^2)^{a-1/2}\,du = \int\limits_{0}^{1} z^{-1/2}(1-z)^{a-1/2}\,dz$$

Das Binet'sche Integral lautet aber

$$\int\limits_{0}^{1} u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

daher ist $\displaystyle\int\limits_{-1}^{+1} (1-u^2)^{a-1/2}\,du = \frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma(a+1/2)}{\Gamma(a+1)}$

dies oben eingesetzt, ergibt

$$C_2 = \frac{1}{2^a}\cdot\frac{1}{\Gamma(1/2)\,\Gamma(a+1/2)}$$

und das Integral (a) wird:

$$(14)\qquad \overset{a}{J}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(1/2)\,\Gamma(a+1/2)} \int\limits_{-1}^{+1} (1-u^2)\,e^{ixu}\,du\text{*)}$$

setzt man $$x\,i\,u = -u_1$$

so wird

$$(15)\quad \overset{a}{J}(x) = (2\,x)^{-a}\,\frac{i}{\Gamma(^1/_2)\,\Gamma(a+{}^1/_2)}\int_{-xi}^{+xi}(u^2+x^2)^{a-{}^1/_2}\,e^{-u}\,du^{*)}$$

Für (b) erhält man:

$$\left|\frac{\overset{a}{J}(x)}{x^a}\right|_{x=0} = C_3\int_{+1}^{Ni}(1-u^2)^{a-{}^1/_2}\,du = \frac{1}{2^a\,\Gamma(a+1)}$$

zerlegt: $$= C_3\left\{\int_1^0(1-u^2)^{a-{}^1/_2}\,du + \int_0^{Ni}(1-u^2)^{a-{}^1/_2}\,du\right\}$$

$$u = -i\,u_2$$

$$= -C_3\left\{\int_0^1(1-u^2)^{a-{}^1/_2}\,du + i\int_0^N(1+u_2^2)^{a-{}^1/_2}\,du_2\right\}$$

$$u^2 = x,\ du = \frac{1}{2}\,x^{-{}^1/_2}\,dx$$

$$= -\frac{C_3}{2}\left\{\int_0^1(1-x)^{a-{}^1/_2}x^{-{}^1/_2}dx + i\int_0^\infty(1+x)^{a-{}^1/_2}\,x^{-{}^1/_2}\,dx\right\}$$

Nun ist nach der Theorie der Gammafunktion**)

$$\int_0^1 x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}\,dx = \int_0^\infty\frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

daher

$$\left|\frac{\overset{a}{J}(x)}{x^a}\right|_{x=0} = -\frac{C_3}{2}\left\{\frac{\Gamma(^1/_2)\,\Gamma(a+{}^1/_2)}{\Gamma(a+1)} + i\,\frac{\Gamma(^1/_2)\,\Gamma(-a)}{\Gamma(^1/_2-a)}\right\} = \frac{1}{2^a\Gamma(a+1)}$$

---

*) Hankel, Math. Annalen, Bd. 1, ferner Graf, Bessel'sche Funktion I.

**) Graf, Gammafunktionen, pag. 12.

da aber
$$\frac{1}{\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$
folgt
$$C_3 = \frac{1}{2^{a-1}}\left\{-\frac{1}{\Gamma(^1/_2)\,\Gamma(a+{}^1/_2)} + i\,\frac{\pi}{\sin a\pi}\cdot\frac{\Gamma(^1/_2 - a)}{\Gamma(^1/_2)}\right\}$$
in (b) eingesetzt, ergibt

$$(16)\quad \overset{a}{J}(x) = \frac{1}{2^{a-1}}\cdot\frac{x^a}{\Gamma(^1/_2)}\left\{-\frac{1}{\Gamma(a+{}^1/_2)} + i\,\frac{\pi}{\sin a\pi}\cdot\Gamma(^1/_2 - a)\right\}\int_{+1}^{\frac{Ni}{x}}(1-t^2)^{a-{}^1/_2}\,e^{itx}\,dt$$

