Zum Problem der kürzesten Dämmerung

Otto Schenker.

Zum Problem der kürzesten Dämmerung.

Das Problem der kürzesten Dämmerung lässt eine direkte Lösung zu, die wenig bekannt zu sein scheint; da eine bezügliche Aufgabe im Archiv der Mathematik und Physik (20. Bd., III. Reihe, S. 180) nicht zur Behandlung kam, so gestatten wir uns eine Lösung zu geben. Es handelt sich darum, aus der Gleichung:

$$-\sin 18^0 = \sin\varphi \cdot \sin\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos(t + \Delta t) \qquad 1.$$

für einen festen Wert von φ die extremen Werte von Δt (im Sinne eines Minimums oder Maximums) zu berechnen. Hiebei ist $\cos t = -\operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\delta$, φ die geographische Breite, δ die Deklination der Sonne, t ihr halber Tagebogen, Δt dessen Verlängerung durch die Dämmerung, welche dauert, bis die Sonne 18^0 unter dem Horizont steht. Zunächst ergibt sich aus 1.:

$$\Delta t = -\operatorname{arc}\cdot\cos(-\operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\delta) + \operatorname{arc}\cdot\cos\frac{-\sin 18^0 - \sin\varphi \cdot \sin\delta}{\cos\varphi \cdot \cos\delta} \qquad 2.$$

Nach den Bedingungen der Aufgabe muss der Differentialquotient von Δt nach δ Null sein. Man erhält ohne Schwierigkeit:

$$\frac{d\,\Delta t}{d\,\delta} = (\Delta t)' = \left[\frac{\sin\varphi}{-\sqrt{\cos^2\varphi \cdot \cos^2\delta - \sin^2\varphi \cdot \sin^2\delta}} + \frac{\sin 18^0 \cdot \sin\delta + \sin\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi \cdot \cos^2\delta - (\sin 18^0 + \sin\varphi \cdot \sin\delta)^2}}\right]\frac{1}{\cos\delta} = 0; \qquad 3.$$

Hieraus leitet man nach einigen Reduktionen die Gleichung ab:

$$\frac{\sin^4\delta \cdot \sin 18^0 + 2\sin^3\delta \cdot \sin\varphi - \sin^2\delta \cdot \sin 18^0 \cdot \cos^2\varphi - 2\sin\delta \cdot \sin\varphi - \sin^2\varphi \cdot \sin 18}{(\sin^2\delta - 1)(-\sin^2\delta + \cos^2\varphi)(-\sin^2\delta + \cos^2\varphi - \sin^2 18 - 2\sin 18^0 \cdot \sin\varphi \cdot \sin\delta)} = 0$$

oder da, wie man leicht sieht, der Zähler durch $\sin^2\delta - 1$ teilbar ist:

$$\sin^2\delta \cdot \sin 18^0 + 2\sin\delta \cdot \sin\varphi + \sin 18 \cdot \sin^2\varphi = 0 \qquad 4.$$

mit Weglassung der Faktoren im Nenner, da dieselben nicht für dieselben Werte von δ verschwinden, wie der Zähler.

Die Wurzeln von 4. sind:

$$\sin\delta_1 = -\sin\varphi \cdot \mathrm{tg}\, 9^0 \text{ und } \sin\delta_2 = -\sin\varphi \cdot \mathrm{cotg}\, 9^0.$$

Gleichung 4. wurde hergeleitet ohne Rücksicht auf das Vorzeichen der Quadratwurzeln in 3. δ_1 und δ_2 brauchen daher die Gleichung 3. nicht notwendig zu erfüllen. In der Tat tut dies bloss δ_1, während für δ_2 die Ausgangsgleichung zu Grunde liegt:

$$\sin 18^0 = -\sin\varphi \cdot \sin\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos(t + \Delta t);$$

es gibt daher bloss einen extremen Wert für Δt (extrem im Sinne eines Maximums oder Minimums); derselbe ist ein Minimum und zwar für $\sin\delta_1 = -\sin\varphi \cdot \mathrm{tg}\, 9^0$. Dass es sich um ein Minimum handelt, zeigt die Diskussion der Ableitung von 3. nach δ, also $\frac{d^2\,\Delta t}{(d\ \delta)^2} = (\Delta t)''$, für $\sin\delta = -\sin\varphi \cdot \mathrm{tg}\, 9^0$.

Für dieselbe erhält man leicht einen eingliedrigen Ausdruck, in welchem die Faktoren auftreten:

$$+\mathrm{tg}\, 9^0;\ +(\cos^2 9 - \sin^2\varphi \cdot \sin^2 9);\ +\cos 9^0;$$
$$+\cos 18^0 \text{ und } +\sqrt{\cos^2 9 - \sin^2\varphi};$$

alle sind reell und positiv bis auf den letzten, der rein imaginär wird, wenn $\cos^2 9 < \sin^2\varphi$, sonst aber positiv ist. Sobald also $\cos^2 9 < \sin^2\varphi$ ist, wird $(\Delta t)''$ imaginär, somit auch $(\Delta t)'$, d. h. es gibt keine reelle Lösung. Die Aufgabe führt also zu einem einzigen reellen extremen Wert der Dämmerung (im Sinne eines Minimums oder Maximums), wenn $\varphi < 81^0$ ist und zwar ist derselbe ein Minimum.

Literatur: R. Wolf, Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie, II. Bd. 1872, S. 175 u. ff.

Eingegangen am 25. April 1921.