Für (c) erhält man auf gleichen Wegen

$$(17)\quad \overset{a}{J}(x) = \frac{1}{2^{a-1}}\cdot\frac{x^a}{\Gamma(^1/_2)}\left\{\frac{1}{\Gamma(a+{}^1/_2)} + i\,\frac{\pi}{\sin a\pi}\cdot\Gamma(^1/_2 - a)\right\}\int_{-1}^{\frac{Ni}{x}}(1-t^2)^{a-{}^1/_2}\,e^{itx}\,dt$$

Durch Addition von (16) und (17) ergibt sich die Gleichung (14), woraus der früher bewiesene Satz, dass höchstens zwei Integrale voneinander unabhängig sein können, auf praktischen Wegen hergeleitet ist.

Durch die Substitution
$$x\,i\,t = -u$$
ergeben sich aus (16) und (17) die Integrale:

$$(18)\quad \overset{a}{J}(x) = \frac{1}{2^{a-1}}\cdot\frac{x^{-a}}{\Gamma(^1/_2)}\left\{-\frac{\pi}{\sin a\pi}\,\Gamma(^1/_2 - a) + \frac{i}{\Gamma(a+{}^1/_2)}\right\}\int_{-xi}^{N}(u^2+x^2)^{a-{}^1/_2}\,e^{-u}\,du$$

$$(19)\quad \overset{a}{J}(x) = \frac{1}{2^{a-1}} \cdot \frac{x^{-a}}{\Gamma(1/2)} \left\{ - \frac{\pi}{\sin a\,\pi}\,\Gamma(1/2 - a) - \frac{i}{\Gamma(a + 1/2)} \right\} \int_{+xi}^{N} (u^2 + x^2)^{a - 1/2}\, e^{-u}\, d\,u$$

durch Addition dieser beiden Gleichungen ergibt sich die früher gefundene Form (15).

§ 9. Freie Integrationswege.

Die gefundenen Integralformen (14)—(19) setzen voraus, dass die reelle Komponente von $(a + 1/2)$ positiv ist. Für beliebige a müssen freie Integrationswege eingeführt werden.

Als Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung ergab sich das Integral

$$y = C\,x^a \int (u^2 - 1)^{a - 1/2}\, e^{i\,x\,u}\, d\,u$$

wobei als Grenzen die Werte

$$-1 \qquad +1 \text{ und } \frac{N\,i}{x}$$

in Betracht fielen.

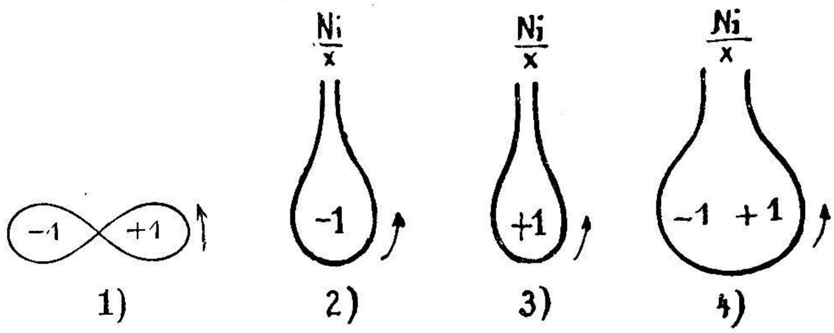
Der Integrand

$$(u - 1)^{a - 1/2}\,(u + 1)^{a - 1/2}\, e^{i\,x\,u}$$

weist zwei gleiche Exponenten auf, es kann deshalb, wie früher in § 7 ganz allgemein gezeigt wurde, um die Pole -1 und $+1$ ein einfacher, geschlossener Umlauf von Achterform als Weg gewählt werden.

Da der Horizont wesentlich singulären Charakter trägt, sind von $\frac{N\,i}{x}$ ausgehend nur Schleifenintegraldarstellungen möglich.

Wir haben daher folgende möglichen Integrationskurven



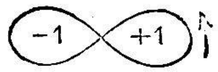
Von diesen Wegen betrachten wir nur den ersten und letzten.

Aus (12) folgt, wenn darin

$a = -1,\quad b = 1,\quad A = a + {}^1\!/_2,\quad (u - c)^{C-1}\,(u - d)^{D-1} = e^{ixu}$

gesetzt wird:

$$\int_{-1}^{+1} (u^2 - 1)^{a - 1/2}\, e^{iux}\, du = \frac{1}{(1 - e^{2i\pi(a + 1/2)})} \int (u^2 - 1)^{a - 1/2}\, e^{ixu}\, du$$



Nach (14) ist aber falls

$$(-1)^{a - 1/2} = e^{i\pi(a - 1/2)}$$

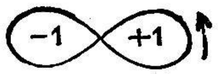
ausgeklammert wird

$$\overset{a}{J}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(1/2)\,\Gamma(a + 1/2)} \cdot e^{i\pi(a - 1/2)} \int_{-1}^{+1} (u^2 - 1)^{a - 1/2}\, e^{ixu}\, du$$

für das Integral obigen Wert eingesetzt ergibt

$$\overset{a}{J}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(1/2)\,\Gamma(a + 1/2)} \cdot \frac{e^{i\pi(a - 1/2)}}{(1 - e^{2i\pi(a + 1/2)})} \int (u^2 - 1)^{a - 1/2}\, e^{ixu}\, du$$

Nun ist, unter Berücksichtigung dass



$$\Gamma(a) \cdot \Gamma(1 - a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

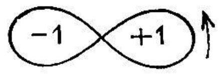
$$\frac{1}{(1-e^{2i\pi(a+1/2)})} = \frac{2i}{e^{i\pi(a+1/2)}(e^{-i\pi(a+1/2)} - e^{i\pi(a+1/2)})} \cdot \frac{1}{2i}$$

$$= - \frac{1}{\sin\pi(a+1/2)e^{i\pi(a+1/2)}} \cdot \frac{1}{2i}$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \cdot \frac{\Gamma(a+1/2)\,\Gamma(1/2-a)}{e^{i\pi(a-1/2)}}$$

eingesetzt und gekürzt ergibt die von **Hankel***) gegebene Form

$$\text{(20)} \qquad \overset{a}{J}(x) = \frac{\Gamma(1/2-a)\left(\frac{x}{2}\right)^{a}}{\Gamma(1/2)\cdot 2i\pi} \int (u^2-1)^{a-1/2} e^{ixu}\, du^{*})$$

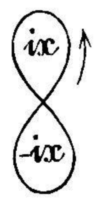


substituiert man

$$u\,i\,x = t$$

so wird das Integral zu

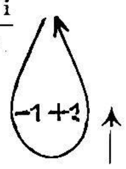
$$\text{(21)} \qquad \overset{a}{J}(x) = (-1)^{a}\frac{\Gamma(1/2-a)}{\Gamma(1/2)} \cdot \frac{(2x)^{-a}}{2i\pi} \int e^{t}(t^2+x^2)^{a-1/2}\, dt^{**})$$



eine Form die auch schon bei **Hankel** auftritt.

Betrachten wir nun noch das Integral

$$y = C\, x^{a} \int_{\frac{Ni}{x}} (u^2-1)^{a-1/2} e^{ixu}\, du$$



das nach unsern Untersuchungen auch eine partikuläre Lösung der Besselschen Differentialgleichung darstellt.

---

*) **Hankel**, Math. Annalen, Bd. 1.

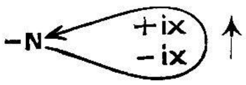
) S. auch **Graf & Gubler, Bessel'sche Funktionen I.

Durch Anwendung der Substitution

$$u\,i\,x = t$$

wird, falls wieder sämtliche neu auftretenden Konstanten in C_1 vereinigt werden:

$$y = C_1\, x^{-a} \int e^t\, (t^2 + x^2)^{a - 1/2}\, d\,t$$



Zur Bestimmung der Konstanten C_1 benützt man wieder die Formel:

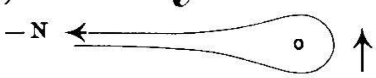
$$\left| \frac{\overset{a}{J}(x)}{x^a} \right|_{x=0} = \frac{1}{2^a} \cdot \frac{1}{\Gamma(a+1)}$$

in der, wegen des Faktors x^{-a} vor dem Integral, a durch — a ersetzt werden muss. Es ist demnach:

$$\left| \frac{\overset{-a}{J}(x)}{x^{-a}} \right|_{x=0} = C_1 \int e^t\, t^{2a-1}\, d\,t = \frac{2^a}{\Gamma(1-a)}$$

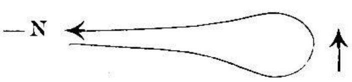
Das Weyerstrass'sche Integral lautet nun*)

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \frac{1}{2\,i\,\pi} \int e^x \cdot x^{-a}\, d\,x$$



also wird

$$C_1 \int e^t\, t^{2a-1}\, d\,t = C_1 \cdot \frac{2\,i\,\pi}{\Gamma(1-2a)} = \frac{2^a}{\Gamma(1-a)}$$



daher

$$C_1 = \frac{1}{2\,i\,\pi} \cdot \frac{\Gamma(1-2a)}{\Gamma(1-a)} \cdot 2^a$$

---

*) Graf, Gammafunktion.

Unter Berücksichtigung des Satzes über die Verdopplung des Argumentes der Gammafunktion*)

$$\Gamma(2\,p) = \frac{2^{2p-1}\,\Gamma(p)\Gamma(p+{}^1/_2)}{\Gamma({}^1/_2)}$$

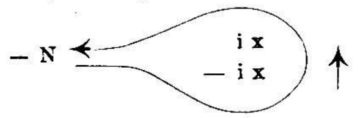
wird

$$C_1 = \frac{1}{2\,i\,\pi}\cdot\frac{\Gamma(2\,[{}^1/_2 - a])}{\Gamma(1-a)}\cdot 2^a = \frac{2^{-2a}\,\Gamma({}^1/_2 - a)\,\Gamma(1-a)}{2\,i\,\pi\,\Gamma({}^1/_2)\,\Gamma(1-a)}\cdot 2^a$$

$$= \frac{2^{-a}\,\Gamma({}^1/_2 - a)}{2\,i\,\pi\cdot\Gamma({}^1/_2)}$$

im Integral eingesetzt, ergibt:

$$(22)\qquad \overset{-a}{J}(x) = \frac{\Gamma({}^1/_2 - a)(2\,x)^{-a}}{\Gamma({}^1/_2)\,2\,i\,\pi}\int e^u\,(u^2 + x^2)^{a-{}^1/_2}\,d\,u^{**})$$

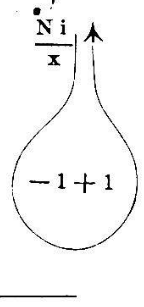


substituiert man nun wieder zurück, d. h. setzt man

$$u = x\,t\,i$$

so erhält man da $\Gamma({}^1/_2) = \sqrt{\pi}$

$$(23)\qquad \overset{-a}{J}(x) = \frac{\Gamma({}^1/_2 - a)}{\pi^{{}^3/_2}}\cdot\frac{x^a}{2^{a+1}}\int e^{x\,t\,i}\,(1-t^2)^{a-{}^1/_2}\,d\,t$$



Eingegangen am 15. Februar 1919.

*) Graf, Gammafunktion.

**) S. auch Graf & Gubler, Bessel'sche Funktionen.